

Konforme Invarianten von Lorentz-Flächen

Diplomarbeit
zur Erlangung des akademischen Grades
Diplom-Mathematiker (Dipl.-Math.)

vorgelegt
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
CAND. MATH. FREDERIK WITT
aus Ludwigshafen am Rhein.

Betreuer: Prof. Dr. sc. Helga Baum

Berlin, Januar 2001

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Einleitung | 4 |
| 1.1 | Vorwort | 4 |
| 1.2 | Vorbemerkung | 7 |
| 1.3 | Thesen | 8 |
| 2 | Konforme Theorie der Lorentz-Flächen | 10 |
| 2.1 | Riemannsche Flächen | 10 |
| 2.2 | Existenzkriterien und Orientierbarkeitsbegriffe für pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten | 14 |
| 2.3 | Isotrope und isothermale Koordinaten auf Lorentz-Flächen | 18 |
| 2.4 | Konforme Invarianz von Vollständigkeitsbegriffen pseudoriemannscher Mannigfaltigkeiten | 26 |
| 2.4.1 | Geodäten, Vollständigkeitsbegriffe und Krümmung einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit | 26 |
| 2.4.2 | Vollständigkeit als konforme Invariante. Konforme Flachheit | 31 |
| 2.4.3 | Der Raum der Lorentz-Metriken und der konforme Modulraum über dem Torus | 39 |
| 2.5 | Nulllinien | 42 |
| 2.5.1 | Allgemeine Eigenschaften von Nulllinien | 42 |
| 2.5.2 | Nulllinien auf einfach zusammenhängenden Lorentz-Flächen | 44 |
| 2.5.3 | Nulllinien auf kompakten Lorentz-Flächen | 52 |
| 2.6 | Orthoforme und parakomplexe Strukturen | 55 |
| 2.7 | Beispiele | 72 |
| 2.8 | Ideale Ränder | 89 |
| 2.8.1 | Die Konstruktion des idealen Randes | 89 |
| 2.8.2 | Der Abbildungssatz von Kulkarni und weitere Anwendungen | 97 |
| 3 | Spinorielle Feldgleichungen auf Lorentz-Flächen | 109 |
| 3.1 | Spin-Strukturen | 109 |
| 3.1.1 | Clifford-Algebren | 109 |
| 3.1.2 | Die Pin- und Spin-Gruppe und ihre Lie-Algebren | 111 |
| 3.1.3 | Spinor-Darstellungen | 114 |
| 3.1.4 | Skalarprodukte auf Δ_{pq} | 116 |
| 3.1.5 | Spin-Strukturen auf pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten | 117 |
| 3.2 | Dirac- und Twistor-Operatoren | 121 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.2.1 | Der Dirac- und Twistor-Operator eines Clifford-Bündels | 121 |
| 3.2.2 | Dirac- und Twistor-Operatoren auf pseudoriemannschen Spin-Mannigfaltigkeiten | 122 |
| 3.2.3 | Verhalten des Dirac- und Twistor-Operators bei konformer Änderung der Metrik | 126 |
| 3.3 | Harmonische Spinoren und Twistor-Spinoren | 127 |
| 3.4 | Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf Flächen | 135 |
| 3.4.1 | Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf kompakten Riemannschen Flächen . | 135 |
| 3.4.2 | Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf Lorentz-Flächen I: Minkowski-Flächen | 136 |
| 3.4.3 | Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf Lorentz-Flächen II: Der Lorentz-Torus | 140 |
| 3.4.4 | Konstruktion von positiven harmonischen Spinoren auf Lorentz-Flächen | 171 |
| 3.4.5 | Abschließende Bemerkungen und offene Fragen | 178 |

1 Einleitung

1.1 Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit wurde innerhalb des Teilprojekts "Spinorielle Feldgleichungen und Lorentz-Geometrie" des SFB 288 "Differentialgeometrie und Quantenphysik" geschrieben. Ihre Zielsetzung ist zweifach: Erstens soll sie denjenigen, die sich im Rahmen ihrer Arbeit für Lorentz-Flächen interessieren, eine schnelle Einführung über die wesentlichen Gesichtspunkte bieten. Zweitens sollen konforme Invarianten auf Lorentz-Flächen untersucht und ihre Beziehung zur Spingeometrie aufgezeigt werden. Insbesondere wird die Frage erörtert, inwieweit spingeometrische Invarianten konforme Klassen von Lorentz-Metriken unterscheiden können.

Erstaunlicherweise sind Lorentz-Flächen — im Gegensatz zu ihrem Riemannschen Analogon — erst seit relativ kurzer Zeit Gegenstand der reinen Mathematik, obwohl sie bereits innerhalb der Relativitätstheorie untersucht wurden. Dort treten sie z.B. als Faktoren von warped products auf, die einer Reihe kosmologischer Modelle zugrunde liegen. Neben systematischen Gründen liegt es zudem nahe, Lorentz-Flächen als Beispielklassen zu untersuchen, um Probleme allgemeiner Dimension zunächst in der unserer Intuition zugänglicheren Dimension 2 zu behandeln.

Das Studium von Lorentz-Flächen orientiert sich naturgemäß an den *Riemannian themes* (vgl. [BeEhEa96]), wie z.B.:

- Man klassifiziere alle einfach zusammenhängenden Lorentz-Flächen bis auf konforme Äquivalenz (analog zum Uniformisationssatz für Riemannsche Flächen). Ein eng verwandtes Problem ist die Untersuchung des konformen Modulraumes.
- Man finde hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz (konformer) Einbettungen in Lorentz-Vektorräume.

Neue, Lorentz-spezifische Probleme tauchen z.B. durch den *kausalen Charakter* von Vektorfeldern und Geodäten auf:

- Ist jede kompakte Lorentz-Fläche vollständig oder ist Vollständigkeit zumindest eine konforme Invariante? Welche Aussagen lassen sich speziell über zeit-, raum- oder lichtartige Geodäten machen? Existiert stets eine geschlossene Geodäte?

Ein erster Schritt wurde von R. Kulkarni in seinem wegweisenden Artikel *An analogue of the Riemann mapping theorem for Lorentz metrics* ([Ku85]) getan. R. Kulkarni untersuchte Lorentz-Flächen

vom konformen Standpunkt aus und bewies die ersten Klassifikationsresultate für einfach zusammenhängende Lorentz–Flächen. Dieser Artikel übte nachhaltigen Einfluß aus und etablierte Lorentz–Flächen als Gegenstand gezielter Untersuchungen innerhalb der reinen Mathematik. Auf diesem Artikel basiert auch die bislang einzige Monographie zu Lorentz–Flächen, T.Weinsteins Buch *An introduction to Lorentz Surfaces* ([We96]). Sie erforschte mit ihrer Arbeitsgruppe die in [Ku85] aufgeführten Aspekte tiefer und stellte sie systematisch dar. Diese Resultate sollen im ersten Kapitel zusammengefaßt und vorgestellt werden.

Spinorielle Feldgleichungen auf Lorentz–Flächen sind innerhalb der reinen Mathematik weitgehend unerforscht. Obwohl Dirac–Operatoren zuerst in einem Lorentz–geometrischen Kontext eingeführt wurden, konzentrierte sich die mathematische Forschung seit dem Indexsatz von Atiyah–Singer vornehmlich auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Erste Untersuchungen harmonischer Spinoren auf Riemannschen Flächen wurden von N. Hitchin in [Hi74] veröffentlicht. Diese wurden schließlich von C. Bär und P. Schmutz in der Arbeit [BäSc92] vervollständigt. Andererseits wurden spingeometrische Fragen auf pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten erst ab Dimension größer oder gleich 3 untersucht. Im dritten Kapitel wollen wir die Übertragbarkeit der Methoden und Resultate aus höheren Dimensionen in die Signatur $(1, 1)$ diskutieren. Anschließend beschäftigen wir uns mit der Existenz bzw. Konstruktion von harmonischen Spinoren und Twistor–Spinoren, um Aussagen über zwei wichtige spingeometrische konforme Invarianten zu formulieren, nämlich die Dimension des Kernes des Dirac– und Twistor–Operators. Ein dritter Aspekt gewann im Laufe dieser Arbeit ein besonderes Gewicht: Die Untersuchung kompakter Lorentz–Flächen und die damit zusammenhängenden Vollständigkeitsfragen. M.Sánchez und A.Romero behandelten diese in einer Reihe von Arbeiten (siehe [RoSá93], [RoSá₁94], [RoSá₂94], [RoSá₃94], [RoSá95], [Sá94] und [RoSá97]). Dabei stand ebenfalls die konforme Fragestellung im Vordergrund, d.h. ob Vollständigkeit – wie trivialerweise im Riemannschen Fall – für kompakte Mannigfaltigkeiten eine konforme Invariante darstellt. Andererseits ist es ein klassisches Resultat, daß die Existenz von Lorentz–Metriken auf kompakten Mannigfaltigkeiten topologisch obstruiert ist, denn die Euler–Zahl muß verschwinden. Dieser Fakt hat zwei wichtige Konsequenzen: Erstens ist die einzig kompakte Lorentz–Fläche der Torus. Zweitens ergibt sich ein relativ irreguläres Verhalten der *Nulllinien*, einer der wichtigsten konformen Invarianten auf Lorentz–Flächen und rückt die Untersuchung somit in die Nähe dynamischer Systeme. Auch aus spingeometrischer Sicht wird sich der kompakte Fall als interessanter erweisen; hier scheint es einen tieferen Zusammenhang zwischen der Existenz nullstellenfreier harmonischer Spinoren und vollständiger isotroper Geodäten zu geben.

In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, daß

- harmonische und Twistor–Spinoren in einer gewissen Symmetrie zueinander stehen und analog

behandelt werden können,

- die Dimension des Raumes der harmonischen bzw. Twistor–Spinoren in Beziehung zum globalen Verhalten lichtartiger Kurven steht und
- nullstellenfreie harmonische und Twistor–Spinoren konforme Flachheit bewirken.

Das Hauptresultat ist:

SATZ. Sei $(M^{1,1}, [g])$ eine kompakte μ -Fläche. Dann ist $\delta_+ = 0, 1$ oder $+\infty$. Dabei sind diese Fälle wie folgt charakterisiert:

- (i) (a) Existiert eine dichte X -Linie oder
- (b) gilt auf $(M^{1,1}, [g])$ die Bedingung (NR) oder
- (c) existiert kein (resonanter) X -flacher Zylinder, so ist $\delta_+ = 0$ oder 1 .

Gilt insbesondere $\delta_+ = 1$, so treten nur die Fälle (a) oder (b) auf.

- (ii) Ist $(M^{1,1}, [g])$ resonant X -flach, so gilt $\delta_+ = +\infty$.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich dem SFB 288 für seine freundliche Einladung im Dezember 1999 danken. Ferner gilt mein Dank Lutz Recke (HU Berlin) für die gemeinsamen Diskussionen über Differentialgleichungen auf dem Torus, Tilla Weinstein (Rutgers University, New Jersey) für ihre freundliche Beantwortung meiner Fragen, Miguel Sánchez und Alfonso Romero (Universidad de Granada) für ihre Anregungen und die Übersendung ihrer Arbeiten, und natürlich meiner Betreuerin Helga Baum, die mir mit ihrer Diskussionsbereitschaft über die kritischen Momente hinweghalf.

F.W.

Berlin, Januar 2001.

1.2 Vorbemerkung

- (i) Alle betrachteten Mannigfaltigkeiten seien glatt und erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Genauso seien alle Abbildungen, sofern nicht anders vermerkt, als glatt vorausgesetzt. Atlanten oder Unteratlanten mit Zusatzbedingungen seien stets maximal (eventuell bezüglich der Zusatzbedingungen).
- (ii) Wir gebrauchen im allgemeinen das Wort "pseudoriemannsch" nicht im strikten Sinne, d.h. der Riemannsche Fall sei, sofern nicht anders bemerkt, als Spezialfall einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit angenommen.
- (iii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow M$ heißt *Kurve*, falls I offen, *Bogen*, falls I kompakt, und *Strahl*, falls I halboffen ist. Für glatte Kurven, Bögen und Strahlen bedeutet *regulär*, daß $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist. Eine Kurve, Bogen oder Strahl sei *einfach*, falls sie injektiv ist, d.h. keinen Schnittpunkt mit sich selbst besitzt. Für die Bildmenge einer Kurve, eines Bogens oder eines Strahls γ schreiben wir $|\gamma|$ oder einfach nur γ , wenn der Sinn aus dem Kontext ersichtlich wird.
- (iv) Für Produktmengen sei pr_i die Projektion auf die i -te Komponente. Beispielsweise haben wir für $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ die Projektionen $pr_1(p) = x$ und $pr_2(p) = y$. Eine zusammenhängende Teilmenge I des \mathbb{R}^2 heiße *horizontales Liniensegment*, falls $pr_2(I) \equiv \text{const}$, und *vertikales Liniensegment*, falls $pr_1(I) \equiv \text{const}$. Ein Liniensegment nennen wir dabei *offen*, wenn es homöomorph zu einem offenen, und *abgeschlossen*, wenn es homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall aus \mathbb{R} ist.

1.3 Thesen

1. Auf Lorentz-Flächen existieren lokal stets isothermale Koordinatensysteme. Insbesondere folgt, daß keine lokalen konformen Invarianten existieren.

2. Man kann Lorentz-Flächen — analog zu Riemannschen Flächen — als Flächen mit gegebener konformer Struktur auffassen, denn die Vorgabe einer konformen Klasse von Metriken $[h]$ ist äquivalent zur Vorgabe zweier glatter Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} . Analytisch drückt sich dies in der Parakomplexität der durch eine konforme Struktur induzierten Übergangsfunktionen aus. Diese implizieren aber keinerlei Regularität: C^j -konforme Äquivalenz impliziert nicht C^{j+1} -konforme Äquivalenz.

3. Die Betrachtung von Nulllinien erlaubt die Unterscheidung konformer Klassen; sie sind aber als “stetig” konforme Invariante anzusehen. Auf einfach zusammenhängenden Lorentz-Flächen sind sie Untermannigfaltigkeiten. Auf kompakten Lorentz-Flächen liegen sie dicht, sind geschlossen oder sind Asymptote einer geschlossenen Nulllinie.

4. Es existieren überabzählbar viele einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen. Man kennt keinen Uniformisationssatz im Lorentz-Fall. Allerdings bewies R.Kulkarni in [Ku85] ein (schwächeres) Analogon zum Abbildungssatz von Riemann. Dieser beruht auf der Konstruktion des sogenannten *idealen Randes*, der das Schnittpunktverhalten der Nulllinien im Unendlichen kodiert.

5. Die spingeometrischen Methoden, die für Dimensionen ≥ 3 bekannt sind, lassen sich nicht auf Lorentz-Flächen übertragen. Insbesondere kann der Kern des Twistor-Operators unendlich dimensional sein.

6. Die Existenz und Eigenschaften harmonischer Spinoren sind eng mit den Nulllinien verknüpft. Es gilt:

(i) Sei φ aus $\Gamma(S^+)$ bzw. $\Gamma(S^-)$. Dann ist φ ein harmonischer Spinor genau dann, wenn

$$\nabla_X^S \varphi \equiv 0 \text{ bzw. } \nabla_Y^S \varphi \equiv 0$$

für alle \mathcal{X} -Vektorfelder X bzw. \mathcal{Y} -Vektorfelder Y gilt.

(ii) Sei φ aus $\Gamma(S^+)$ bzw. $\Gamma(S^-)$. Dann ist φ ein Twistor-Spinor genau dann, wenn

$$\nabla_Y^S \varphi \equiv 0 \text{ bzw. } \nabla_X^S \varphi \equiv 0$$

für alle \mathcal{Y} -Vektorfelder Y bzw. \mathcal{X} -Vektorfelder X gilt.

Insbesondere werden harmonische bzw. Twistor-Spinoren durch $Spin(1,1)$ -äquivariante Funktionen beschrieben, die längs der Hebungen \mathcal{X} - bzw. \mathcal{Y} -Kurven konstant sind. Aufgrund dieser Symmetrie reicht es, lediglich harmonische Spinoren zu untersuchen.

7. Die Existenz einer Nullstelle impliziert das Verschwinden des harmonischen bzw. Twistor-Spinors entlang der durch diesen Punkt verlaufenden \mathcal{X} - bzw. \mathcal{Y} -Linie. Insbesondere bedeutet dies für Lorentz-Flächen mit einer dichten Nulllinie, daß die Dimension der harmonischen bzw. Twistor-Spinoren ≤ 2 ist.

8. Es besteht ein Zusammenhang zwischen konformer Flachheit, Vollständigkeit und Existenz harmonischer Spinoren: Zwei nullstellenfreie harmonische Halb-Spinoren, wovon jeweils einer aus $\Gamma(S^\pm)$ ist, bewirken die konforme Flachheit der Lorentz-Fläche und somit ihre Vollständigkeit, falls diese kompakt ist. Umgekehrt folgt: Damit die Dimension der positiven bzw. negativen harmonischen Spinoren ≥ 2 ist, müssen geschlossene und vollständige \mathcal{X} - bzw. \mathcal{Y} -Geodäten existieren. Analoge Aussagen gelten für Twistor-Spinoren.

9. Auf " μ -Flächen" gelten *Lokalisierungsprinzipien*: Die Existenz einer Nullstelle impliziert das Verschwinden des harmonischen bzw. Twistor-Spinors auf der ganzen Fläche. Dann folgt insbesondere der

SATZ. *Sei $(M^{1,1}, [g])$ eine kompakte μ -Fläche. Dann ist $\delta_+ = 0, 1$ oder $+\infty$. Dabei sind diese Fälle wie folgt charakterisiert:*

- (i) (a) *Existiert eine dichte X -Linie oder*
- (b) *gilt auf $(M^{1,1}, [g])$ die Bedingung (NR) oder*
- (c) *existiert kein (resonanter) X -flacher Zylinder, so ist $\delta_+ = 0$ oder 1 .*

Gilt insbesondere $\delta_+ = 1$, so treten nur die Fälle (a) oder (b) auf.

- (ii) *Ist $(M^{1,1}, [g])$ resonant X -flach, so gilt $\delta_+ = +\infty$.*

2 Konforme Theorie der Lorentz–Flächen

2.1 Riemannsche Flächen

2.1.1 DEFINITION. Sei M^n eine glatte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein metrischer Tensor g (oder kurz: eine Metrik) ist ein symmetrischer, nicht ausgearteter $(2, 0)$ -Tensor auf M mit konstantem Index p . g heißt Riemannsche Metrik, falls $p = 0$, pseudoriemannsche Metrik, falls $p > 0$; im speziellen Falle $p = 1$ heißt g Lorentz–Metrik. Eine (pseudo-)Riemannsche (bzw. Lorentz-) Mannigfaltigkeit ist gegeben durch ein Paar $(M^{p,q}, g)$, wobei M eine Mannigfaltigkeit, g eine (pseudo-) Riemannsche (bzw. Lorentz-)Metrik und p der Index von g ist ($n = p + q$ bezeichne in dieser Schreibweise die Dimension der Mannigfaltigkeit).

2.1.2 BEMERKUNG. Während auf jeder glatten Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Metrik definiert werden kann (siehe z.B. [Sp179] Kap. 9 Theorem 4), gibt es Mannigfaltigkeiten, auf denen keine pseudoriemannschen Metriken existieren. Im dritten Abschnitt untersuchen wir notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz von pseudoriemannschen Metriken, insbesondere von Lorentz–Metriken; sie ist i. all. topologisch obstruiert.

