Vorlesungsankündigung Sommersemester 2017

Komplexe Geometrie A: Kähler Mannigfaltigkeiten

Ziel der Vorlesung ist eine Einführung in die Theorie der Kähler Mannigfaltigkeiten. Vorausgesetzt wird dafür nur die Kenntnis von differentialgeometrischen Grundbegriffen.

Kähler Mannigfaltigkeiten sind spezielle Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die komplexe Koordinaten zulassen und eine parallele symplektische Form tragen. Damit kommt es zu einem sehr schönen Zusammenspiel von komplexer, symplektischer und Riemannscher Geometrie.

Es gibt eine Vielzahl interessanter Beispiele von Kähler Mannigfaltigkeiten. Erste Beispiele sind $\mathbb{C}^n$ oder der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}P^n$. Weitere Beispiele sind die projektiven Varietäten $X \subset \mathbb{C}P^N$, hermitesch symmetrische Räume oder die Bahnen der koadjungierten Darstellung halb-einfacher Lie-Gruppen.

Kähler Mannigfaltigkeiten (insbesondere die kompakten) haben viele bemerkenswerte Eigenschaften, so hat z.B. die Kohomologie eine ganz besondere Struktur (man spricht vom Hodge-Diamanten). Eng damit verbunden ist ein spezielles Verhalten des Laplace-Operators.

Kähler Mannigfaltigkeiten sind Gegenstand aktueller Forschung mit Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Mathematik und Physik. So treten zum Beispiel 6-dimensionale Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten (das sind Ricci-flache Kähler Mannigfaltigkeiten) in supersymmetrischen Kompaktifizierungen der Stringtheorie von 10 Dimensionen auf. Die Mirror-Symmetrie-Vermutung in der Stringtheorie ist ursprünglich eine Symmetrie zwischen den Hodge-Diamanten von dualen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten.

Die Vorlesung wird im Wesentlichen dem Buch von A. Moroianu "Lectures on Kähler Geometry" folgen, das auch die notwendigen Grundlagen aus der Riemannschen und komplexen Geometrie einführt.