

# Hauptseminar: Der Laplace-Operator

Uwe Semmelmann (IGT)

1. Februar 2023

## Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

$$\Delta f = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = - \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) \quad \text{für} \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

## Der Laplace-Operator auf $(M, g)$

$$\Delta f = d^* d f \quad \text{für} \quad f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$$

und allgemeiner

$$\Delta \omega = d^* d \omega + d d^* \omega \quad \text{für} \quad \omega \in \Omega^p(M) = \Gamma(\wedge^p T^* M)$$

## Ziel des Seminars

- Studium und Präsentation einiger ausgewählter Eigenschaften des Laplace-Operators  $\Delta$  auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $(M, g)$ .
- Gezeigt werden soll das Zusammenspiel von Analysis, Geometrie, Topologie und Algebra (Darstellungstheorie).

## Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

- 1 Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator
- 2 Das Spektrum des Laplace-Operator auf Sphären und Tori
- 3 Das Gegenbeispiel von Milnor: isospektral  $\neq$  isometrisch
- 4 Eigenwert-Abschätzungen:

- Lichnerowicz-Obata:  $\text{Ric} \geq c \Rightarrow \lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} c$

- Cheeger-Ungleichung:  $\lambda_1 \geq \frac{1}{4} \frac{\text{vol}(S)}{\min(\text{vol}(M_+), \text{vol}(M_-))}$

## Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Formen

- 1 Hodge-Theorie:  $\text{Ker } \Delta|_{\Omega^p(M)} \cong H_{dR}^p(M)$
- 2 Bochner-Laplace-Operator und Weitzenböck Formeln, z.B.

$$\Delta = \nabla^* \nabla + \text{Ric} \quad \text{auf} \quad \Omega^1(M)$$

- 3 Bochner-Methode, z.B.

$$\text{Ric} > 0 \quad \Rightarrow \quad H_{dR}^1(M) = 0$$

## Literatur zum Seminar

- M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet: *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Springer Verlag, LNM 194 (1971)
- I. Chavel: *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press (1984)
- P. Petersen: *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, GTM 171 (2006)
- Uwe Semmelmann: *Differential-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten*, Vorlesungsskript

## Vorkenntnisse, Kontakt, Fragen, Anmeldung:

- Vorkenntnisse: Lineare Algebra und Analysis, Topologie, Differentialgeometrie (+ evtl. Riemannsche Geometrie)
- Anmeldung per Email:  
[uwe.semmelmann@mathematik.uni-stuttgart.de](mailto:uwe.semmelmann@mathematik.uni-stuttgart.de)
- Vortragsliste auf der homepage (demnächst)
- Vortragsvergabe und Vorbesprechung: im Anschluss an diese Veranstaltung in 7.544 bzw. per Email.