2.1.3 DEFINITION

(i) Ein orientierungserhaltender (C^j) -Diffeomorphismus zwischen zwei orientierten pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten $f : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ heißt (C^j) -konforme Äquivalenz genau dann, wenn $g = \lambda f^* \tilde{g}$ mit $\lambda \in C^j(M)$ und $\lambda > 0$ gilt. Die Funktion λ nennen wir konformen Faktor. Eine orientierungserhaltende Abbildung $f : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ heißt lokale C^j -konforme Äquivalenz, wenn für jedes $p \in M$ eine Umgebung U von p so existiert, daß $f|_U$ eine C^j -konforme Äquivalenz auf sein Bild ist. Existiert zwischen zwei pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) eine (C^j) -konforme Äquivalenz, so nennt man (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) (C^j) -konform äquivalent; wir schreiben dann $(M, g) \sim_j (\tilde{M}, \tilde{g})$. \sim_j ist eine Äquivalenzrelation; die zu (M, g) gehörige Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $[(M, g)]_j$ und nennen sie die (C^j) -konforme Klasse von (M, g) . Zwei pseudoriemannsche Metriken g und \tilde{g} auf M heißen konform äquivalent, falls $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\lambda > 0$ und $\tilde{g} = \lambda g$ existiert. Wir schreiben $[g]$ für die zugehörige Äquivalenzklasse.

(ii) Bezeichne $g_{p,q}$ die Standardmetrik auf dem pseudo-euklidischen Raum $\mathbb{R}^{p,q}$, d.h. die in Matrixschreibweise durch $(\delta_j^i \epsilon_j)_{i,j=1}^n$ mit $\epsilon_j = -1$ für $j \leq p$ und $\epsilon_j = 1$ für $j > p$ definierte Metrik.

Im Fall $p = 0$ schreiben wir einfach g_n statt $g_{0,n}$. Eine Karte (U, χ) von $(M^{p,q}, g)$ heißt *isothermal* oder *isothermales Koordinatensystem*, falls χ eine konforme Äquivalenz zwischen $(U, g|_U)$ und $(\chi(U), g_{p,q})$ ist, d.h. falls $[\chi^* g_{p,q}] = [g|_U]$ bzw. $\chi^* g_{p,q} = \lambda g|_U$ mit $\lambda \in C^\infty(M)$ und $\lambda > 0$ gilt.

2.1.4 DEFINITION. Eine zusammenhängende, orientierte, zweidimensionale Mannigfaltigkeit S heißt *Fläche*. Existiert auf S eine konforme Klasse von Riemannschen bzw. Lorentz-Metriken, so heißt das Paar $(S, [g])$ *Riemannsche Fläche* bzw. *Lorentz-Fläche*.

2.1.5 BEMERKUNG. Die Begriffe "konforme Äquivalenz" bzw. "isothermales Koordinatensystem" sind *konforme Invarianten* (d.h. gelten sie für ein $\tilde{g} \in [g]$, so für die ganze Klasse); die Definition 2.1.3 (ii) überträgt sich somit sinngemäß auf Riemannsche Flächen bzw. Lorentz-Flächen. Im folgenden werden wir begrifflich nicht zwischen (S, g) und $(S, [g])$ unterscheiden und beide Objekte — par abus de langage — als Riemannsche Fläche bzw. Lorentz-Fläche bezeichnen. Wir schreiben diese, falls es nicht auf die spezielle Fläche bzw. Metrik ankommt, generisch als \mathcal{R} bzw. \mathcal{L} .

2.1.6 THEOREM. Sei \mathcal{R} eine Riemannsche Fläche. Dann existiert für jeden Punkt eine Umgebung, auf der ein isothermales Koordinatensystem definiert ist.

Beweis. Siehe z.B. [Sp479] Kap. 9, Satz 30 oder [Wo84] Kap. 2, Theorem 2.5.14. ■

2.1.7 BEMERKUNG. In der Funktionentheorie faßt man eine Riemannsche Fläche als ein Paar (S, Φ) auf, wobei S ein separabler Hausdorff-Raum und Φ eine Überdeckung aus offenen Mengen $\{U_\alpha\}_\alpha$ mit Homöomorphismen $z_\alpha : U_\alpha \rightarrow z_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ ist, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (i) Identifiziert man \mathbb{R}^2 kanonisch mit \mathbb{C} , so sind die Übergangsfunktionen $z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ komplex differenzierbar und
- (ii) die Familie $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ ist maximal für diese Eigenschaft.

S ist also eine eindimensionale, komplexe Mannigfaltigkeit mit dem holomorphen Atlas Φ . Φ nennt man auch *konforme Struktur* (siehe z.B. [AhSa60], Kap.II, §1 ff.). Insbesondere ist dann S eine zweidimensionale (reelle) Mannigfaltigkeit. Sind die Jacobi-Determinanten der Übergangsfunktion positiv, so definiert Φ zusätzlich eine Orientierung für S . Tatsächlich sind beide Begriffe der (orientierten) Riemannschen Fläche äquivalent: Mit Hilfe von 2.1.6 erhalten wir den

2.1.8 SATZ. Sei S eine Fläche, g eine Riemannsche Metrik auf S , und $\{(W_\alpha, w_\alpha = (w_{1\alpha}, w_{2\alpha}))\}$ die maximale Überdeckung aus orientierten g -isothermalen Karten. Dann definiert $z_\alpha = w_{1\alpha} + iw_{2\alpha}$ eine konforme Struktur auf S . Zwei Riemannsche Metriken definieren dabei dieselbe konforme Struktur dann und nur dann, wenn sie konform äquivalent sind. Umgekehrt können wir jeder konformen Struktur Φ auf S eine eindeutig bestimmte konforme Klasse Riemannscher Metriken $[g_\Phi]$ durch die Forderung zuordnen, das $[g_\Phi]$ wiederum Φ als konforme Struktur induziert.

Beweis. Der erste Teil der Aussage verifiziert man durch direktes Nachrechnen. Die übrige Aussage wird analog zu 2.6.22 gezeigt, wo wir ein entsprechendes Resultat für Lorentz-Flächen beweisen (vgl. ferner [Wo84], Kap. 2, Theorem 2.5.17). ■

2.1.9 BEISPIELE. (vgl. [FaKr91], I.1.3 und IV.8.1 ff.)

(i) Die Riemannsche Ebene

$$(\mathbb{R}^2, g_2) \cong (\mathbb{C}, \Phi_{g_0} \text{ erzeugt von } \{\varphi_1 = id_{\mathbb{C}}\}).$$

(ii) Die Riemannsche Sphäre

$$\begin{aligned} (S^2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}, (g_{S^2})_{(x_1, x_2)} = \frac{4}{(1 + \|x\|^2)} g_2) \\ &\cong (\mathbb{C} \cup \{\infty\}, \Phi_{g_{S^2}} \text{ erzeugt von} \\ &\quad \{\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_1 = id_{\mathbb{C}}; \varphi_2 : \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}^* \\ 0, z = \infty \end{cases} \}). \end{aligned}$$

(iii) Die hyperbolische Ebene \mathbb{H} bzw. die offene Kreisscheibe \mathbb{B}

$$\begin{aligned} (\mathbb{H} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}, (g_{\mathbb{H}})_{(x_1, x_2)} = \frac{1}{x_2^2} g_2) \\ &\cong (\mathbb{B} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}, (g_{\mathbb{B}})_{(x_1, x_2)} = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)} g_2) \\ &\cong (\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}^2, \Phi_{g_{\mathbb{H}^2}} \text{ erzeugt von } \{\varphi_1 = id_{\mathbb{D}}\}). \end{aligned}$$

((iii) kann nicht biholomorph auf (i) abgebildet werden, denn jede holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ ist nach dem Satz von Liouville konstant.)

Die Klassifikation bis auf konforme Äquivalenz ist daher die natürliche Abschwächung der Klassifikation bis auf Isometrie. A priori müssen wir jedoch noch die Differenzierbarkeitsstufe der konformen Äquivalenzen berücksichtigen; aufgrund ihrer komplexen Natur zeichnen sich aber Riemannsche Flächen durch ein sehr reguläres Verhalten aus:

2.1.10 DEFINITION. Seien $(S, [g])$ und $(\tilde{S}, [\tilde{g}])$ zwei Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $f : S \rightarrow \tilde{S}$ heißt holomorph genau dann, falls $\tilde{\varphi} \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph im üblichen Sinne für alle $(U, \varphi) \in \Phi, (\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \tilde{\Phi}$ ist.

2.1.11 SATZ. Seien $(S, [g])$ und $(\tilde{S}, [\tilde{g}])$ zwei Riemannsche Flächen, $f : S \rightarrow \tilde{S}$ eine Abbildung der Klasse C^1 . Dann sind äquivalent:

- (i) f ist eine lokale C^1 -konforme Äquivalenz.
- (ii) f ist holomorph (bezüglich der durch $[g]$ bzw. $[\tilde{g}]$ auf S bzw. \tilde{S} induzierten konformen Strukturen).
- (iii) df erhält den orientierten Winkel von Tangentialvektoren.

Beweis. Der Schluß von (ii) auf (iii) bzw. von (iii) auf (i) sind bekannte Tatsachen aus der Funktionentheorie bzw. Geometrie. Die Äquivalenz zwischen (i) und (ii) folgt unmittelbar aus 2.1.8 (siehe auch [Wo84], Kap. 2, Korollar 2.5.18). ■

Für eine Klassifikation konform äquivalenter Riemannscher Flächen ist es also unerheblich, den Differenzierbarkeitsgrad konformer Äquivalenzen zu unterscheiden. Betrachten wir zunächst nur einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen, so ist die Situation besonders einfach: Aus dem

2.1.12 SATZ (Abbildungssatz von Riemann). Sei Ω ein Gebiet ungleich \mathbb{C} , d.h. eine echte, offene und einfach zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{C} , und $z_0 \in \Omega$. Dann existiert genau eine bijektive holomorphe Abbildung $f : \Omega \rightarrow D$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) > 0$. Anders gesagt ist jedes Gebiet ungleich \mathbb{C} konform äquivalent zur offenen Kreisscheibe aus 2.1.9 (iii).

Beweis. Siehe z.B. [Ah79], Abschnitt 6.1.1, Theorem 1. ■

folgt die vollständige Klassifikation der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen:

2.1.13 SATZ (Uniformisationssatz von Koebe–Poincaré). Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist konform äquivalent zu genau einer der folgenden (versehen mit ihrer Standardmetrik bzw. konformen Struktur aus 2.1.9)

- (i) die Ebene \mathbb{C}
- (ii) die Riemannsche Sphäre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- (iii) die offene Kreisscheibe \mathbb{D} .

Geometrisch entsprechen diese drei Fälle den einfach zusammenhängenden Flächen konstanter Schnittkrümmung $K = 0, 1$ und -1 .

Beweis. Siehe z.B. [FaKr91], Kapitel IV.4 ff. ■

Aus Standardargumenten der Überlagerungstheorie (siehe z.B. [Wo84] Kapitel 1.8 und Lemma 2.5.19) folgt der

2.1.14 SATZ. Sei S eine Riemannsche Fläche. Dann ist S diffeomorph zu einem Quotienten aus S^2, \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{H}^2 und einer Gruppe konformer Äquivalenzen aus $\text{Diff}(S^2), \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $\text{Diff}(\mathbb{H}^2)$. Weiterhin ist die Überlagerungsabbildung eine lokale konforme Äquivalenz.

2.1.15 SATZ. Jede Riemannsche Fläche ist (global) konform äquivalent zu einer vollständigen Riemannschen Fläche konstanter Schnittkrümmung.

Beweis. Siehe [Wo84], Theorem 2.5.20. ■

2.2 Existenzkriterien und Orientierbarkeitsbegriffe für pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten

2.2.1 SATZ. Auf einer Mannigfaltigkeit M^n existiert genau dann eine pseudoriemannsche Metrik vom Index p , falls ein p -dimensionales Unterbündel von TM existiert. Insbesondere zerlegt sich jeder Tangentialraum TM einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$ (mit $n = p + q = \text{Dimension}$ der Mannigfaltigkeit) in die g -orthogonale Summe eines maximal zeitartigen Unterbündels ξ^p und eines maximal raumartigen Unterbündels η^q .

Beweis. Siehe z.B. [La99], Satz 1.3.1 und Korollar 1.3.2. ■

2.2.2 BEMERKUNG. Es existieren topologische Obstruktionen für die Existenz solcher Zerlegungen (z.B. das Produktaxiom der Stiefel-Whitney-Klassen, siehe [MiSt74] §4 oder [Hu94], Teil III, Kap.17 ff.).

2.2.3 DEFINITION. Sei $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, $TM = \xi^p \oplus \eta^q$ eine Zerlegung des Tangentialraums gemäß 2.2.1. Dann heißt $(M^{p,q}, g)$

- (i) zeitorientierbar, falls ξ^p orientierbar ist.
- (ii) raumorientierbar, falls η^q orientierbar ist.

(iii) orientierbar, falls TM orientierbar ist.

Für diese Orientierbarkeitsbegriffe hat man folgendes topologisches Kriterium zur Verfügung:

2.2.4 SATZ.

(i) Die Stiefel–Whitney–Klassen $w_i(\xi^p)$ und $w_i(\eta^q)$, $i=0,1,2,\dots$ hängen nicht von der orthogonalen Zerlegung von TM in die direkte Summe maximal zeit- und raumartiger Unterbündel ξ^p und η^q ab.

(ii) $(M^{p,q}, g)$ ist zeitorientierbar bzw. raumorientierbar bzw. orientierbar genau dann, wenn

$$w_1(\xi^p) = 0 \text{ bzw. } w_1(\eta^q) = 0 \text{ bzw. } w_1(TM) = 0$$

gilt. Insbesondere hängen diese Orientierbarkeitsbegriffe nicht von der Zerlegung $TM = \xi^p \oplus \eta^q$ ab.

Beweis. Dies sind Standardergebnisse aus der Theorie der charakteristischen Klassen (siehe z.B. [MiSt74] Aufgabe 12.4 oder [Hu94] Teil III, Kap. 17, Theorem 12.1). ■

2.2.5 KOROLLAR. Gelten auf $M^{p,q}$ zwei Orientierbarkeitsbegriffe, dann gilt auch der dritte.

Beweis. Da aus dem Produktaxiom der Stiefel–Whitneyklassen $w_1(TM) = w_1(\xi^p) + w_1(\eta^q)$ folgt, ergibt Anwenden von Satz 2.2.4 das Ergebnis. ■

2.2.6 DEFINITION. Eine Lorentz–Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$ heißt zeitorientierbar bezüglich g , falls ein zeitartiges Vektorfeld T existiert, d.h. $g(T, T) < 0$. Eine zeitorientierbare Lorentz–Mannigfaltigkeit heißt zeitorientiert, falls ein zeitartiges Vektorfeld vorgegeben wird, d.h. es liegt ein Tripel (M, g, T) vor. Für ein zeitartiges Vektorfeld T nennen wir die Menge $\mathcal{T}^+(T)_x := \{v \in T_x M \mid v \text{ zeitartig und } g_x(v, T(x)) < 0\}$ die Menge der zukunftsgerichteten Vektoren und $\mathcal{T}^-(T)_x := \{v \in T_x M \mid v \text{ zeitartig und } g_x(v, T(x)) > 0\}$ die Menge der vergangenheitsgerichteten Vektoren bezüglich T in x . Zwei zeitartige Vektorfelder T und \tilde{T} induzieren die gleiche Zeitorientierung oder sind zeitäquivalent, falls $\mathcal{T}^\pm(T)_x = \mathcal{T}^\pm(\tilde{T})_x$ für alle x aus M . In diesem Sinne nennen wir – par abus de langage – ein zur gewählten Zeitorientierung äquivalentes zeitartiges Vektorfeld kurz eine Zeitorientierung.

2.2.7 BEMERKUNGEN. (i) Offenbar stimmt der Zeitorientierungsbegriff pseudoriemannscher Mannigfaltigkeiten aus 2.2.3 mit dem soeben speziell für Lorentz–Mannigfaltigkeiten definierten überein: Ist ξ^1 orientierbar, so existiert ein glatter Schnitt ohne Nullstelle (vgl. den Beweis von 2.2.9). Ist umgekehrt

T ein zeitartiges Vektorfeld, so definiert ξ^1 = das durch T ausgezeichnete Unterbündel in TM , ein maximal zeitartiges, orientiertes Unterbündel in TM .

(ii) Orientierbarkeit und Zeitorientierbarkeit sind zwei logisch unabhängige Begriffe (siehe S.145 in [O'N83]).

(iii) Zeitäquivalenz ist offenbar eine Äquivalenzrelation mit genau zwei Äquivalenzklassen; somit kann jede Lorentz-Mannigfaltigkeit (M, g) durch eine Lorentz-Mannigfaltigkeit (\tilde{M}, \tilde{g}) überlagert werden, die zeitorientierbar ist (siehe z.B. [O'N83] S.194). Einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeiten sind also stets zeitorientierbar bezüglich ihrer vorgegebenen Metrik g (gemäß 2.2.9 existiert für Lorentz-Mannigfaltigkeiten stets eine weitere Lorentz-Metrik \tilde{g} , so daß (M, \tilde{g}) zeitorientierbar ist).

(iv) Zeitorientierbarkeit ist eine konforme Invariante, d.h. ist (M, g) zeitorientierbar, so auch (M, \tilde{g}) für jedes $\tilde{g} \in [g]$. Wir können also sinnvoll von zeitorientierbaren Lorentz-Flächen $(S, [h])$ sprechen.

2.2.8 BEISPIEL. (siehe [SaWu77], Beispiel 1.2.3)

Sei $M = \mathbb{R} \times S^1$. Wir betrachten M als Quotienten von \mathbb{R}^2 , wobei wir (x_1, x_2) mit $(x_1, x_2 + 1)$ identifizieren. Seien

$$\omega := \cos(\pi x_2) dx_1 + \sin(\pi x_2) dx_2$$

und

$$\chi := -\sin(\pi x_2) dx_1 + \cos(\pi x_2) dx_2$$

zwei 1-Formen auf \mathbb{R}^2 . Dann definiert

$$g := \omega \otimes \omega - \chi \otimes \chi$$

eine Lorentz-Metrik auf \mathbb{R}^2 , die wir auf den Zylinder M projizieren können, d.h. (M, g) ist eine Lorentzfläche. Man überzeugt sich aber leicht davon, daß (M, g) nicht zeitorientierbar ist (nach einer Umdrehung werden \mathcal{T}^+ und \mathcal{T}^- vertauscht). Andererseits induziert die Lorentz-Metrik

$$\tilde{g} = dx_1 \otimes dx_1 - dx_2 \otimes dx_2$$

auf \mathbb{R}^2 eine zeitorientierbare Lorentz-Metrik auf M . Da beide Metriken auch auf den Torus induzierbar sind, existieren also auch nicht zeitorientierbare Tori. Zeitorientierbarkeit hängt also im Gegensatz zur Orientierbarkeit nicht ausschließlich von der glatten Struktur einer Mannigfaltigkeit, sondern auch von der Metrik ab.

2.2.9 SATZ. *Sei M^n eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann sind äquivalent:*

- (i) Es existiert ein nullstellenfreies Vektorfeld auf M
- (ii) Entweder M ist nicht kompakt oder M ist kompakt und für die Eulersche Zahl gilt $\chi(M) = 0$
- (iii) Auf M existiert eine Lorentz-Metrik.
- (iv) Auf M existiert eine zeitorientierbare Lorentz-Metrik.

Beweis. (i) \iff (ii) Im kompakten Fall ist dies ein klassisches Resultat (Satz von Hopf): Siehe z.B. [Br93] Korollar VII.14.5. Sei M also eine nicht kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n . Falls M nicht orientierbar ist, können wir M durch eine nicht kompakte, orientierbare Lorentz-Mannigfaltigkeit überlagern; da das Differential der Überlagerungsabbildung ein Isomorphismus ist, können wir auch o.B.d.A. annehmen, daß M orientierbar ist. Dann gilt aufgrund obstruktionstheoretischer Überlegungen, daß auf M ein nullstellenfreies Vektorfeld dann, und nur dann existiert, wenn die Euler-Klasse $\chi_M \in H^n(M, \mathbb{Z})$ verschwindet (siehe z.B. Korollar VII 14.4 in [Br93] oder [MiSt74] Kap.12, insbesondere Theorem 12.5). Dies folgt aber aus dem wohlbekannten Resultat $H^n(M, \mathbb{Z}) = 0$ für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten (siehe z.B. [StZi94], Beispiel 13.6.6).

(i) \implies (iv) Fixiere eine Riemannsche Metrik g auf M . Sei T ein nullstellenfreies Vektorfeld; T sei o.B.d.A. bezüglich g normalisiert. Setze $h := g - T^* \otimes T^*$, wobei T^* das zu T duale Vektorfeld bezeichnet, d.h. $T^*(Z) = g(T, Z)$ für alle $Z \in \mathfrak{X}(M)$. Es existieren lokale Vektorfelder E_2, \dots, E_n so, daß (T, E_2, \dots, E_n) ein orthonormales System bezüglich g bilden. Dann gilt $h(E_i, E_j) = g(E_i, E_j) + g(T, E_i)g(T, E_j) = \delta_j^i$, $h(T, E_j) = g(T, E_j) = 0$, und $h(T, T) = -1$, d.h. h ist eine Lorentz-Metrik mit Zeitorientierung T .

(iv) \implies (i) Man wähle z.B. die Zeitorientierung T .

(iv) \implies (iii) klar.

(iii) \implies (ii) Ist M nicht kompakt, so sind wir fertig. Sei also M kompakt; dann müssen wir $\chi(M) = 0$ zeigen. Ist h zeitorientierbar, so folgt (ii) aus (iv) \implies (i). Andernfalls wird M nach 2.2.7 (iii) von einer zeitorientierbaren Lorentz-Mannigfaltigkeit \tilde{M} zweifach überlagert. Dann ist entweder \tilde{M} nicht kompakt oder es ist $\chi(\tilde{M}) = 0$. Da die Überlagerung zweifach ist, kann \tilde{M} dann und nur dann kompakt sein, wenn M kompakt ist und in diesem Fall gilt $\chi(M) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{M}) = 0$. ■

2.2.10 KOROLLAR 1.

- (i) Jede einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche ist diffeomorph zu \mathbb{R}^2 .
- (ii) Jede kompakte Lorentz-Fläche ist diffeomorph zu einem Torus, d.h. es gilt $S \cong \mathbb{R}^2/\Gamma(a, b)$ für ein Gitter $\Gamma(a, b) := \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zwei linear unabhängige Vektoren sind.

Beweis.

(i) Da \mathbb{R}^2 und S^2 — bis auf Diffeomorphie — die einzigen einfach zusammenhängenden Flächen sind, muß S diffeomorph zu eine von beiden sein. Wäre S kompakt, so gälte nach 2.2.9 $\chi(S) = 0$. Wegen $\chi(S^2) = 2$ (siehe [GuPo74] Kap. 3.4, S. 124) folgt die Behauptung.

(ii) Allgemein gilt für jede kompakte Fläche S die Gleichung $\chi(S) = 2(1 - g)$, wobei g den Genus der Fläche bezeichnet. Wegen $\chi(S) = 0$ muß $g(S) = 1$ sein, d.h. S ist diffeomorph zu einem Torus (siehe [GuPo74] Kap. 3.4, S.124 ff.). ■

2.2.11 KOROLLAR 2 UND DEFINITION (Kurvensatz von Jordan–Brouwer).

Sei \mathcal{L} eine einfach zusammenhängende Lorentz–Fläche. Das Komplement einer Jordankurve, d.h. einer einfachen, geschlossenen, differenzierbaren Kurve α , besteht aus zwei offenen, zusammenhängenden und disjunkten Teilmengen von \mathcal{L} , deren topologischer Rand gleich $|\alpha|$ ist und von denen genau eine einen kompakten Abschluß besitzt. Diese Teilmenge bezeichnen wir mit $\text{Int}(\alpha)$, die andere mit $\text{Ext}(\alpha)$. Insbesondere ist $\overline{\text{Int}(\alpha)}$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial\overline{\text{Int}(\alpha)} = \alpha$.

Beweis. Siehe [GuPo74] Kap. 2.5, S.89 ff.. ■

2.2.12 BEMERKUNGEN. (i) Jede (glatte) Jordankurve ist eine Einbettung des Einheitskreises S^1 .

(ii) Der erste Teil der Aussage bleibt für stetige Kurven richtig (siehe z.B. [Di69], S.261 ff.).

2.3 Isotrope und isothermale Koordinaten auf Lorentz–Flächen

2.3.1 Sei (S, h) eine Lorentz–Fläche. Ist $\chi = (x_1, x_2)$ ein lokales Koordinatensystem auf einer Umgebung U in S , so ist h lokal gegeben durch

$$h = adx_1^2 + 2bdx_1dx_2 + cdx_2^2,$$

wobei a , b und c glatte Funktionen auf U sind. Alternativ mag man sich h lokal durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dargestellt vorstellen, deren Einträge glatt auf U variieren. Dann folgt aus Nicht–Ausgeartetheit und Indefinitheit, daß

$$(D) \quad \det h = ac - b^2 < 0.$$

Umgekehrt definiert ein $(2, 0)$ –Tensor, dessen lokale Matrixdarstellung (D) erfüllt, eine Lorentz–Metrik auf S .

2.3.2 BEISPIELE.

(i) Die *Minkowski-Ebene*: Wir betrachten $S = \mathbb{R}^2 = \{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$ mit der in den globalen Standardkoordinaten (u, v) definierten Lorentz-Metrik $h_0 := -du^2 + dv^2$. h_0 ist die sogenannte *Standard-(Lorentz-)Metrik*. Wir setzen

$$\mathbb{E}^{2,1} := (\{(u, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}, h_0)$$

und erhalten eine Lorentz-Fläche, die sogenannte *Minkowski-Ebene*. Sei nun

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

durch

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) := (u + v, v - u)$$

gegeben. Identifizieren wir \mathbb{R}^2 mit dem Bild $F(\mathbb{R}^2)$, so definiert die Umkehrabbildung von F , die jedem Punkt (x, y) den Punkt (u, v) mit $u = \frac{1}{2}(x - y)$ und $v = \frac{1}{2}(x + y)$ zuweist, eine Karte auf \mathbb{R}^2 , in der sich $h_0 = dxdy$ schreibt. Im folgenden werden wir $\mathbb{E}^{2,1}$ meistens mit dem Bild unter obiger Karte F (für die der Buchstaben F in diesem Kapitel reserviert sei) identifizieren, d.h.

$$\mathbb{E}^{2,1} = (\mathbb{R}^2, [dxdy]).$$

Die Koordinaten (x, y) heißen $([h_0]-)$ *isotrope Koordinaten*. Wie wir weiter unten sehen werden, vereinfacht der Umstand $[-du^2 + dv^2] = [dxdy]$ den Beweis der Existenz isothermaler Koordinaten, der im Riemannschen Fall recht aufwendig zu führen ist (vgl. die Referenzen aus 2.1.6), erheblich.

(ii) Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $h_U = [-du^2 + dv^2]|_U$ definiert eine Lorentz-Fläche $\mathcal{L}_U = (U, h_U)$, die wir generisch als *Minkowski-Flächen* bezeichnen.

(iii) Überlagerungsflächen mit gehobener Metrik: Sei $\mathcal{L} = (S, h)$ eine Lorentz-Fläche, und $k : S^* \rightarrow S$ eine Überlagerung von S . Dann kann die Mannigfaltigkeitsstruktur von S und die Metrik h zu einer Mannigfaltigkeitsstruktur und einer Metrik h^* auf S^* so geliftet werden, daß die Überlagerungsabbildung k zu einer lokalen Isometrie wird (vgl. z.B. [Wo84], Abschnitt 1.8). Wir erhalten damit eine neue Lorentz-Fläche \mathcal{L}_S^* . Die auf diese Art konstruierten Lorentz-Flächen nennen wir *Überlagerungsflächen*.

2.3.3 LEMMA. Sei S eine Fläche, und U eine Umgebung von $p \in S$, auf der zwei linear unabhängige Vektorfelder X und Y gegeben seien. Seien \mathcal{X} bzw. \mathcal{Y} die durch X bzw. Y erzeugten Distributionen. Dann existiert ein Koordinatensystem $\chi = (x, y)$ auf einer Umgebung $V \subset U$ um p so, daß $\frac{\partial}{\partial x}(q) \in \mathcal{X}(q)$ und $\frac{\partial}{\partial y}(q) \in \mathcal{Y}(q)$ für alle $q \in V$. Kurz gesagt sind auf Flächen zwei linear unabhängige Distributionen stets (lokal) integrierbar.

Beweis. Durch eventuelles Ersetzen von Y durch $-Y$ können wir annehmen, daß $(X(q), Y(q))$ eine orientierte Basis in $T_q S$ für $q \in S$ bilden (*). Es genügt zu zeigen, daß eine Umgebung V von p in U und glatte Funktionen $\lambda, \mu > 0$ auf V so existieren, daß

$$(1) \quad [\lambda X, \mu Y] \equiv 0 \text{ auf } V$$

ist (siehe z.B. [Spiv₁79], Kap. 5, Theorem 14). Es gilt:

$$(2) \quad [\lambda X, \mu Y] = \lambda \mu [X, Y] + \lambda X(\mu) Y - \mu Y(\lambda) X$$

Da $T_q S$ zweidimensional ist, können wir $[X, Y] = fX + gY$ mit $f, g \in C^\infty(U)$ schreiben. Dann gilt (1) genau dann, wenn

$$(3) \quad \lambda \mu (fX + gY) = \mu Y(\lambda) X - \lambda X(\mu) Y.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$(4) \quad \lambda f = Y(\lambda) \text{ und } \mu g = -X(\mu),$$

d.h. $[\lambda X, \mu Y] \equiv 0$ ist äquivalent zu (4). Ist $(W, \chi = (u, v))$ ein beliebiges (orientiertes) Koordinatensystem auf einer Umgebung $W \subset U$ von p , so existieren glatte Funktionen α, β, γ und δ auf W mit $X = \alpha \partial_u + \beta \partial_v$ und $Y = \gamma \partial_u + \delta \partial_v$ und $\alpha \delta - \gamma \beta > 0$ (für jedes $q \in W$ sind $(X(q), Y(q))$ und $(\partial_u(q), \partial_v(q))$ orientierte Basen wegen (*), also ist die Determinante der Übergangsmatrix positiv). Weiterhin gilt $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ und $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Schreiben wir (4) in diesem Koordinatensystem, so erhalten wir auf W (beachte, daß $\lambda(u, v), \mu(u, v) > 0$ sein sollen):

$$f = \gamma \frac{\partial_u \lambda}{\lambda} + \delta \frac{\partial_v \lambda}{\lambda} = \gamma \partial_u \tilde{\lambda} + \delta \partial_v \tilde{\lambda}$$

und

$$-g = \alpha \frac{\partial_u \mu}{\mu} + \beta \frac{\partial_v \mu}{\mu} = \alpha \partial_u \tilde{\mu} + \beta \partial_v \tilde{\mu},$$

wobei $\tilde{\lambda} := \ln \lambda$ und $\tilde{\mu} := \ln \mu$. Diese partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\mu}$ besitzen glatte Lösungen auf einer Umgebung $V \subset U$ von p (siehe z.B. [Spiv₅79], Abschnitt 10.1 ff.), so daß $\lambda = \exp \tilde{\lambda}$ und $\mu = \exp(\tilde{\mu})$ die gesuchten Funktionen echt größer Null sind, die (1) erfüllen. ■

2.3.4 DEFINITION. Sei $(M^{p,q}, h)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Wir nennen $v \in TM$

(i) zeitartig, falls $h(v, v) < 0$

(ii) lichtartig oder isotrop, falls $v \neq 0$ und $h(v, v) = 0$

(iii) raumartig, falls $v = 0$ oder $h(v, v) > 0$.

Diese Einteilung heißt auch kausaler Charakter von v . Ist v zeit- oder lichtartig, so nennt man v auch kausalen Vektor oder kurz kausal. Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S)$ heißt zeit-, licht- bzw. raumartig, falls $X(p)$ zeit-, licht-, oder raumartig für alle p aus S ist.

2.3.5 BEMERKUNG. Offenbar ist der kausale Charakter eine konforme Invariante, d.h. er hängt nur von $[h]$ ab. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung (siehe 2.3.13): Der kausale Charakter legt die konforme Klasse eindeutig fest.

2.3.6 KOROLLAR. Auf jeder Lorentz-Fläche existieren stets lokale Koordinatensysteme (u, v) mit ∂_u zeit- und ∂_v raumartig.

Beweis. Dies folgt direkt aus der lokalen Existenz orthonormaler Basen und Lemma 2.3.3. ■

Wir fragen nun nach (glatten) Lösungen der Gleichung $h(X, X) = 0$, wobei X ein (evtl. lediglich lokal definiertes) Vektorfeld auf S ist.

2.3.7 LEMMA. Sei $(U, \chi = (u, v))$ ein lokales Koordinatensystem mit $\frac{\partial}{\partial u}$ zeit- und $\frac{\partial}{\partial v}$ raumartig und seien a, b , und c die lokalen Koeffizienten von h bezüglich χ . Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(U)$ ist genau dann isotrop, wenn

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial u} + x_2 \frac{\partial}{\partial v} \text{ mit } x_1 \cdot x_2 \neq 0 \text{ und } \frac{x_2}{x_1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$$

gilt (beachte, daß $b^2 - ac > 0$ gemäß (D) in 2.3.1 ist).

Beweis. X ist lichtartig auf U genau dann, wenn $X(p) \neq 0$ für alle $p \in U$ und

$$h(X, X) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 \equiv 0.$$

Wegen $a = h(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) < 0$ und $c = h(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}) > 0$ sind $x_1, x_2 \neq 0$. Somit ist dies äquivalent zu $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ und $c \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 2b\frac{x_2}{x_1} + a = 0$, d.h. $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ und $\frac{x_2}{x_1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c}$. ■

2.3.8 BEMERKUNG. Wir erhalten also in jedem Tangentialraum $T_p S$ für $p \in S$ zwei linear unabhängige, eindimensionale Lösungsräume der Gleichung $h_p(v, v) = 0$. Man kann somit lokal stets zwei linear unabhängige Nullvektorfelder X und Y so wählen, daß (X, Y) eine orientierte Basis bildet und $X + Y$ raumartig ist. Die durch $X(p)$ und $Y(p)$ in $T_p S$ aufgespannten Räume bezeichnen wir mit $\mathcal{X}(p)$ und $\mathcal{Y}(p)$ und erhalten dadurch zwei (globale) Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} ; man überzeugt sich leicht davon, daß diese Definition unabhängig von den gewählten Vertretern und die Einteilung in

eine \mathcal{X} - bzw. \mathcal{Y} -Distribution daher eindeutig ist. Geometrisch ausgedrückt besagt die algebraische Bedingung der Raumartigkeit der Summe beider Vektoren, daß $\mathcal{Y}(p)$ denjenigen Nullraum bezeichnet, dessen Vektoren durch infinitesimale Drehung in positive Richtung — bezüglich der gegebenen Orientierung — zeitartig werden (siehe Fig. 1). Offenbar sind die eben definierten Distributionen ebenfalls konforme Invarianten, d.h. unabhängig vom speziellen Repräsentanten $\tilde{h} \in [h]$.

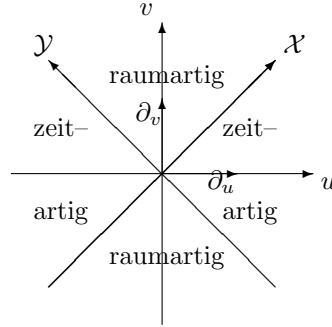


Fig. 1

2.3.9 THEOREM UND DEFINITION. Sei $p \in S$. Dann existiert ein Koordinatensystem $(U, \chi = (x, y))$ um p , in dem sich $h = B dx dy$ mit $B \in C^\infty(U)$ und $B > 0$ schreiben läßt gilt. Ein solches Koordinatensystem nennen wir auch $(h-$ bzw. $[h]-)$ isotrop. Insbesondere existiert ein Atlas aus $(h-$ bzw. $[h]-)$ isotropen Karten, den wir mit \mathfrak{A}_h^0 bzw. mit $\mathfrak{A}_{[h]}^0$ bezeichnen. Karten aus \mathfrak{A}_h^0 bzw. $\mathfrak{A}_{[h]}^0$, deren Bild ihres Definitionsbereiches ein Rechteck der Form $(a, b) \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $-\infty \leq c < d \leq +\infty$ ist, nennen wir Rechteckkarten. Die Bilder bzw. Definitionsbereiche von Rechteckkarten nennen wir Rechtecke in \mathbb{R}^2 bzw. in S .

Beweis. Gemäß 2.3.7 und 2.3.8 werden die Tangentialräume lokal durch zwei lichtartige Vektorfelder aufgespannt, die nach 2.3.3 ein lokal definiertes Koordinatensystem (x, y) induzieren. Da die lokalen Koeffizienten von h durch $a = h(\partial_x, \partial_x)$ und $c = h(\partial_y, \partial_y)$ gegeben und ∂_x und ∂_y lichtartig sind, besitzt h bezüglich (x, y) die Darstellung $h = 2b dx dy$. Gemäß unserer Bezeichnungskonvention ist $\partial_x + \partial_y$ raumartig, also folgt $h(\partial_x + \partial_y, \partial_x + \partial_y) = 2h(\partial_x, \partial_y) = 2b > 0$. ■

2.3.10 KOROLLAR 1. Um jeden Punkt p aus S existieren Karten $(U, \chi = (u, v))$ so, daß wir $h = B(-du^2 + dv^2)$ mit $B \in C^\infty(U)$ und $B > 0$ schreiben können. Lokal existieren also stets isothermale Koordinaten. Insbesondere existiert ein Atlas aus $(h-$ bzw. $[h]-)$ isothermalen Karten, den wir mit \mathfrak{A}_h bzw. mit $\mathfrak{A}_{[h]}$ bezeichnen werden.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus 2.3.2 (i) durch Komposition von isotropen Koordinaten mit F^{-1} . ■

2.3.11 BEMERKUNG. Insbesondere haben wir die Beziehung $F(\mathfrak{A}_{[h]}) = \mathfrak{A}_{[h]}^0$ bzw. $F^{-1}(\mathfrak{A}_{[h]}^0) = \mathfrak{A}_{[h]}$. Ist z.B. η ein isothermales Koordinatensystem aus $\mathfrak{A}_{[h]}$, so ist $[h]$ in den durch $F \circ \eta$ lokal definierten Koordinaten gegeben durch

$$[(F \circ \eta)^*(dxdy)] = [\eta^* \circ F^*(dxdy)] = [\eta^*(-du^2 + dv^2)] = [h],$$

d.h. $F \circ \eta$ ist ein isotropes Koordinatensystem.

2.3.12 KOROLLAR 2. *Jede Lorentz-Fläche ist lokal konform äquivalent zu einer Minkowski-Fläche. Man sagt auch, daß Lorentz-Flächen (lokal) konform flach sind.*

2.3.13 KOROLLAR 3. *$h \sim \tilde{h}$ genau dann, wenn h und \tilde{h} auf TS den gleichen kausalen Charakter induzieren.*

Beweis. \implies) klar.

\impliedby) Wir wählen ein isothermales Koordinatensystem $(U, \chi = (u, v))$, d.h. es gilt $h = B(-du^2 + dv^2)$. Nach Voraussetzung ist dann ein Vektorfeld Z auf U mit $Z = z_1\partial_u + z_2\partial_v \neq 0$ lichtartig für h , d.h. $h(Z, Z) = B(-z_1^2 + z_2^2) \equiv 0$, genau dann, wenn Z lichtartig für \tilde{h} ist, d.h. $\tilde{h}(Z, Z) = \tilde{a}z_1^2 + 2\tilde{b}z_1z_2 + \tilde{c}z_2^2 \equiv 0$, wobei \tilde{a} , \tilde{b} und \tilde{c} die lokalen Koeffizienten von \tilde{h} bezüglich χ sind. Einsetzen von $Z^\pm = z_1\partial_u \pm z_2\partial_v$ ergibt nun:

$$\tilde{a} + 2\tilde{b} + \tilde{c} \equiv 0$$

und

$$\tilde{a} - 2\tilde{b} + \tilde{c} \equiv 0,$$

somit also $\tilde{b} \equiv 0$ und $\tilde{a} \equiv -\tilde{c}$. Nun ist

$$\text{sgn}(\tilde{c}) = \text{sgn}(\tilde{h}(\partial_v, \partial_v)) = \text{sgn}(h(\partial_v, \partial_v)) \equiv 1,$$

da h und \tilde{h} denselben kausalen Charakter induzieren. Wir erhalten $\tilde{h} = \frac{\tilde{c}}{B}h$ auf U mit $\frac{\tilde{c}}{B} > 0$ (*). Wir überdecken nun S mit einer Familie $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von isothermalen Koordinatensystemen für h , und wählen eine zu \mathfrak{U} untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Seien $\lambda_\alpha > 0$ die wegen (*) existierenden Funktionen mit $\tilde{h} = \lambda_\alpha h$ auf U_α . Definiere dann $\lambda = \sum_\alpha \phi_\alpha \lambda_\alpha$. Dann ist $\lambda \in C^\infty(S)$, $\lambda > 0$ und $\tilde{h} = \lambda h$, denn

$$\lambda(p)h(p) = \sum_{\substack{i=1, \\ p \in \text{supp}(\phi_i) \subset U_i}}^n \phi_i(p)\lambda_i(p)h(p) = \sum_{i=1}^n \phi_i(p)\tilde{h}(p) = \tilde{h}(p)$$

für alle $p \in S$. ■

2.3.14 BEMERKUNGEN. (i) Im Falle von Lorentz-Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 3 kann man sogar zeigen, daß bereits der Lichtkegel, d.h. die Menge aller lichtartigen Vektoren, die Äquivalenzklasse eindeutig festlegt (siehe z.B. [BeEhEa96], Theorem 2.3). Für $n = 2$ legt der Lichtkegel lediglich die konforme Klasse bis auf Vorzeichen fest, d.h. $[h]$ und $[-h]$ induzieren denselben Lichtkegel. Daß hier mehr Information benötigt wird, liegt an der speziellen Symmetrie im zweidimensionalen Fall: Ist h eine Lorentz-Metrik, so auch $-h$; somit unterscheiden sich Lorentz-Flächen der Schnittkrümmung $K > 0$ von Lorentz-Flächen der Schnittkrümmung $K < 0$ nur im kausalen Charakter (siehe [O’N83], S.152), wohingegen der Uniformisationssatz für Riemannschen Flächen zeigt, daß hier die Geometrie sehr wohl von dem Vorzeichen der Schnittkrümmung abhängt.

(ii) Sind auf einer orientierten Fläche zwei glatte, eindimensionale und linear unabhängige Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} vorgegeben, kann man dem durch $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ definierten Lichtkegel allerdings eindeutig eine konforme Klasse durch die Forderung zuordnen, daß je zwei Repräsentanten (X, Y) aus $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ eine orientierte Basis aufspannen und $X + Y$ raumartig sein soll (vgl. auch 2.3.8). In diesem Sinne folgt also

2.3.15 KOROLLAR 4. *Auf einer orientierten Fläche S ist die Vorgabe zweier glatter, eindimensionaler, linear unabhängiger Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} äquivalent zur Vorgabe einer konformen Klasse von Lorentz-Metriken $[h]$ (vgl. auch Bemerkung 2.6.26 bezüglich der durch \mathcal{X} und \mathcal{Y} induzierten parakomplexen Struktur auf S).*

2.3.16 KOROLLAR 5. *Sei $p \in S$. Dann existiert eine Karte $(U_p, \chi_p = (u, v))$ um p und eine Lorentz-Metrik $h_p \in [h]$ mit $h_p|_{U_p} = -du^2 + dv^2$.*

Beweis. Sei $p \in S$ fixiert. Sei $(V, \chi = (u, v))$ ein isothermales Koordinatensystem für h um p , d.h.

$$(*) \quad h = B(-du^2 + dv^2) \text{ mit } B \in C^\infty(V) \text{ und } B > 0.$$

Sei $K \subset V$ kompakt und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Plateaufunktion mit $f|_{U_p} \equiv 1$ für eine offene Umgebung $U_p \subset K$ von p , und $f|_{K^c} \equiv 0$. Dann ist $fB \in C^\infty(S)$. Wir definieren

$$\lambda := 1 + f(B - 1).$$

Da $1 \geq f \geq 0$, gilt $\lambda > 0$ genau dann, wenn $B > 0$, was wegen $(*)$ erfüllt ist. Also ist λ ein konformer Faktor. Setze $h_p := \frac{1}{\lambda}h \in [h]$. Auf U gilt dann $\lambda = 1 + B - 1 = B$, also ist $h_p|_U = \frac{1}{B}h|_U = -du^2 + dv^2$. ■

2.3.17 BEMERKUNG. Sei (S, h) eine zeitorientierbare Lorentz-Fläche mit Zeitorientierung T . Die Mengen $\mathcal{C}^+(T)_p = \{v \in T_p S \mid v \text{ kausal und } h_p(v, T(p)) \leq 0\}$ bzw. $\mathcal{C}^-(T)_p = \{v \in T_p S \mid v \text{ kausal und } h_p(v, T(p)) \geq 0\}$ heißen *zukunftsgerichteter* bzw. *vergangenheitsgerichteter kausaler Kegel*. Eine glatte, kausale Kurve α heißt daher *zukunftsgerichtet* bzw. *vergangenheitsgerichtet*, falls die Tangentialvektoren $\alpha'(t)$ aus $\mathcal{C}^+(T)_{\alpha(t)}$ bzw. $\mathcal{C}^-(T)_{\alpha(t)}$ sind. Sind X und Y wieder lokale, glatte Darstellungen der Null-Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , so sind $X(p), Y(p) \in \mathcal{C}(T)_p := \mathcal{C}^+(T)_p \cup \mathcal{C}^-(T)_p$ für alle p aus S . Somit induziert die Zeitorientierung eine Orientierung auf den Unterräumen $\mathcal{X}(p)$ und $\mathcal{Y}(p)$ durch die Forderung, daß die Flüsse positiv orientierter X - bzw. Y -Vektorfelder vergangenheitsgerichtet bzw. zukunftsgerichtet sein sollen (insbesondere bildet für vergangenheitsgerichtetes $X(p) \in \mathcal{X}$ und zukunftsgerichtetes $Y(p) \in \mathcal{Y}$ das Paar $(X(p), Y(p))$ eine orientierte Basis für $T_p S$, siehe Fig. 2)). Diese Konvention induziert daher auch einen natürlichen Durchlaufsinne aller X - bzw. Y -Kurven. In diesem Sinne sprechen wir auch von der *natürlichen Orientierung* der Nullkurven, die wir auf zeitorientierten Lorentz-Flächen stets betrachten wollen. Insbesondere zerfällt dann jeder zu h assoziierte isotrope Atlas in zwei disjunkte Unteratlanten, nämlich in

$$\mathfrak{A}_h^{0+} := \{(U, \chi = (x, y) \in \mathfrak{A}_h^0 \mid \partial_x \text{ vergangenheits-}, \partial_y \text{ zukunftsgerichtet}\}$$

und

$$\mathfrak{A}_h^{0-} := \{(U, \chi = (x, y) \in \mathfrak{A}_h^0 \mid \partial_x \text{ zukunfts-}, \partial_y \text{ vergangenheitsgerichtet}\}.$$

Ist die betrachtete Lorentz-Fläche \mathcal{L} zeitorientiert, so wollen wir als Atlas auf \mathcal{L} stets \mathfrak{A}_h^+ betrachten.

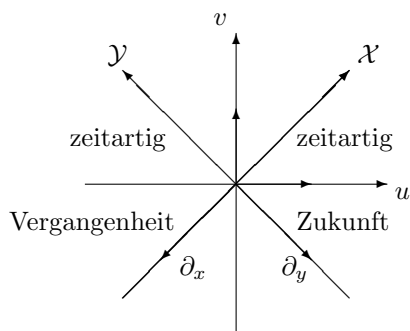


Fig. 2

2.4 Konforme Invarianz von Vollständigkeitsbegriffen pseudoriemannscher Mannigfaltigkeiten

2.4.1 Geodäten, Vollständigkeitsbegriffe und Krümmung einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit

Für die folgende Diskussion von Vollständigkeitsbegriffen auf pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten und für spätere Verwendung im 2. Kapitel seien einige allgemeine Definitionen und Formeln wiederholt.

Wir betrachten zuerst wieder eine allgemeine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$ und den durch g induzierten Levi-Civita-Zusammenhang $\nabla^{LC} = \nabla$, d.h. die durch die Koszul-Formel

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, Z) &= V(g(W, Z)) + W(g(Z, V)) - Z(g(V, W)) \\ &\quad -g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, V]) + g(Z, [V, W]) \end{aligned}$$

definierte, torsionsfreie und metrische kovariante Ableitung auf M . Insbesondere können wir dann für jede Kurve α die von ∇ induzierte kovariante Ableitung entlang α bilden, die wir $\frac{\nabla^\alpha}{dt}$ schreiben (siehe [O'N83] Satz 3.18), und mit der wir Vektorfelder, die entlang α definiert sind, ableiten können. Geodäten sind diejenigen Kurven γ mit $\frac{\nabla^\gamma}{dt} \gamma' = 0$. Fixieren wir ein lokales Koordinatensystem (x_1, \dots, x_n) auf einer Umgebung U von M , so sind die Christoffel-Symbole Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, \dots, n$ bezüglich (x_1, \dots, x_n) die Funktionen aus $C^\infty(U)$, die durch

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

gegeben werden. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ ist genau dann eine Geodäte, falls für jedes Koordinatensystem (x_1, \dots, x_n) die Koordinatenfunktionen $x^k \circ \gamma$, $k = 1, \dots, n$, folgende Gleichung erfüllen:

$$(G) \quad \frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0.$$

Speziell für Lorentz-Flächen folgt nun der

2.4.1 SATZ. Sei (x_1, x_2) ein lokales Koordinatensystem, $h = adx_1^2 + 2bdx_1dx_2 + cdx_2^2$ und $D = ac - b^2$. Dann gilt:

(i) Die Christoffel-Symbole werden gegeben durch

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial_1 a & b \\ \partial_1 b - \frac{1}{2}\partial_2 a & c \end{pmatrix}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}\partial_1 a \\ b & \partial_1 b - \frac{1}{2}\partial_2 a \end{pmatrix} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial_2 a & b \\ \frac{1}{2}\partial_1 c & c \end{pmatrix}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}\partial_2 a \\ b & \frac{1}{2}\partial_1 c \end{pmatrix} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} \partial_2 b - \frac{1}{2}\partial_1 c & b \\ \frac{1}{2}\partial_2 c & c \end{pmatrix}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{D} \det \begin{pmatrix} a & \partial_2 b - \frac{1}{2}\partial_1 c \\ b & \frac{1}{2}\partial_2 c \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Speziell folgt für ein Nullkoordinatensystem $h = 2bdx_1dx_2$:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{b}\partial_1 b, \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0, \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{b}\partial_2 b$$

(ii) Die Geodäten-Gleichungen sind

$$x_1'' + \Gamma_{11}^1 x_1'^2 + 2\Gamma_{12}^1 x_1'x_2' + \Gamma_{22}^1 x_2'^2 = 0 \text{ und } x_2'' + \Gamma_{11}^2 x_1'^2 + 2\Gamma_{12}^2 x_1'x_2' + \Gamma_{22}^2 x_2'^2 = 0$$

Speziell folgt für ein Nullkoordinatensystem $h = 2bdx_1dx_2$:

$$x_1'' + \frac{\partial_1 b}{b} x_1'^2 = 0 \text{ und } x_2'' + \frac{\partial_2 b}{b} x_2'^2 = 0$$

Beweis. Siehe [O'N83] S.80 ff. ■

2.4.2 BEMERKUNGEN. (i) Eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ heißt Prägeodäte, falls sie zu einer Geodäte umparametrisiert werden kann. Dann gilt: Jede Nullkurve einer Lorentz-Fläche ist eine Prägeodäte. Beweisskizze: Sei α eine Nullkurve. Aus $h(\alpha', \alpha') = 0$ folgt durch Differenzieren $h(\alpha'', \alpha') = 0$. Für eine Lorentz-Fläche ist allerdings $(\alpha')^\perp$ eindimensional (sonst wäre $h \equiv 0$), und α' und α'' müssen kollinear sein, woraus mit Aufgabe 3.19 aus [O'N83] die Behauptung folgt.

Weiterhin gilt: Lichtartige Prägeodäten sind eine konforme Invariante (vgl. auch Lemma 9.17 in [BeEhEa96]).

(ii) Da γ' ein paralleles Vektorfeld entlang γ definiert, bestimmt der kausale Charakter von γ' in einem Punkt den kausalen Charakter der gesamten Geodäte. Daher ist es sinnvoll, von zeit-, licht-, und raumartigen Geodäten zu sprechen.

2.4.3 DEFINITION

(i) Eine Geodäte $\gamma : I \rightarrow M^{p,q}$ heißt erweiterbar, falls eine Geodäte $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \rightarrow M^{p,q}$ mit $I \subsetneq \tilde{I}$ und $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$ existiert.

(ii) Eine nicht erweiterbare Geodäte $\gamma : I \rightarrow M^{p,q}$ ist vollständig, falls $I = \mathbb{R}$. Ist jede Geodäte einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$ vollständig, so nennt man M (geodätisch) vollständig. Analog gilt für eine zeit-, licht- und raumartig vollständige pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, daß jede zeit-, licht- oder raumartige Geodäte vollständig ist.

2.4.4 BEMERKUNG. Alle drei kausale Vollständigkeitsbegriffe sind im allgemeinen logisch unabhängig: Siehe z.B. Theorem 5.4 in [BeEhEa96], wo ein auf Geroch aus [Ge68] zurückgehendes (nicht kompaktes) Beispiel besprochen wird. Auf lokalsymmetrischen Lorentz-Mannigfaltigkeiten (kompakt oder nicht kompakt) sind jedoch alle Vollständigkeitsbegriffe äquivalent (siehe [Ll88]). Auch scheinen bis jetzt noch keine Beispiele für logische Unabhängigkeit auf kompakten pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten gefunden worden zu sein (vgl. die Einleitung in [Sá97]).

Geodäten und die darauf basierenden Vollständigkeitsbegriffe spielen eine wichtige Rolle in der allgemeinen Relativitätstheorie. So sind vor allem chronologische bzw. kausale Raum-Zeiten Gegenstand des Interesses, d.h. zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeiten ohne geschlossene zeitartige bzw. kausale Kurven. Kausalitätsbedingungen an die Mannigfaltigkeiten ergeben sich aus physikalischen Gesichtspunkten: Man möchte chronologische Paradoxien ausschließen, die sich aus dem Bewegen entlang einer geschlossenen kausalen Kurve ergeben — so könnte ein Beobachter, der entlang einer solchen Kurve reist, vor seiner Abfahrt wieder ankommen¹. Mit Hilfe kausalitätstheoretischer Methoden lassen sich aber auch viele geometrische Eigenschaften von Lorentz-Mannigfaltigkeiten zeigen: So bewies z.B. Galloway in [Ga86] mittels solcher Überlegungen, daß jede kompakte Lorentzfläche eine geschlossene, kausale Geodäte aufweisen muß (in der Riemannschen Geometrie ist es eine wohlbekanntere Tatsache, daß jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit eine geschlossene Geodäte besitzt — siehe z.B. Theorem 2.1.3 und 2.1.6 in [Kl78]). Die im fünften Abschnitt noch zu beweisenden Aussagen über Nulllinien können ebenfalls mit kausalitätstheoretischen Argumenten hergeleitet werden (für einige wichtige, elementare Definitionen aus der Kausalitätstheorie siehe z.B. [We96] S.33 ff. und die dort zitierten Referenzen).

2.4.5 DEFINITION

(i) Das $(3, 1)$ -Tensorfeld $\mathfrak{R}^\nabla \in \mathfrak{T}^{(3,1)}(M)$ definiert durch

$$\mathfrak{R}^\nabla(V, W)Z := \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V, W]} Z$$

¹Da jede kompakte Lorentz-Mannigfaltigkeit eine geschlossene kausale Kurve besitzt, wurden kompakte Raumzeiten, zumindest in der Physik, nicht weiter untersucht. Allerdings sind die zu stellenden Kausalitätsbedingungen unter Physikern nicht unumstritten, und alternative kosmologische Modelle lassen auch kompakte Raum-Zeiten zu, siehe z.B. die Arbeiten [Yu90] und [Yu91], in der unter anderem auch kompakte Lorentz-Flächen untersucht werden.

heißt Krümmung, der daraus resultierende $(4, 0)$ – Tensor \mathfrak{R} definiert durch

$$\mathfrak{R}(V, W, U, Z) := g(\mathfrak{R}^\nabla(V, W)U, Z)$$

wird als Riemannscher Krümmungstensor bezeichnet.

- (ii) Sei für $x \in M$ der zweidimensionale Unterraum $E \subset T_x M$ nicht ausgeartet und (v, w) eine Basis von E . Dann ist $Q(v, w) := g_x(v, v)g_x(w, w) - g_x(v, w)^2 \neq 0$. Wir definieren die Schnittkrümmung von (M, g) in $x \in M$ in Richtung E durch

$$K_E(x) := \frac{\mathfrak{R}_x(v, w, w, v)}{Q(v, w)}.$$

2.4.6 BEMERKUNG. Man rechnet nach, daß die Schnittkrümmung unabhängig von der Wahl der Basis (v, w) ist. Man kann weiter zeigen, daß die Kenntnis der Schnittkrümmung in alle Richtungen den Krümmungstensor eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $K_E = 0$ für alle Richtungen genau dann, wenn $\mathfrak{R} = 0$ gilt. In diesem Fall heißt $M^{p,q}$ flach. Intuitiv beschreiben Krümmungsbegriffe die Abweichung der Geometrie auf $(M^{p,q}, g)$ von der Geometrie des $(\mathbb{R}^{p,q}, g_{p,q})$:

2.4.7 SATZ. $(M^{p,q}, g)$ ist eine zusammenhängende, geodätisch vollständige, pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit mit $K_E = 0$ genau dann, wenn $M^{p,q}$ isometrisch zu einem Quotienten $(\mathbb{R}^{p,q}/\Gamma, \tilde{g}_{p,q})$ ist (wobei Γ eine frei und eigentlich diskontinuierlich wirkende diskrete Untergruppe von $Isom(\mathbb{R}^{p,q}, g_{p,q})$ und $\tilde{g}_{p,q}$ die von $\mathbb{R}^{p,q}$ auf den Quotienten induzierte Metrik ist). Insbesondere ist dann $(M^{p,q}, g)$ lokal isometrisch zu $(\mathbb{R}^{p,q}, g_{p,q})$.

Beweis. Für einen Beweis dieses Satzes (und weiterer Klassifikationsaussagen für Räume mit konstanter Schnittkrümmung) siehe 2.4.9 in [Wo84]. ■

Durch Spurbildung gewinnt man weitere Krümmungsbegriffe:

2.4.8 DEFINITION. Sei $s = (s_1, \dots, s_{p+q})$ eine lokale, orthonormale Basis von $(M^{p,q}, g)$. Das $(0, 2)$ – Tensorfeld $Ric \in \mathfrak{T}^{(0,2)}(M)$ definiert durch

$$\begin{aligned} Ric(V, W)(x) &:= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathfrak{R}_x(V(x), s_i(x), s_i(x), W(x)) \\ &= Tr_{g_x}(\mathfrak{R}^\nabla(\cdot, V(x))W(x)) \end{aligned}$$

heißt Ricci-Krümmung. Erneutes Kontrahieren ergibt eine Funktion $R \in C^\infty(M)$, die sogenannte Skalarkrümmung:

$$R = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \mathfrak{R}_x(s_j(x), s_i(x), s_i(x), s_j(x)) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j Ric_x(e_j, e_j) = Tr_{g_x}(Ric_x).$$

2.4.9 BEMERKUNGEN. (i) Beide Definitionen sind unabhängig von der fixierten Basis s .

(ii) Es gilt

$$R(x) = 2 \sum_{i < j} K_{E_{ij}}(x),$$

wobei $E_{ij} = \text{span}(e_i, e_j)$.

(iii) Die Skalarkrümmung wird uns wieder in der Weitzenböck-Formel für Dirac-Operatoren begegnen (siehe 3.3.2).

Wir betrachten nun wieder eine Lorentz-Fläche (S, h) .

2.4.10 LEMMA.

(i) $R_x = 2\mathfrak{R}(s_1, s_2, s_1, s_2)_x$ für jede orthonormale Basis (s_1, s_2) .

(ii) $R = 0 \iff K = 0 \iff \mathfrak{R} = 0$.

(iii) $Ric(v, v) = 0$ für alle Nullvektoren v .

Beweis. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} R &= -Ric(s_1, s_1) + Ric(s_2, s_2) \\ &= \mathfrak{R}(s_1, s_1, s_1, s_1) - \mathfrak{R}(s_1, s_2, s_2, s_1) - \mathfrak{R}(s_2, s_1, s_1, s_2) + \mathfrak{R}(s_2, s_2, s_2, s_2), \end{aligned}$$

woraus aus den Symmetrie-Identitäten für \mathfrak{R} die Gleichung $R = 2\mathfrak{R}(s_1, s_2, s_1, s_2)$ folgt. (ii) ist eine direkte Konsequenz aus (i). Für (iii) können wir wegen der Bilinearität von Ric annehmen, daß $v = s_1 \pm s_2$ für eine lokale orthonormale Basis $s = (s_1, \dots, s_n)$ ist. Betrachten wir z.B. $v = s_1 + s_2$. Einsetzen in die Definition ergibt

$$\begin{aligned} Ric(v, v) &= -\mathfrak{R}(s_1 + s_2, s_1, s_1, s_1 + s_2) + \mathfrak{R}(s_1 + s_2, s_2, s_2, s_1 + s_2) \\ &= -\mathfrak{R}(s_2, s_1, s_1, s_2) + \mathfrak{R}(s_1, s_2, s_2, s_1) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. ■

Für beliebige Koordinatensysteme (x_1, x_2) sind allgemeine Formeln für R kompliziert (siehe [We96] §2.3). Wir betrachten daher folgende Spezialfälle:

2.4.11 SATZ.

(i) Sei (u, v) ein orthogonales Koordinatensystem, d.h. $h = -a^2 du^2 + c^2 dv^2$ für zwei lokal definierte, nullstellenfreie Funktionen a und c . Dann gilt für die Schnittkrümmung:

$$K = \frac{1}{ac} \left[\partial_u \left(\frac{\partial_u c}{a} \right) - \partial_v \left(\frac{\partial_v a}{c} \right) \right]$$

(ii) Sei (x, y) ein isotropes Koordinatensystem, d.h. $h = 2b dx dy$ mit $b > 0$. Dann gilt für die Schnittkrümmung:

$$K = \frac{1}{b} \partial_x \partial_y \ln b$$

Beweis. Siehe [O'N83] Satz 3.44 bzw. [We96] §2.3, wo weitere Spezialfälle behandelt werden. ■

2.4.12 KOROLLAR. Um einen Punkt $p \in S$ existieren lokale Koordinaten (x, y) mit $h = dx dy$ genau dann, wenn K auf einer Umgebung von p identisch null ist.

Beweis. Nur die Rückrichtung muß bewiesen werden.

Seien (x, y) isotrope Koordinaten auf U um p , d.h. $h|_U = 2b dx dy$ mit $b > 0$. Wegen 2.4.11 (ii) gilt $\partial_x \partial_y \ln b = 0$, d.h. $b = C(x)D(y)$ für zwei glatte Funktionen $C, D \in C^\infty(U)$. Wir definieren $f(x, y) = (\tilde{x}(x, y), \tilde{y}(x, y)) = (\int C(x) dx, \int D(y) dy)$. Weil $Df_{(x,y)} = C(x)D(y) = b(x, y) > 0$, def. (\tilde{x}, \tilde{y}) ein neues, orientiertes Koordinatensystem mit $d\tilde{x} = C(x)dx$ und $d\tilde{y} = D(y)dy$. Für dieses gilt $h|_U = d\tilde{x}d\tilde{y}$. ■

2.4.2 Vollständigkeit als konforme Invariante. Konforme Flachheit

Uns interessiert nun die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die obigen Vollständigkeitsbegriffe eine konforme Invariante sein können. Dabei wird sich zeigen, daß ein Zusammenhang zwischen (i) Vollständigkeit und (ii) global konformer Flachheit besteht. Die hieraus folgenden Kriterien für konforme Flachheit werden wir für die spingeometrische Untersuchungen wieder aufgreifen.

Zunächst betrachten wir den Riemannschen Fall. Hier steht uns lediglich der Begriff der geodätischen Vollständigkeit zur Verfügung, für den die Antwort auf unsere Frage vollständig bekannt ist:

Ein wohlbekanntes Resultat aus der Riemannschen Geometrie ist der Satz von Hopf und Rinow (siehe beispielsweise [KoNo63], Theorem IV.4.1): Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit M^n ist geodätisch vollständig genau dann, wenn M^n ein vollständiger, metrischer Raum bezüglich der geodätischen Distanzfunktion

$$d(x, y) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : I \rightarrow M^n \text{ ist stückweiser } C^1\text{-Weg von } x \text{ nach } y\}$$

(mit $L(\gamma) = \int_I \sqrt{g(\gamma', \gamma')} dt$). Als Korollar folgt, daß jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit vollständig und somit Vollständigkeit trivialerweise eine konforme Invariante ist. Weiterhin zeigten Nomizu und Ozeki in [NoOz61] für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten, daß jede Riemannsche Metrik g jeweils konform äquivalent zu einer vollständigen wie zu einer unvollständigen Riemannschen Metrik \tilde{g} ist.

Im pseudoriemannschen Fall existiert kein adäquates Pendant zum Satz von Hopf und Rinow, denn es ist a priori unklar, wie man einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit eine "geodätische Distanz" kanonisch zuordnen soll. Ein gewisses Äquivalent stellt für Lorentz-Mannigfaltigkeiten die Lorentz-Längenfunktion für kausale Kurven $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{-g(\gamma', \gamma')} dt$ dar. Man kann dann eine "Distanzfunktion" $d(x, y)$ durch das Bilden des Supremums über alle x und y verbindenden, kausalen Kurven definieren. Das so gewählte d braucht aber weder endlich, noch symmetrisch zu sein. Auch der Fall $d(p, q) = 0$ für $p \neq q$ kann auftreten (siehe [BeEhEa96], Abschnitt 4.1). Weiterhin existieren kompakte Lorentz-Mannigfaltigkeiten, die nicht vollständig sind:

2.4.13 BEISPIELE.

(i) Der Clifton-Pohl-Torus (vgl. [O'N83], Beispiel 7.16)

Sei

$$M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad h_{(x,y)} = \frac{2dx dy}{x^2 + y^2}.$$

Skalarmultiplikation mit $c \neq 0$ ist eine Isometrie von (M, h) , z.B. $\mu(x, y) = (2x, 2y)$. Die von μ erzeugte Gruppe $\Gamma = \{\mu^n\}$ wirkt frei und eigentlich diskontinuierlich auf M , und somit definiert $T = M/\Gamma$ bezüglich der von M induzierten Lorentz-Metrik eine (kompakte) Lorentz-Fläche, der sogenannte Clifton-Pohl-Torus. Aber T ist nicht vollständig: Da T lokal-isometrisch zu M ist, reicht es zu zeigen, daß M nicht vollständig ist. Aus den obigen Geodäten-Gleichungen folgt

$$x'' = \frac{2x}{x^2 + y^2} (x')^2 \quad \text{und} \quad y'' = \frac{2y}{x^2 + y^2} (y')^2,$$

woraus man ableitet, daß die Kurve $\alpha(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right)$ zwar eine Geodäte ist, die für $-\infty < t < 1$ definiert werden kann, aber die gesamte positive x -Achse ausfüllt und daher nicht fortsetzbar ist.

(ii) Wir betrachten folgendes Beispiel aus [RoSá93]: Sei $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, und betrachten wir die durch

$$h_{(x,y)}^\tau = dx \otimes dy + dy \otimes dx - 2\tau(x) dy^2$$

definierte Lorentz-Metrik auf \mathbb{R}^2 . Existiert ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\tau(a) = 0$ und $\tau'(a) \neq 0$, so ist (\mathbb{R}^2, h^τ) unvollständig: Berechnen wir zuerst die Christoffel-Symbole nach 2.4.1 (i), so finden wir $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = 0$, $\Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{12}^1 = \tau'$ und $\Gamma_{22}^1 = -\tau\tau'$. Also folgen aus 2.4.1 (ii) die Geodäten-Gleichungen

$$x'' - 2\tau'(x)x'y' - \tau(x)\tau'(x)y$$

und

$$y'' - \tau'(x)y'^2 = 0.$$

Dann ist $\gamma(t) = (a, \tau'(a) \log(t + \frac{1}{\tau'(a)}))$ eine Geodäte durch $(a, -\tau'(a) \log(\tau'(a)))$, die offenbar unvollständig ist, da die zweite Komponente für $t \rightarrow -\frac{1}{\tau'(a)}$ divergiert (vgl. [O'N83], Lemma 5.8; siehe auch [RoSá93], Abschnitt I für weitere Kriterien zur Fortsetzbarkeit von Geodäten). Ist τ zusätzlich periodisch, so können wir h^τ auf Zylinder und Tori projizieren und erhalten so auch Beispiele für unvollständige Lorentz-Zylinder und -Tori (vgl. auch [RoSá194], Abschnitt II). Die Schnittkrümmung von $-\tau''$ gegeben. Gilt $\tau \neq 0$, so ist h^τ nach 2.4.23 vollständig. Es folgt:

(iii) Sei $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion der Periode T derart, daß

- $\int_0^T k = 0$ und
- k nicht identisch 0 ist.

Dann existieren zwei auf einen Torus induzierbare Lorentz-Metriken h_1 und h_2 auf \mathbb{R}^2 , h_1 vollständig und h_2 unvollständig, deren Schnittkrümmung jeweils durch $K(x, y) = k(x)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben wird. Auf einem Torus existieren also vollständige und unvollständige Metriken gleicher Schnittkrümmung.

2.4.14 BEMERKUNG. In [Sá94] und [Sá97] untersucht M. Sánchez im Zusammenhang mit Vollständigkeitsfragen eine Familie von Metriken auf Lorentz-Tori, die die Beispiele 2.4.13 (i) und (ii) verallgemeinert: Er betrachtet auf \mathbb{R}^2 Metriken der Form

$$(*) \quad g_{(x,y)} = \alpha(x) dx^2 + 2\beta(x) dx dy - \delta(x) dy^2$$

wobei α , β und δ glatte Funktionen der Periode 1 mit $\alpha\delta + \beta^2 > 0$ sind (d.h. g definiert eine Lorentz-Metrik und ist auf den Standard-Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induzierbar). Dann ist das Vektorfeld ∂_y ein Killing-Vektorfeld, so daß die geodätischen Gleichungen aufgrund des conservation lemma (siehe [O'N83], Lemma 9.26) sich vereinfachen lassen. Modulo endlicher Überlagerung sind alle Lorentz-Tori mit nichttrivialer Isometriegruppe von dieser Form (siehe das "structure result" in [Sá97] und auch 2.4.27). Betrachten wir z.B. die Metrik

$$g_{(x,y)} = \pi^2(-\sin(2\pi x) dx^2 + 2\cos(2\pi x) dx dy + \sin(2\pi x) dy^2)$$

und die Überlagerung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert durch

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{\pi} \exp(\pi y) \sin(\pi x), \frac{1}{\pi} \exp(\pi y) \cos(\pi x) \right),$$

so erhalten wir den Clifton-Pohl-Torus aus 2.4.13 (i) wieder (vgl. Abschnitt III.5 aus [Sá94] oder Abschnitt II aus [RoSá194]). Auch die Beispiele aus 3.4.22 lassen sich durch die Koordinatentransformation $x = \frac{x_1 - x_2}{2}$ und $y = \frac{x_1 + x_2}{2}$ auf Metriken der Form (*) zurückführen. Eine wichtige Unterfamilie

ist \mathcal{G}' : Für $g \in \mathcal{G}'$ sei $G(0) = 0$, und G besitze nur isolierte Nullstellen in $p_0 = 0, p_1, \dots, p_{n-1} \in (0, 1), p_{n+k} = p_k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Eine solche Metrik $(*)$ erfüllt insbesondere: (\mathbb{R}^2, g) ist zeit-, licht- und raumartig unvollständig (siehe Teorema 25 Abschnitt III.3 aus [Sá94] oder Satz 3.1 aus [Sá97]). Theorem 22, Kapitel III in [Sá94] bzw. der Anhang in [Sá97] listen das Verhalten der von g induzierten Geodäten auf (vgl. auch die Diskussion in 3.4.32 und 3.4.74, wo wir Teile dieses Satzes anwenden). Insbesondere kann man für die folgenden Unterfamilien:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_1 &= \{g \in \mathcal{G}' \mid G|_{(0,1)} > 0\} \\ \mathcal{G}_2 &= \{g \in \mathcal{G}' \mid G'(p_i) \neq 0, F(p_i)F(0) > 0, 0 \leq i \leq n-1\}\end{aligned}$$

zwei globale, isotrope und linear unabhängige Vektorfelder angeben:

$$\begin{aligned}X_1 &= \delta \partial_{x_1} + (\beta + \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2}) \partial_{x_2} \\ X_2 &= \partial_{x_1} + \left(\frac{\beta - \eta_0 \sqrt{\alpha\delta + \beta^2}}{\delta} \right) \partial_{x_2},\end{aligned}$$

wobei $\eta_0 := \text{sgn}F(0)$.

Im pseudoriemannschen Fall kennt man einige Kriterien für Vollständigkeit:

2.4.15 SATZ (Marsden '73). *Jede kompakte, homogene pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit ist vollständig.*

Beweis. Siehe [Ma73]. ■

2.4.16 BEMERKUNG. Tatsächlich gilt, daß jede kompakte pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, die (global) konform äquivalent zu einem homogenen Raum ist, vollständig (siehe [Sá94], Kapitel II, Satz 7) sein muß. Für kompakte homogene Räume ist Vollständigkeit also eine konforme Invariante.

2.4.17 DEFINITION. *Ein Vektorfeld K auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$ heißt konform, wenn die induzierten Flüsse konforme Abbildungen sind, d.h. falls $L_K g = \sigma g$ gilt. Dabei bezeichnet L_K die Lie-Ableitung bezüglich K und σ eine glatte Funktion auf M . Gilt speziell $\sigma \equiv 0$, so definiert K ein Killing-Vektorfeld.*

2.4.18 SATZ. *Sei $(M^{p,q}, g)$ eine kompakte, pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Existieren p linear unabhängige, zeitartige, konforme Vektorfelder $C_1, \dots, C_p \in \mathfrak{X}(M^{p,q})$, so ist $(M^{p,q}, g)$ vollständig.*

Insbesondere ist für jede kompakte, pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit mit p linear unabhängigen Killing-Vektorfeldern Vollständigkeit eine konforme Invariante.

Beweis. Siehe [Sá94], Kapitel II, Korollar 5. ■

2.4.19 SATZ. Für jede kompakte pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit ist lichtartige Vollständigkeit eine konforme Invariante.

Beweis. Siehe [Sá94], Kap. III, Theorem 32. ■

2.4.20 BEMERKUNG. Für eine Charakterisierung lichtartiger Vollständigkeit auf dem Torus durch Blätterungs-Theorie siehe z.B. den Artikel von [CaRo94].

2.4.21 SATZ (Carrière '89). Jede kompakte, flache Lorentz-Mannigfaltigkeit ist vollständig.

Beweis. Siehe [Ca89]. ■

2.4.22 KOROLLAR. Jede kompakte, flache Lorentz-Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu $(\mathbb{R}^{p,q}/\Gamma, g_{p,q})$ für eine frei und eigentlich diskontinuierlich wirkende Gruppe $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^{p,q}, g_{p,q})$. Insbesondere gilt für $p + q = 2$, daß Γ nur aus Translationen besteht.

Beweis. Der erste Teil folgt direkt aus Satz 2.4.7 in [Wo84] (vgl. auch Lemma 4.1 aus [RoSá94]). Um die zweite Aussage zu beweisen, betrachten wir eine Decktransformation $f \in \Gamma$. Diese ist a priori von der Form $f(x) = Ax + b$, wobei $b \in \mathbb{R}^2$ und A eine lineare Isometrie ist. Ist 1 ein Eigenwert von A , so ist A die Identität (hier benutzen wir $n = 2$), und f ist eine Translation. Wenn nicht, gilt $\det(A - Id) \neq 0$, also ist die Gleichung $Ax + b = x$ lösbar. Dann hat f einen Fixpunkt und ist somit die Identität. ■

Für kompakte Lorentz-Flächen erhalten wir insbesondere den

2.4.23 SATZ (Sánchez '94).

(i) Sei $(T^{1,1}, g)$ ein Lorentz-Torus. Existiert ein konformes Vektorfeld K mit $g(K, K) \neq 0$ in jedem Punkt, so ist $(T^{1,1}, g)$ vollständig.

(ii) Jeder (global) konform flache Lorentz-Torus ist vollständig.

Beweis. (i) Sei $\gamma : [0, b) \rightarrow T^{1,1}$, $0 < b < +\infty$ eine Geodäte. Wir müssen zeigen, daß sie fortsetzbar ist. Dazu reicht es, daß γ' in einer kompakten Menge des Tangentialbündels $T(T^{1,1})$ liegt (vgl. den bereits in 2.4.13 (ii) erwähnten ersten Abschnitt aus [RoSá93]). Weil aber $C = g(\gamma', \gamma')$ konstant ist, brauchen wir lediglich zu beweisen, daß die Projektion von γ' auf das Unterbündel $\text{span}_{T(T^{1,1})}(K)$ in einer kompakten Menge liegt. Weil $T^{1,1}$ kompakt ist, gilt nach Voraussetzung $\inf |g(K, K)| > 0$. Es reicht also, die Beschränktheit von $g(K, \gamma')$ nachzuweisen. Ist $\sigma \in C^\infty(T^{1,1})$ die Funktion mit $L_K g = \sigma g$, so folgt

$$\frac{1}{2}C(\sigma \circ \gamma) = \frac{1}{2}(L_K g)(\gamma', \gamma') = g(\nabla_{\gamma'} K, \gamma') = \frac{d}{dt}g(K, \gamma'),$$

d.h. die Ableitung $\frac{d}{dt}g(K, \gamma')$ ist auf dem (endlichen) Intervall $[0, b)$ beschränkt und somit auch $g(K, \gamma')$ selbst.

(ii) Sei $\lambda > 0$ eine glatte Funktion auf $T^{1,1}$ so, daß $(T^{1,1}, \lambda g)$ flach ist. Dann ist $(T^{1,1}, \lambda g)$ nach 2.4.22 isometrisch zu $(\mathbb{R}^{1,1}/\Gamma, g_{1,1} = -dx^2 + dy^2)$. Das Vektorfeld ∂_x ist parallel und zeitartig, definiert also ein zeitartiges Killing-Vektorfeld (vgl. [O'N83] 9.25 (iii)). Weil Γ nur aus Translationen besteht, ist ∂_x auf ein zeitartiges Killing-Vektorfeld in $(T^{1,1}, \lambda g)$ projezierbar, welches auf $(T^{1,1}, g)$ konform ist. Aus (i) folgt dann die Behauptung. ■

2.4.24 BEMERKUNGEN. (i) Dies steht im Gegensatz zum Riemannschen Fall, wo aus der Theorie elliptischer partieller Differentialgleichungen sofort folgt, daß jeder Torus global konform flach ist (vgl. auch [Wo84], 2.5.19 und 2.5.20).

(ii) Der Beweis von 2.4.21 beruht auf der Feststellung, daß auf jeder flachen, kompakten Lorentz-Fläche ein zeitartiges Killing-Vektorfeld existiert (siehe Lemma II.4.13 in [Sá94]). Tatsächlich gilt sogar der

2.4.25 SATZ (Sánchez '94). Sei $(M^{1,1}, g)$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann gilt:

- (i) Existiert auf $(M^{1,1}, g)$ ein zeitartiges, konformes Vektorfeld K , dann ist g konform flach.
- (ii) Sei M zusätzlich kompakt. Dann ist g konform flach genau dann, wenn auf $(M^{1,1}, g)$ ein zeitartiges, konformes Vektorfeld K existiert.

Beweis. (vgl. auch [Sá94], Theorem VI.13 bzw. [Sá97], Theorem 2.3). Wir zeigen zunächst:

(ii) \implies Sei $(M^{1,1}, \tilde{g})$ mit $\tilde{g} \in [g]$ flach. Nach 2.4.22 ist $(M^{1,1}, \tilde{g})$ isometrisch zu $(\mathbb{R}^{1,1}/\Gamma, g_{1,1})$, wobei Γ eine Menge von Translationen des $\mathbb{R}^{1,1}$ ist. Wie in 2.4.23 induzieren die natürlichen Koordinatenvektorfelder ein zeit- und ein raumartiges Killing-Vektorfeld auf $(M^{1,1}, \tilde{g})$, die konforme Vektorfelder auf $(M^{1,1}, g)$ definieren.

\Leftarrow) Wir behaupten: Die Metrik $\tilde{g} = -\frac{1}{g(K,K)}g$ ist flach. Im Hinblick auf 2.4.12 reicht es für die Notwendigkeit zu zeigen, daß in der Umgebung eines jeden Punktes Koordinaten (u, v) mit $\tilde{g} = -du^2 + dv^2$ definiert werden können (*). Zuerst bemerken wir, daß K ein Killing-Vektorfeld für \tilde{g} vom konstanten Betrag -1 ist (**):

$$\begin{aligned} L_K \tilde{g} &= \frac{1}{g(K,K)^2} K(g(K,K))g - \frac{1}{g(K,K)} \underbrace{L_K g}_{=\sigma g} \\ &= \left(\frac{2}{g(K,K)^2} g(\nabla_K K, K) - \frac{1}{g(K,K)} \sigma \right) g, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen

$$\sigma g(K, K) = L_K g(K, K) = g(\nabla_K K, K) + g(K, \nabla_K K) = 2g(\nabla_K K, K)$$

folgt. Weil $(M^{1,1}, [g])$ insbesondere zeitorientierbar ist, können wir ein raumartiges $W \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\tilde{g}(W, W) = 1$ und $\tilde{g}(W, K) = 0$ wählen (**). Sei $\tilde{\nabla}$ der von \tilde{g} induzierte Levi-Civita-Zusammenhang. Dann gilt $\tilde{\nabla}_K W = \tilde{\nabla}_W K = 0$. Dies folgt aus einer direkten Rechnung:

(a) Es ist

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_W K, K) = \frac{1}{2} W(\tilde{g}(K, K)) \stackrel{(**)}{=} 0$$

und

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_W K, W) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_W K, W) = 0,$$

wobei wir 9.25 (iii) aus [O'N83] benutzt haben. Aus der Nichtdegeneriertheit von \tilde{g} folgt $\tilde{\nabla}_W K = 0$.

(b) Wir zeigen zunächst $\tilde{\nabla}_K K = 0$: Es gilt

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_K K, K) \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2} K(\tilde{g}(K, K)) = 0$$

und

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_K K, W) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_W K, K) = -\frac{1}{2} W(\tilde{g}(K, K)) = 0.$$

Somit folgt

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_K W, K) = K(\tilde{g}(W, K)) - \tilde{g}(W, \tilde{\nabla}_K K) \stackrel{(***)}{=} 0$$

und

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_K W, W) = \frac{1}{2} K(\tilde{g}(W, W)) \stackrel{(***)}{=} 0.$$

Also gilt auch $\tilde{\nabla}_K W = 0$.

Dann ist

$$[K, W] = \tilde{\nabla}_K W - \tilde{\nabla}_W K = 0,$$

woraus wir mit dem bereits benutzten Frobenius–Argument die Existenz eines Koordinatensystems (u, v) mit $\tilde{g} = adu^2 + 2bdudv + cdv^2$ erhalten. Wegen $\partial_u = K$ und $\partial_v = W$ folgt aus (**) und (***) die Behauptung (*).

(i) folgt nun aus (ii) \Leftarrow), da wir für die Rückrichtung die Kompaktheit von M nicht benutzt haben.

■

2.4.26 KOROLLAR. *Jeder nicht zeit–orientierbare Lorentz–Torus (wie z.B. in 2.2.8) ist nicht (global) konform flach.*

2.4.27 BEMERKUNGEN. (i) Tatsächlich folgt aus dem Beweis mehr, als wir behauptet haben: Zunächst erhält man, daß jedes konforme Vektorfeld einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$ ein Killing–Vektorfeld für ein $\tilde{g} \in [g]$ ist. Speziell erhalten wir für Lorentz–Flächen als Korollar, daß Γ in 2.4.22 nur aus Translationen besteht.

(ii) Anstatt zeitartig konformer Vektorfelder kann man auch nullstellenfreie raumartig konforme Vektorfelder betrachten.

(iii) Der Zusammenhang auf Lorentz–Tori zwischen (global konformer) Flachheit, Vollständigkeit und der Existenz von Killing–Vektorfeldern wurde in [Sá97] eingehend untersucht: Existiert auf $(T^{1,1}, g)$ ein nicht triviales Killing–Vektorfeld ξ , so verschwindet ξ in keinem Punkt und es gilt

(a) die Metrik g ist flach genau dann, wenn $g(\xi, \xi)$ konstant ist;

(b) die Metrik g ist konform flach genau dann, wenn ξ einen festen kausalen Charakter hat, d.h. $g(\xi, \xi)$ entweder strikt positiv, strikt negativ oder null ist, was sich wiederum äquivalent zu geodätischen Vollständigkeit erweist (siehe (SR) in [Sá97]).

In diesem Artikel findet man auch eine Beschreibung der möglichen Isometriegruppen von $(T^{1,1}, g)$. Insbesondere folgt aus (SR), daß im Falle von $\dim(Isom(T^{1,1}, g)) > 0$ das Vollständigkeitsverhalten von $(T^{1,1}, g)$ zwischen konform flachen und nicht konform flachen Metriken unterscheiden kann.

Die Frage, ob nun Vollständigkeit eine konforme Invariante ist, scheint hingegen weiterhin offen zu sein. In [RoSá93] vermuteten die Autoren, auf kompakten Lorentz–Mannigfaltigkeiten impliziere lichtartige Vollständigkeit stets (geodätische) Vollständigkeit, die somit ebenfalls eine konforme Invariante wäre (KI) (vgl. 2.4.19). In [CaRo94] wurde gezeigt, daß diese Vermutung auf dem zweidimensionalen Torus ”generisch”, d.h. im maßtheoretischen Sinne richtig ist, aber gleichzeitig auf die Möglichkeit der Konstruktion pathologischer Tori hingewiesen, auf denen (KI) falsch wäre. Soweit dem Autor bekannt ist, sind bis zum jetzigen Zeitpunkt aber keine Gegenbeispiele gefunden worden; (KI) ist also weiterhin als offenes Problem zu betrachten.

2.4.3 Der Raum der Lorentz–Metriken und der konforme Modulraum über dem Torus

Möchte man topologisch äquivalente Flächen bis auf konforme Äquivalenz klassifizieren, ist es natürlich zu fragen, wie für eine gegebene Fläche die Menge aller konformen Klassen und a fortiori aller (pseudo–)riemannscher Metriken überhaupt aussieht, welche Strukturen auf ihr existieren usw.. Dazu definieren wir zuerst

$$\mathfrak{L}(T^{1,1}) := \left\{ h \in \mathcal{T}^{(0,2)}(T^{1,1}) \mid h \text{ ist Lorentz–Metrik auf } T^{1,1} \right\}.$$

Wir können auf $\mathfrak{L}(T^{1,1})$ kanonisch eine metrische Struktur definieren: Dazu fixieren wir eine beliebige Riemannsche Metrik g_R auf $T^{1,1}$. Diese induziert ein natürliches, positiv definites Skalarprodukt auf $\mathcal{T}^{(0,2)}(T^{1,1})$ und somit eine Distanzfunktion d_R . Nun ist zwar d_R abhängig von der zuvor gewählten Riemannschen Metrik, nicht aber die induzierte Topologie, denn je zwei Distanzfunktionen d_R und $d_{R'}$ sind äquivalent (vgl. [Sá94], Satz VI.1.2). Dann versehen wir $\mathfrak{L}(T^{1,1}) \subset \mathcal{T}^{(0,2)}(T^{1,1})$ mit der induzierten Topologie (bezüglich derer $\mathfrak{L}(T^{1,1})$ offen in $\mathcal{T}^{(0,2)}(T^{1,1})$ ist, d.h. $\mathfrak{L}(T^{1,1})$ besitzt sogar eine natürliche Mannigfaltigkeitsstruktur). Der dadurch definierte topologische Raum $\mathfrak{L}(T^{1,1})$ wurde von M.Sánchez in [Sá94] untersucht. Sein Hauptresultat ist der

2.4.28 SATZ. *Die global konform flachen Lorentz–Metriken auf $T^{1,1}$ liegen im Abschluß der lichtartig unvollständigen Lorentz–Metriken auf $T^{1,1}$.*

Beweis. Siehe [Sá94], Abschnitt VI.2, Theorem 10 (weitere Resultate dieser Art findet man in [Sá94], Kap.VI). ■

Wir wollen uns nun mit dem Raum der konformen Klassen beschäftigen. Zu diesem klassischen Problem aus der Theorie kompakter Riemannscher Flächen liegen umfangreiche Untersuchungen vor:

2.4.29 DEFINITION. *Sei S eine kompakte Fläche,*

$$\mathfrak{R}(S) := \{g \in \mathcal{T}^{(0,2)}(S) \mid g \text{ ist Riemannsche Metrik auf } S\}$$

und $\mathfrak{D}(S)$ die Menge aller konformen Diffeomorphismen der Fläche S . Zwei Metriken g und \tilde{g} aus $\mathfrak{R}(S)$ sind äquivalent, geschrieben $g \sim \tilde{g}$, wenn $f \in \mathfrak{D}(S)$ mit $g = f^\tilde{g}$ existiert. Der Raum*

$$\begin{aligned} \text{Mod}_R(S) &:= (\mathfrak{R}(S) / \sim) = (\mathfrak{R}(S) / \mathfrak{D}(S)) \\ &= \{[g] \mid g \text{ ist Riemannsche Metrik auf } S\} \end{aligned}$$

wird konformer Modulraum genannt.

2.4.30 BEMERKUNG. $Mod_R(S)$ kann als der Raum der nicht konform äquivalenten Riemannschen Flächen angesehen werden. Da $\mathfrak{R}(S)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{T}^{(0,2)}$ ist, trägt $\mathfrak{R}(S)$ eine natürliche Untermannigfaltigkeitsstruktur und sogar eine Riemannsche Metrik (siehe [Tr92] Abschnitt 1.2). Auf $Mod_R(S)$ betrachten wir dann die Quotiententopologie.

2.4.31 SATZ. $Mod_R(T^{1,1})$ kann auf natürliche Weise mit \mathbb{C} identifiziert werden.

Beweis. Wir skizzieren lediglich die wesentlichen Beweisschritte (vgl. auch [FaKr91], IV.7.34 und [Sá94] Abschnitt VI.3.b). Im folgenden identifizieren wir \mathbb{R}^2 kanonisch mit \mathbb{C} .

(a) In jeder konformen Klasse $[g]$ auf $T^{1,1}$ existiert ein g_0 so, daß $(T^{1,1}, g_0)$ flach ist, d.h. $(T^{1,1}, g_0)$ ist isometrisch zu $(\mathbb{C}/\Gamma, g_2)$ (vgl. 2.4.7 und 2.4.25). Dabei ist Γ eine Gruppe von Decktransformationen, die durch zwei unabhängige Translationen $\tau_i : z \rightarrow z + t_i$, $i = 1, 2$ erzeugt wird. Da Streckungen und Rotationen konforme Äquivalenzen für (\mathbb{C}, g_2) sind, können wir $g_0 \in [g]$ sogar so wählen, daß $t_1 = 1$ und $Im(t_2) > 0$ gilt.

(b) Wir betrachten nun zwei konforme Klassen $[g]$ und $[g']$ mit zugehörigem g_0 bzw. g'_0 , τ_i bzw. τ'_i und Γ bzw. Γ' . Dann gilt $[g] = [g']$ genau dann, wenn ein konformer Automorphismus $F : (\mathbb{C}, g_2) \rightarrow (\mathbb{C}, g_2)$ mit $F(\Gamma) = \Gamma'$ existiert, so daß $f := F|_{\Gamma}$ ein Gruppenisomorphismus ist (*). Wir müssen also alle solche konformen Automorphismen bestimmen.

(c) Jeder konformer Automorphismus kann als biholomorphe Abbildung von \mathbb{C} nach \mathbb{C} aufgefaßt werden (vgl. 2.1.11). Aus Standardargumenten der komplexen Differentialrechnung schließt man nun, daß $F(z) = az + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ ist. Diejenigen konformen Automorphismen, die die Zusatzbedingung (*) erfüllen, können wir dann mit \mathbb{C} identifizieren. ■

Definiert man analog zu 2.4.29 den konformen Modulraum für Lorentz–Flächen $Mod_L(S)$, so stößt man bei der Übertragung der Beweisschritte aus 2.4.31 zur Bestimmung von $Mod_L(T^{1,1})$ auf einige Probleme: Wie wir bereits in 2.4.24 bemerkt haben, ist nicht jeder Lorentz–Torus global konform flach, so daß wir die Untersuchung des Problems nicht ohne weiteres auf $\mathbb{E}^{2,1}$ liften können. Dazu müßten wir uns auf die Teilmenge $Mod_{L_{fl}}(T^{1,1})$ der global konform flachen Lorentz–Metriken beschränken. Dann könnten wir Schritt (a) und (b) analog zu 2.4.31 ausführen, aber wir besitzen keine einfache, explizite Beschreibung aller konformen Automorphismen von $\mathbb{E}^{2,1}$ (vgl. auch [Sá94] Abschnitt VI.3.b). M. Sánchez schlug die Möglichkeit vor, zunächst geeignete Teilmengen von $\mathcal{L}(T^{1,1})$ modulo \sim zu untersuchen. Zwei naheliegende Kandidaten wären z.B. $\mathcal{L}_v(T^{1,1})$ und $\mathcal{L}_{uv}(T^{1,1})$, die Teilmenge der vollständigen bzw. unvollständigen Metriken auf $T^{1,1}$. Dann könnte man zuerst $Mod_{L_v} = \mathcal{L}_v(T^{1,1}) / \sim$ und $Mod_{L_{uv}} = \mathcal{L}_{uv}(T^{1,1}) / \sim$ betrachten. Damit diese Unterteilung aller-

ings sinnvoll wäre, sollte $Mod_{L_v}, Mod_{L_u} \subset Mod_L(T^{1,1})$ gelten, so daß man

$$Mod(T^{1,1}) = Mod_u(T^{1,1}) \cup Mod_{uv}(T^{1,1})$$

hätte. Dies wäre aber äquivalent zu (KI) für Dimension $n = 2$ (siehe [Sá94], Abschnitt VI.3.(c)). Für Schwierigkeiten, die bei der Betrachtung von offenen Untermengen von $Mod_L(T^{1,1})$ auftreten können, siehe z.B. [Yu90], S.3071 ff..

Im allgemeinen ist aber auch für Riemannsche Flächen die Bestimmung von $Mod_R(S)$ äußerst subtil. Deswegen ordnet man S , ausgehend von $\mathfrak{R}(S)$, weitere Räume zu, um Informationen über $Mod_R(S)$ zu erhalten:

2.4.32 DEFINITION. *Bezeichne $\mathfrak{D}_0(S)$ den Normalteiler von $\mathfrak{D}(S)$, der durch die konformen Diffeomorphismen, die homotop zur Identität sind, definiert wird. Die Menge*

$$\mathfrak{T}(S) := \mathfrak{R}(S) / \mathfrak{D}_0(S)$$

heißt Teichmüller–Raum. Insbesondere gilt dann $Mod_R(S) = \mathfrak{T}(S) / (\mathfrak{D} / \mathfrak{D}_0)$ (siehe [Tr92] Bemerkung 0.1 S.11, wo die Beziehung zwischen dem Teichmüller–Raum und $Mod_R(S)$ diskutiert wird).

2.4.33 Eine wichtige Beobachtung bei der Untersuchung von Teichmüller–Räumen ist die Tatsache, daß wir $\mathfrak{T}(S)$ als Quotient $\mathfrak{R}(S) / \mathfrak{D}_0(S)$ auffassen können, wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(S) = & \{J \in \mathcal{T}^{(1,1)}(S) \mid \text{für alle } x \in S \text{ und } v \in T_x M \text{ gilt } J_x^2 = -id_{T_x M}, \\ & \text{und } (v, Jv) \text{ ist eine orientierte Basis}\} \end{aligned}$$

die Menge der orientierungskompatiblen fast–komplexen Strukturen auf S ist (siehe Theorem 1.1.1 und 1.1.2 in [Tr92]). Der Vorteil von $\mathfrak{D}_0(S)$ gegenüber $\mathfrak{D}(S)$ ist darin zu sehen, daß $\mathfrak{D}_0(S)$ frei und eigentlich auf $\mathfrak{R}_{-1}(S)$, den Riemannschen Metriken mit konstanter Schnittkrümmung -1 wirkt. Nach dem Satz von Poincaré existiert in jeder konformen Klasse $[g]$ einer Riemannschen Fläche S genau ein $g_{-1} \in [g]$ konstanter Schnittkrümmung -1 , d.h. wir können $Mod_R(S)$ auf natürliche Weise mit $\mathfrak{R}_{-1}(S)$ identifizieren. Dann kann man z.B. zeigen, daß $\mathfrak{T}(S)$ für $genus(S) > 1$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $\mathbb{R}^{6(genus(S)-1)}$ ist (siehe [Tr92], Abschnitte 2.2–2.4). Der Teichmüller–Raum ist also in der Regel einfacher zu untersuchen als der konforme Modulraum, und erweist sich vor allem für kompakte Flächen vom Genus ≥ 1 als hilfreich. Kompakte Lorentz–Flächen sind, wie wir in 2.2.10 gesehen haben, notwendig vom Genus 1; trotzdem könnte sich vielleicht folgendes Lorentz–Analogon als nützlich erweisen:

Für Lorentz–Flächen hat man den Begriff der fast–Produktstruktur zur Verfügung, d.h. diejenigen $P \in \mathcal{T}^{(1,1)}(S)$, für die $P_x^2 = id_{T_x M}$ für alle $x \in S$ gilt. Man überzeugt sich leicht davon, daß P_x die Eigenwerte $+1$ und -1 hat und somit P den Tangentialraum TM in die Summe der Eigenunterräume $E(+1)$ und $E(-1)$ zerlegt. Dann existiert genau eine konforme Klasse von Lorentz–Metriken $[h]$ auf S , die $E(+1)$ als \mathcal{X} – und $E(-1)$ als \mathcal{Y} –Distribution induziert. Umgekehrt können wir jeder solchen konformen Klasse eindeutig ein solches P durch die Forderung zuordnen, daß die Eigenunterräume $E(+1)$ und $E(-1)$ von P durch die \mathcal{X} – und \mathcal{Y} –Distribution der konformen Klasse gegeben seien. Diese Zuordnungen sind invers zueinander, d.h. wir können die konformen Klassen $[h]$ mit den fast–Produktstrukturen auf S identifizieren (vgl. auch 2.6.26). Sei $\mathfrak{P}(S)$ die Menge dieser Strukturen auf S . Ein möglicher Ansatz für die Untersuchung von $Mod_L(S)$ wäre daher, zuerst das Lorentz–Analogon des Riemannschen Teichmüller–Raums $\mathfrak{P}(S)/\mathfrak{D}_0(S)$ zu betrachten. Die Schwierigkeiten jedoch, die schon bei der Klassifikation einfach zusammenhängender Lorentz–Flächen auftreten (vgl. Abschnitt 1.7), lassen bereits vermuten, daß es ohne neue Methoden schwierig sein wird, tiefere Aussagen über $Mod_L(S)$ zu machen.

2.5 Nulllinien

2.5.1 Allgemeine Eigenschaften von Nulllinien

2.5.1 DEFINITION. *Die maximalen Integralkurven lichtartiger Vektorfelder heißen Nulllinien.*

2.5.2 SATZ. *Die Ableitung jeder Nullkurve ist entweder stets Element der \mathcal{X} – oder der \mathcal{Y} –Distribution.*

Beweis. Sei γ eine Nullkurve. Da die Tangentialvektoren von γ stets lichtartig sind, ist $\gamma'(t)$ aus $\mathcal{X}(\gamma(t))$ oder $\mathcal{Y}(\gamma(t))$ und die Behauptung folgt aus Stetigkeitsgründen. ■

2.5.3 BEZEICHNUNG. Wie in 2.2 bewiesen, existieren auf jeder Lorentz–Fläche zwei linear unabhängige Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} , die lokal durch lichtartige Vektorfelder gegeben werden. Die durch Repräsentanten von \mathcal{X} und \mathcal{Y} induzierten Nulllinien nennen wir im folgenden kurz X – bzw. Y –(Null–)Linien. Wir werden im folgenden die durch einen Punkt p verlaufende X – bzw. Y –Linie generisch mit l_p bzw. m_p bezeichnen. Analog können wir im Hinblick auf 2.5.2 von X – bzw. Y –Kurven, –Bögen usw. reden, wenn ihre Ableitungen in der \mathcal{X} – bzw. \mathcal{Y} –Distribution liegen (um eventuelle Unklarheiten zu vermeiden, sprechen wir gelegentlich auch von \mathcal{X} – bzw. \mathcal{Y} –Kurven, –Bögen usw.). Um diesen

Sachverhalt hervorzuheben, sprechen wir auch vom Typ der Nullkurve. Diese Bezeichnungen sind offensichtlich invariant unter konformer Änderung der Metrik, so daß wir unterschiedslos von $h - X -$ bzw. $h - Y -$ Nulllinien und $[h] - X -$ bzw. $[h] - Y -$ Nulllinien sprechen. Für die Parametrisierung von Nullkurven, $-$ Bögen usw. vereinbaren wir folgende

GENERALVORAUSSETZUNG: Alle Parametrisierungen von Nullkurven, $-$ bögen usw. seien lokal injektiv und, falls sie differenzierbar sind, als regulär vorausgesetzt.

2.5.4 SATZ. Sind $\gamma_0 : I \rightarrow S$ und $\gamma_1 : J \rightarrow S$ entweder beides $X -$ oder beides $Y -$ Linien, so gilt entweder $\gamma_0(I) = \gamma_1(J)$ oder $\gamma_0(I) \cap \gamma_1(J) = \emptyset$.

Beweis. Seien o.B.d.A. γ_0 und γ_1 $X -$ Linien. Sei

$$\Sigma := \{t \in I \mid \gamma_0(t) = \gamma_1(s) \text{ für ein } s \in J\}.$$

Aufgrund der Stetigkeit von γ_0 und γ_1 ist Σ abgeschlossen. Angenommen, $\Sigma = \emptyset$. Dann gilt $\gamma_0(I) \cap \gamma_1(J) = \emptyset$ und wir sind fertig. Wenn nicht, existiert ein $t_0 \in I$ und ein $s_0 \in J$ mit $\gamma_0(t_0) = \gamma_1(s_0)$. Wir wählen ein um $\gamma_0(t_0)$ zentriertes Nullkoordinatensystem χ . Dann parametrisieren $\chi \circ \gamma_0$ und $\chi \circ \gamma_1$ ein Intervall um den Ursprung auf der $x -$ Achse, d.h. es existieren $\epsilon, \delta > 0$ so, daß

$$\chi \circ \gamma_0((t_0 - \delta, t_0 + \delta)) = \chi \circ \gamma_1((s_0 - \epsilon, s_0 + \epsilon)).$$

Also ist Σ offen und weil I zusammenhängend ist, gilt $\Sigma = I$. Vertauschen von I und J im Beweis ergibt $\gamma_0(I) = \gamma_1(J)$. ■

2.5.5 SATZ. Eine $X -$ bzw. $Y -$ Linie ist entweder injektiv oder die universelle Überlagerung eines Jordannullbogens, d.h. eines einfachen und geschlossenen Nullbogens.

Beweis. Sei $\gamma : I \rightarrow S$ eine Nulllinie. Dann ist γ insbesondere regulär und somit lokal injektiv, also hat die Menge $\Sigma = \{t \in I \mid \gamma(t) = \gamma(s) \text{ für ein } s \in I, s \neq t\}$ keinen Häufungspunkt. Angenommen, $\Sigma = \emptyset$. Dann ist γ injektiv. Wenn nicht, so existieren $t, s \in I, t < s$ so, daß γ injektiv auf (t, s) ist (sonst hätte Σ doch einen Häufungspunkt). Dann ist $\Gamma := \gamma|_{[t,s]}$ ein Jordannullbogen (beachte, daß γ ein Nulllinie ist, d.h. maximale Integralkurve eines Vektorfeldes Z , und somit $\gamma'(t) = Z(\gamma(t)) = Z(\gamma(s)) = \gamma'(s)$ gilt), dessen Bild in S wir mit $|\Gamma|$ bezeichnen. Sei $\tilde{\gamma}$ eine reguläre, universelle Überlagerung von $|\Gamma|$. Somit ist $\tilde{\gamma}$ eine Nullkurve, deren Definitionsbereich aufgrund der Universalität maximal ist, d.h. $\tilde{\gamma}$ definiert sogar eine Nulllinie. Dann ist aber $\tilde{\gamma} \cap \gamma \neq \emptyset$ und gemäß 2.5.4 fallen die Bilder von γ und $\tilde{\gamma}$ zusammen, also ist $|\gamma| = |\Gamma|$. Wir erhalten eine surjektive Abbildung $\gamma \rightarrow \Gamma$, die aufgrund der Regularität von γ eine Überlagerungsabbildung von $|\Gamma|$ ist. Aufgrund der Maximalität

des Definitionsbereiches von γ ist diese Überlagerung aber auch universell, d.h. $\gamma = \tilde{\gamma}$ ist die universelle Überlagerung eines Jordannullbogens. ■

2.5.2 Nulllinien auf einfach zusammenhängenden Lorentz–Flächen

Wie bereits im vorangehenden Abschnitt angedeutet, wurden Lorentz–Mannigfaltigkeiten vor allem als Grundlage kosmologischer Modelle studiert. Dabei wurden mit Hilfe kausalitätstheoretischer Methoden eine Reihe wichtiger Eigenschaften von Nulllinien auf einfach zusammenhängenden Lorentz–Flächen bewiesen (siehe z.B. [BeEhEa96], Abschnitt 3.4). fältigkeiten vor allem als Grundlage kosmologischer Modelle studiert. Dabei wurden mit Hilfe kausalitätstheoretischer Methoden eine Reihe wichtiger Eigenschaften von Nulllinien auf einfach zusammenhängenden Lorentz–Flächen bewiesen (siehe z.B. [BeEhEa96], Abschnitt 3.4).

Wir untersuchen diese Eigenschaften mittels differentialtopologischer Techniken und greifen dabei insbesondere auf eine von H. Hamburger entwickelte Methode zurück (siehe [Ha24]), die von T. Weinstein in [We96] benutzt wird.

2.5.6 DEFINITION. *Ein Linienelement in $p \in S$ ist ein eindimensionaler Teilraum von $T_p S$. Ein (integrables) Linienfeld \mathcal{V} auf einer Umgebung U von $p \in S$ ist eine stetige Distribution auf U , d.h. eine Familie $\{\mathcal{V}(q)\}_{q \in U}$ von Linienelementen $\mathcal{V}(q)$ in q , für die ein stetiges Vektorfeld V auf U so existiert, daß $V(q)$ den Raum $\mathcal{V}(q)$ für alle $q \in U$ aufspannt. Ein solches Vektorfeld nennt man auch darstellendes Vektorfeld. Ist \mathcal{V} ein integrables Linienfeld auf $U \setminus \{p\}$, und hat jedes darstellende Vektorfeld V in p eine Nullstelle, so heißt p Singularität von \mathcal{V} . Ist \mathcal{V} auf einer Umgebung U von p definiert (d.h. es kann durch ein nullstellenfreies Vektorfeld repräsentiert werden), so heißt \mathcal{V} singularitätsfrei in p . Eine Kurve $\alpha : I \rightarrow S$ liegt entlang dem Linienfeld \mathcal{V} , falls $\alpha'(t) \in \mathcal{V}(\alpha(t))$ für alle $t \in I$ gilt.*

2.5.7 Sei \mathcal{V} ein Linienfeld, das auf einer in $p \in S$ punktierten offenen Menge W definiert ist. Sei $c : [0, 1] \rightarrow S$ eine einfache, geschlossene Kurve derart, daß

- (i) \mathcal{V} höchstens eine Singularität in $p \in \text{Int } c$ besitzt
- (ii) \mathcal{V} keine Singularität auf c besitzt.
- (iii) $c \cup \text{Int } c$ in einer zu \mathbb{R}^2 diffeomorphen Kartenumgebung U mit Koordinaten χ liegt.

Wir fixieren eine Riemannsche Metrik g auf S ; da S orientiert ist, können wir daher von orientierten Winkeln $\angle(v, w) \in [0, 2\pi]$ zweier Vektoren $v, w \in T_p S$ für $p \in S$ sprechen. Fixiere einen Vektor $v \in$

$\mathcal{V}(c(0))$; dieser induziert eine Richtung auf $\mathcal{V}(c(0))$ und bestimmt somit ein eindeutiges darstellendes Vektorfeld V auf c mit $V(t) \in \mathcal{V}(c(t))$, $V(0) = v$ und $g(V(t), V(t)) = g(v, v)$. Auf U können wir ein Vektorfeld F ohne Nullstelle definieren, z.B. durch $F(p) := d(\chi^{-1})_{\chi(p)}(\partial_{x_1}(\chi(p)))$. Wir definieren eine stetige Funktion $\Delta_{c,g}(F, \mathcal{V}) : [0, 1] \rightarrow S^1$ durch

$$(H) \quad \Delta_{c,g}(F, \mathcal{V})(t) := \exp(i(\angle(F(c(t)), V(t)) - \theta_0)),$$

wobei $\theta_0 := \angle(F(c(0)), V(0))$. Bezeichne $\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})$ die Hebung von $\Delta_{c,g}(F, \mathcal{V})$ bezüglich der Überlagerung $(\mathbb{R}, p : t \rightarrow e^{2\pi it})$ mit

$$(AB) \quad \Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})(0) = \theta_0.$$

Dann ist $\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})$ eine stetige Funktion und es gilt

2.5.8 SATZ UND DEFINITION.

$$j_{c,F,g}(p, \mathcal{V}) := \Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})(1) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

Beweis. Da \mathcal{V} eindimensional und V normiert ist, können lediglich zwei Fälle auftreten: $V(1) = V(0)$

oder $V(1) = -V(0)$. Es gilt: $p(\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})(1)) = \Delta_{c,g}(F, \mathcal{V})(1) = \begin{cases} 1, & \text{falls } V(1) = V(0) \\ -1, & \text{falls } V(1) = -V(0) \end{cases}$.

Also ist $\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})(1) \in \begin{cases} p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \\ p^{-1}(-1) = \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \end{cases}$, d.h. $j_{c,F,g}(p) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. ■

2.5.9 SATZ UND DEFINITION.

(i) j hängt nicht von der einfach geschlossenen Kurve c ab.

(ii) j hängt nicht vom Vektorfeld F ab.

(iii) j hängt nicht von der Metrik g ab.

Zusammenfassend gilt also:

$$j_{c,F,g}(p, \mathcal{V}) \equiv j(p, \mathcal{V}).$$

Die so definierte Zahl aus $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ heißt Hopf-Index von \mathcal{V} in p .

2.5.10 BEMERKUNG. Wie [Ho83] (vgl. Bemerkung 1.7, S.111) und [Ha24] (vgl. Fußnote 12) bemerken, ist der oben definierte Index eine Verallgemeinerung des Poincaré–Hopf–Index, wie er in der Differentialtopologie (auch in höheren Dimensionen) als Abbildungsgrad von normierten Vektorfeldern betrachtet wird (siehe z.B. [GuPo74] S.132 ff. oder [Mi65], Kap.6). Der Hopf–Index j mißt, vereinfacht gesagt, die Umdrehungen eines Linienfeldes anhand eines Repräsentanten. Da das Linienfeld die Richtung vergißt, können auch halbzahlige Werte auftreten; falls aber $j \in \mathbb{Z}$, so fallen beide Indices zusammen. Weiterhin gilt für den Hopf–Index die Formel von Euler–Poincaré–Hopf:

$$\sum_{p \text{ Singularität von } \mathcal{V}} j(p, \mathcal{V}) = \chi(S),$$

wobei \mathcal{V} ein Richtungsfeld auf S mit endlich vielen Singularitäten und $\chi(S)$ die Eulersche Charakteristik von S ist (für einen Beweis dieser Behauptung siehe z.B. Theorem 1.6, S.110 in [Ho83]).

Beweis von 2.5.9. Die Behauptung folgt aus der Diskretheit des Wertebereichs und der stetigen Abhängigkeit des Hopf–Index von c, F und g :

(i) Sei c_1 eine weitere einfach geschlossene Kurve mit (i)–(iii) aus 2.5.7. Da U einfach zusammenhängend ist (U ist diffeomorph zu \mathbb{R}^2 nach Voraussetzung), kann c durch eine Homotopie H stetig auf $c_1 = H(1, \cdot)$ transformiert werden. Der Ausdruck

$$\Delta(s) := \exp(2\pi i(\angle(F(H(s, 1)), V(t)) - \theta_0))$$

ist stetig, somit auch die Hebung Δ^* , die nach 2.5.8 mit Werten in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ist. Da der Definitionsbereich zusammenhängend ist, folgt $\Delta(s) \equiv \Delta(0) = j$, d.h. Wegunabhängigkeit.

(ii) Sei G ein weiteres nullstellenfreies Vektorfeld auf U . Es ist zu zeigen:

$$\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V}) = \Delta_{c,g}^*(G, \mathcal{V}).$$

Es gilt (Additivität der Winkel)

$$\angle(F \circ c, V)(t) = \angle(F \circ c, G \circ c)(t) + \angle(G \circ c, V)(t) \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Sei $\langle G \rangle$ das von G induzierte Linienfeld. Dann folgt:

$$\Delta_{c,g}(F, \mathcal{V}) = \Delta_{c,g}(F, \langle G \rangle) \Delta_{c,g}(G, \mathcal{V})$$

und damit

$$\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V}) = \Delta_{c,g}^*(F, \langle G \rangle) + \Delta_{c,g}^*(G, \mathcal{V}).$$

Man beachte, daß

$$p(\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})) = p(\Delta_{c,g}^*(F, \langle G \rangle)) p(\Delta_{c,g}^*(G, \mathcal{V}))$$

und

$$\begin{aligned}\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V})(0) &\stackrel{(AB)}{=} \angle(F(c(0)), V(0)) = \angle(F(c(0)), G(0)) + \angle(G(0), V(0)) \\ &\stackrel{(AB)}{=} \Delta_{c,g}^*(F, \langle G \rangle)(0) + \Delta_{c,g}^*(G, \mathcal{V})(0)\end{aligned}$$

gilt, so daß die "Morphismuseigenschaft" der Hebungsoperation aus der Eindeutigkeit der Hebung unter gleicher Anfangsbedingung folgt. Insbesondere gilt für die Differenz:

$$\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V}) - \Delta_{c,g}^*(G, \mathcal{V}) = \Delta_{c,g}^*(F, \langle G \rangle) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Aber durch Zusammenschrumpfen von c auf einen Punkt kann $\Delta_{c,g}^*(F, \langle G \rangle)$ beliebig klein gemacht werden. Somit folgt $\Delta_{c,g}^*(F, \langle G \rangle) = 0$ und daraus die Behauptung.

(iii) Sei g_1 eine weitere Riemannsche Metrik. Definiere eine Homotopie H durch

$$H(t, p) := (1-t)g(p) + tg_1(p) =: H_t(p), p \in S.$$

Dann ist H_t eine Riemannsche Metrik. Gemäß der Definition des orientierten Winkels hängt dieser stetig von der gewählten Metrik ab; da aber $\Delta_{c,H_t}^*(F, \mathcal{V}) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, schließen wir wie oben, daß $\Delta_{c,g}^*(F, \mathcal{V}) = \Delta_{c,g_1}^*(F, \mathcal{V})$ ist. ■

2.5.11 KOROLLAR. *Ist \mathcal{V} ein singularitätsfreies Feld in p , so gilt $j(p, \mathcal{V}) = 0$.*

Beweis. Da \mathcal{V} singularitätsfrei ist, kann V auf einer zu \mathbb{R}^2 diffeomorphen Umgebung von p definiert werden. Somit folgt aus 2.5.9 $j(p, \mathcal{V}) = \Delta_{c,g}^*(V, \mathcal{V}) = 0$. ■

2.5.12 SATZ. *Sei U eine Umgebung von p aus S . Sind \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei transversale Linienfelder, d.h. $\mathcal{V}(q) \neq \mathcal{W}(q)$ für alle q aus $U \setminus \{p\}$, so gilt: $j(p, \mathcal{V}) = j(p, \mathcal{W})$.*

Beweis. Seien V und W Darstellungen von \mathcal{V} und \mathcal{W} . Dann gilt für alle t :

$$\angle(F(c(t)), V(t)) = \angle(F(c(t)), W(t)) + \angle(W(t), V(t))$$

Einsetzen in die Definition (H) ergibt:

$$\Delta_{c,g}(F, \mathcal{V})(t) = \Delta_{c,g}(F, \mathcal{W})(t) \exp(i(\angle(W(t), V(t)) - \angle(W(0), V(0))))$$

Daraus folgt

$$\Delta_{c,g}(F, \mathcal{V})(1) = p(j(p, \mathcal{V})) = p(j(p, \mathcal{W}) + \underbrace{\frac{1}{2\pi}[\angle(W(1), Z(1)) - \angle(w, z)]}_{(*)}),$$

wobei wir $w := W(0)$ und $v := V(0)$ gesetzt haben. Wegen 2.5.8 gilt, daß $j(p, \mathcal{W}) + \frac{1}{2\pi}[\angle(W(1), Z(1)) - \angle(w, z)]$ aus $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ist und deswegen $(*)$ ein ganzzahliges Vielfaches von π sein muß. Wir müssen zeigen, daß $(*) = 0$. Für $W(1)$ bzw. $Z(1)$ können die folgenden vier Fälle auftreten:

- (i) $W(1) = w$ und $V(1) = v$. Dann folgt: $(*) = 0$ und daraus die Behauptung.
- (ii) $W(1) = -w$ und $V(1) = -v$. Wegen $\angle(-w, -z) = \angle(w, z)$ ist $(*) = 0$.
- (iii) $W(1) = -w$ und $V(1) = v$. Nach Voraussetzung gilt $\angle(W(t), Z(t)) \in (0, \pi)$ oder $(\pi, 2\pi)$ für alle t (dies folgt aus der Tatsache, daß beide Linienfelder in allen Punkten linear unabhängig sind, sowie den üblichen Stetigkeitsargumenten). Nehmen wir z.B. ersteres an. Dann folgt aber

$$\angle(W(1), Z(1)) = \angle(-w, z) = \pi + \underbrace{\angle(w, z)}_{>0} \in (\pi, 2\pi)$$

— Widerspruch, d.h. (iii) kann nicht auftreten.

- (iv) $W(1) = w$ und $V(1) = -v$. Analog zu (iii). ■

2.5.13 In Abschnitt 3.3 von [We96] wird nun eine Methode zur Berechnung des Hopf-Index benutzt, die auf H. Hamburger zurückgeht und hier kurz vorgestellt werden soll. Für Einzelheiten siehe [Ha24]. H. Hamburger definiert einen weiteren Index, der die Berechnung des oben definierten Hopf-Index gestattet: Sei U eine zu \mathbb{R}^2 diffeomorphe Umgebung von $p \in S$ (d.h. U ist insbesondere einfach zusammenhängend), z.B. S selbst, falls S einfach zusammenhängend ist, und \mathcal{V} und \mathcal{W} zwei transversale Linienfelder (d.h. linear unabhängig in jedem Punkt). Dann gilt insbesondere $j(p, \mathcal{V}) = j(p, \mathcal{W})$. Aufgrund der Transversalität existiert dann eine endliche Anzahl von Bögen $\alpha_i : [a_i, b_i] \rightarrow S$ bzw. $\beta_j : [c_j, d_j] \rightarrow S$ entlang \mathcal{V} und \mathcal{W} , die einen stetigen, stückweise glatten, einfachen, geschlossenen Bogen Γ in U bilden, der p einschließt, d.h. $p \in \text{Int } \Gamma$. Alle Ecken p_k von Γ können in ausspringende Ecken (die glatten Fortsetzungen zweier in p_k angrenzender Kurven liegen in $\text{Ext } \Gamma$) und einspringende Ecken (die glatten Fortsetzungen zweier in p_k angrenzender Kurven liegen in $\text{Int } \Gamma$) unterteilt werden. Sei $a :=$ die Anzahl der ausspringenden Ecken, $e :=$ die Anzahl der einspringenden Ecken, a bzw. $e = 0$, falls Γ glatt ist. Wir nennen ein solches Γ auch ein \mathcal{V}, \mathcal{W} -Polygon (beachte, daß die ein Polygon konstituierenden Teilbögen nur entlang eines Linienfeldes liegen können). H. Hamburger beweist nun die Unabhängigkeit der Differenz $r = a - e$ vom speziell gewählten \mathcal{V}, \mathcal{W} -Polygon, und definiert den Index r_p des Punktes p als eben diese Differenz; dabei untersucht er auch allgemeinere Arten von Singularitäten als die oben betrachteten (s. Abschnitte 1–7 aus [Ha24]). Weiterhin gilt ein Analogon der Poincaré-Hopf-Formel: Sind p_1, \dots, p_l endlich viele Singularitäten, so gilt: $\sum_{i=1}^l r_i = \chi(S)$. Betrachten wir nun Singularitäten im Sinne der Definition 2.5.6, so beweist Hamburger weiterhin, daß

r_p gerade ist und die Beziehung $\sum_{i=1}^l (1 - \frac{r_{p_i}}{4}) = \chi(S)$ gilt. Ein Vergleich mit der oben angeführten Indexformel von Poincaré–Hopf ergibt dann:

$$(J) \quad j(p, \mathcal{V}) = j(p, \mathcal{W}) = (1 - \frac{r_p}{4})$$

Mit Hilfe dieses Resultates wollen wir nun einige wichtige Eigenschaften von Nulllinien beweisen.

2.5.14 SATZ. *Auf einer einfach zusammenhängenden Lorentz–Fläche existieren keine geschlossenen Nullkurven.*

Beweis. Angenommen, γ wäre eine geschlossene Nullkurve. Da S einfach zusammenhängend ist, ist S diffeomorph zu \mathbb{R}^2 (2.2.10), d.h. wir können S für U in 2.5.13 nehmen. Betrachten wir γ als \mathcal{X}, \mathcal{Y} –Polygon für ein beliebig fixiertes $p \in \text{Int } \gamma$, so ist $j(p, \mathcal{X}) = 1$ gemäß (J) ($r_p = 0$), aber nach 2.5.11 ist $j(p, \mathcal{X}) = 0$ — Widerspruch. ■

2.5.15 KOROLLAR. *Jede 0–Linie γ auf einer einfach zusammenhängenden Lorentz–Fläche ist eine injektive Immersion.*

Beweis. Gemäß 2.5.5 ist γ entweder injektiv oder die Überlagerung eines geschlossenen Nullbogens; letztere kann aber im Hinblick auf 2.5.14 nicht existieren. Da $\gamma'(t)$ lichtartig für alle t ist, ist γ regulär, und die Behauptung folgt. ■

2.5.16 LEMMA. *Sei (S, h) eine einfach zusammenhängende Lorentz–Fläche, (U, χ) eine zu h assoziierte Rechteckkarte, γ eine Nullkurve. Dann ist der Schnitt zwischen U und γ entweder leer, oder eine Nullkurve, die jede Nullkurve entgegengesetzten Typs maximalen Definitionsbereiches in U genau einmal schneidet.*

Beweis. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß γ eine X –Kurve ist. Angenommen, $U \cap \gamma \neq \emptyset$. Wir identifizieren im folgenden U mit $\chi(U) = (a, b) \times (c, d)$. Sei $p = (x, y)$ ein Punkt aus dem Durchschnitt. Bezeichne γ_x die maximale Nullkurve in U , die p enthält. Dann ist

$$|\gamma| \cap U = \bigcup_{q \in |\gamma| \cap U} |\gamma_q|.$$

Wir wählen zwei Punkte $p_1 = (x^*, y_1) = \gamma(t_1)$ und $p_2 = (x^*, y_2) = \gamma(t_2)$ aus $|\gamma| \cap U$, wobei $a < x^* < b$. Sei $\hat{\gamma} = \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Wir behaupten, daß y_1 und y_2 so gewählt werden können, daß $|\gamma_p| \cap |\hat{\gamma}| = \emptyset$ für alle $p = (x, y)$ mit $y_1 < y < y_2$. Angenommen, dies wäre nicht möglich. Dann müssen unendlich viele solcher y existieren. Fixiere eine beliebige Riemannsche Metrik g auf U . Da $\hat{\gamma}'(t) = \gamma'(t)$ für alle t und

$\hat{\gamma}$ kompakten Definitionsbereich hat, ist $\hat{\gamma}$ von endlicher, positiver Länge (wobei wie üblich die Länge durch $L(\hat{\gamma}) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_t(\dot{\hat{\gamma}}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))} dt$ definiert ist), genau wie jedes Teilstück γ_p . Da aber $\hat{\gamma}$ unendlich viele Teilstücke der Form γ_p enthalten muß, kann die Länge von $\hat{\gamma}$ nicht endlich sein — Widerspruch. Somit erhalten wir ein X, Y -Polygon Γ , daß aus $\hat{\gamma}$ und der Y -Nullkurve $x \equiv x^*$ gebildet wird. Somit hat Γ aber maximal zwei Ecken, d.h. $r \neq 4$, also $j(p, \mathcal{X}) \neq 0$ für alle $p \in \text{Int } \Gamma$ — Widerspruch. Also ist $|\gamma| \cap U = |\gamma_p|$ für ein $p \in |\gamma| \cap U$, und die Behauptung folgt. ■

2.5.17 SATZ. *Sei (S, h) eine einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche. Dann schneiden sich zwei verschiedene Nulllinien in höchstens einem Punkt.*

Beweis. Seien γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Nulllinien. Angenommen, ihr Schnitt ist nicht leer. Dann müssen nach 2.5.4 γ_1 und γ_2 unterschiedlichen Typs sein. Nach 2.5.16 liegen die Schnittpunkte isoliert, so daß t_1 und t_2 derart existieren, daß für $t \in (t_1, t_2)$ γ_1 nicht γ_2 schneidet. Wir können dann einen geschlossenen Bogen Γ bilden, indem wir γ_1 zwischen $\gamma_1(t_1)$ und $\gamma_2(t_2)$ folgen und γ_2 von $\gamma_2(t_2)$ nach $\gamma_1(t_1)$ zurückgehen. Dann hat Γ zwei Ecken, und wir erhalten einen Widerspruch mit dem gleichen Argument wie in 2.5.14. ■

2.5.18 SATZ. *Sei (S, h) eine einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche, und $\gamma : I \rightarrow S$ eine Nulllinie. Dann ist (I, γ) eine Untermannigfaltigkeit.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß γ eine Einbettung ist; im Hinblick auf 2.5.15 genügt es zu zeigen, daß γ eigentlich ist, d.h. ist K eine kompakte Teilmenge von S , so ist $\gamma^{-1}(K)$ beschränkt (und damit kompakt) in I . Sei also K kompakt mit $|\gamma| \cap K \neq \emptyset$ (sonst ist die Behauptung klar). Wir müssen zeigen, daß ein echtes Unterintervall $(c, d) \subsetneq I = (a, b)$ mit $\gamma(t) \notin K$ für alle $t \notin (c, d)$ existiert. Angenommen, dies kann für kein $c, d \in I$ erfüllt werden. Dann würde aber eine Folge vom Typ $t_k \rightarrow b^-$ oder $t_k \rightarrow a^+$ existieren, so daß $\gamma(t_k) \in K$ gegen ein $q \in K$ konvergierte. Sei U eine zu h assoziierte Rechteckkartenumgebung von q . Dann wäre aber gemäß 2.5.17 die durch q verlaufende Nulllinie gleichen Typs in γ enthalten, im Widerspruch zur Maximalität von γ . ■

2.5.19 SATZ. *Sei (S, h) eine einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche. Dann kann ein zeitartiger Bogen auf S nicht geschlossen sein.*

Wir beweisen zuerst das

2.5.20 LEMMA. Sei (S, h, T_0) eine zeitorientierte Lorentz-Fläche und $\gamma : [a, b] \rightarrow S$ eine injektive, zeitartige und zukunftsgerichtete Kurve. Dann kann $\gamma'(t)$ zu einer Zeitorientierung auf S fortgesetzt werden.

Beweis. Da γ lokal eine Einbettung ist, kann $\gamma'(t)$ lokal um jeden Punkt zu einem Vektorfeld fortgesetzt werden (dies folgt z.B. aus dem Satz über lokale Immersionen), welches aus Stetigkeitsgründen zeitartig und zukunftsgerichtet ist, falls die Umgebung um $\gamma(t)$ nur klein genug gewählt wird. Da $|\gamma|$ kompakt ist, finden wir endlich viele Punkte t_1, \dots, t_n und Umgebungen U_i von $\gamma(t_i)$, $i = 1, \dots, n$, auf denen zeitartige zukunftsgerichtete Vektorfelder T_i mit $T_i(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ für $\gamma(t) \in U_i$ existieren. Weil γ injektiv ist, gilt für

$$\gamma(t) \in U_i \cap U_j : T_i(\gamma(t)) = \gamma'(t) = T_j(\gamma(t)) \quad (*).$$

Setze $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$. Sei K eine kompakte Teilmenge von S mit $|\gamma| \subset K \subset U$. Wähle eine der Familie $\{K^c, U_1, \dots, U_n\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$, wobei $\text{supp } \varphi_0 \subset K^c$ und $\text{supp } \varphi_i \subset U_i$ für $i = 1, \dots, n$. Definiere ein glattes Vektorfeld durch

$$T := \varphi_0 T_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i T_i.$$

Dann ist

$$h(T, T) = \varphi_0^2 h(T_0, T_0) + 2\varphi_0 \sum_{i=1}^n \varphi_i h(T_0, T_i) + \sum_{i,j=1}^n \varphi_i \varphi_j h(T_i, T_j) < 0,$$

denn $h(T_i, T_j) < 0$, weil T_i zeitäquivalent zu T_j auf dem gemeinsamen Definitionsbereich ist und nicht alle $\varphi_i = 0$ sind. Außerdem ist

$$h(T, T_0) = \varphi_0 h(T_0, T_0) + \sum_{i=1}^n \varphi_i h(T_i, T_0) < 0,$$

d.h. T ist zeitäquivalent zu T_0 . Schließlich gilt

$$T(\gamma(t)) = \underbrace{\varphi_0(\gamma(t)) T_0(\gamma(t))}_{=0} + \sum_{i=1}^n \varphi_i(\gamma(t)) T_i(\gamma(t)) \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \varphi_i(\gamma(t)) \gamma'(t) = \gamma'(t),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Beweis von Satz 2.5.19. Angenommen, $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ wäre ein geschlossener, zeitartiger Bogen. Dann existierten c, d mit $a \leq c < d \leq b$ so, daß $\alpha(c) = \alpha(d)$ und $\alpha|_{(c,d)}$ injektiv ist. Sei $t_0 \in (c, d)$, und setze $p := \alpha(t_0)$. Da $\alpha'(t_0)$ zeitartig ist, sind beide Nullräume transversal zu $\alpha'(t_0)$ in p . Da $\alpha \cup \text{Int } \alpha$ kompakt ist, folgt aus 2.5.18, daß die X -Nulllinie l (eventuell entgegen der natürlichen Orientierung parametrisiert) durch p in $\text{Int } \hat{\alpha}$ eintritt und ein erster Punkt $q = \alpha(t_1)$ ($t_1 \in (c, d)$) nach p existiert,

an dem $l|\alpha|$ wieder schneidet. Sei $\hat{\alpha} := \alpha|_{[t_0, t_1]}$. Nach Lemma 2.5.20 existiert ein glattes, zeitartiges Vektorfeld T auf S mit $T(\hat{\alpha}(t)) = \hat{\alpha}'(t)$. Wir erhalten ein T, X -Polygon, und wie oben folgert man einen Widerspruch. ■

2.5.21 SATZ. Sei (S, h) eine einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche. Sei γ eine Nulllinie und α eine zeitartige Kurve. Dann schneiden sich α und γ höchstens einmal.

Beweis. Angenommen, α und γ schneiden sich in mindestens zwei Punkten. Da die Schnittpunkte isoliert liegen müssen (denn α und γ haben nicht denselben kausalen Charakter), können wir t_1 und t_2 so finden, daß $|\alpha_{(t_1, t_2)}| \cap \gamma = \emptyset$. Das gleiche Argument wie in 2.5.17 erhält die Behauptung. ■

2.5.3 Nulllinien auf kompakten Lorentz-Flächen

In diesem Abschnitt wenden wir vor allem Methoden aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und dynamischer Systeme an, wie sie von Poincaré, Bendixson und Denjoy entwickelt wurden. Interessanterweise untersuchten Poincaré und Bendixson topologische Indices von Singularitäten im Zusammenhang mit Kurvenscharen auf Flächen, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung definiert waren (vgl. die Anmerkung Hamburgers Abschnitt 6, I. Teil in [Ha24] bzw. die Originalarbeiten [Po81–86] von Poincaré).

Alle in diesem Abschnitt betrachteten Flüsse seien auf ganz \mathbb{R} definiert.

2.5.22 DEFINITION. Sei Z ein glattes Vektorfeld auf S mit Fluß φ_t . Für ein $x \in S$ soll $C(x)$ die Bahn von x bezeichnen, d.h. $C(x) = \{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Weiterhin sei $C^\pm(x) = \{\varphi_t(x) \mid t \in \mathbb{R}_\pm\}$. Ist $C(x) = \{x\}$, so nennen wir x stationär. $x_\infty \in S$ ist ein ω -Punkt von $C^+(x)$, falls eine Folge $0 < t_1 < t_2 < \dots$ mit $t_n \rightarrow \infty$ und $\varphi_{t_n}(x) \rightarrow x_\infty$ existiert. Die Menge aller ω -Punkte von $C^+(x)$ bezeichnen wir mit $\Omega(x)$ (nach Kapitel VII Aufgabe 11.3 in [Hm82] ist sie abgeschlossen und, falls $\overline{C^+(x)}$ kompakt ist, sogar zusammenhängend). Entsprechend kann man α -Punkte für streng monoton fallende Folgen $t_n \searrow \text{infy}$ (d.h. $0 > t_1 > t_2 > \dots$ und $t_n \rightarrow -\infty$) definieren, deren Menge wir mit $A(x)$ bezeichnen.

Eine Teilmenge $N \subset S$ heißt invariant unter φ_t , falls $\varphi_t(N) = N$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann nennt man N minimal genau dann, wenn (i) N eine abgeschlossene, invariante Menge ist und (ii) N keine echte, abgeschlossene, invariante Teilmenge enthält. Jede nichtleere, kompakte und invariante Menge enthält eine nichtleere minimale Menge (Lemma 12.2 aus Kapitel VII in [Hm82]).

2.5.23 SATZ (A.J.Schwartz). Sei M^2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit und φ_t ein Fluß. Sei N eine nichtleere, kompakte, minimale Menge (bezüglich φ_t). Dann ist N entweder

- ein stationärer Punkt $x_0 \in M^2$
- eine geschlossene, periodische Bahn homöomorph zu S^1 oder
- M^2 selbst.

Beweis. Siehe [Hm82], Kap. VII, Theorem 12.1. ■

2.5.24 BEMERKUNG. (vgl. [Hm82], S.185) Im Fall (iii) ist $M^2 = N$ kompakt und der Fluß hat keine stationären Punkte bzw. das den Fluß definierende Vektorfeld keine Nullstelle. Somit folgt $\chi(M^2) = 0$, d.h. M^2 ist vom Genus 1 (Indexformel von Euler–Poincaré) und daher homöomorph zu einem Torus oder einer Kleinschen Flasche. Man kann weiterhin zeigen, daß auf einer Kleinschen Flasche ein Fluß ohne stationäre Punkte notwendiger Weise eine periodische Bahn aufweisen muß, und daher N doch nicht minimal wäre. Also ist M^2 im Fall (iii) ein Torus.

2.5.25 SATZ (Poincaré–Bendixson). Sei M^2 eine zweidimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit, φ_t ein Fluß und $x_0 \in M^2$. Angenommen, $\Omega(x_0) \neq M^2$ ist eine nichtleere, kompakte Menge ohne stationäre Punkte. Dann ist $\Omega(x_0)$ eine Jordankurve und $C^+(x_0)$ strebt asymptotisch gegen $\Omega(x_0)$, d.h. für jedes $x \in \Omega(x_0)$ existiert eine zu $\Omega(x_0)$ transversale Kurve durch x und die Schnittpunkte von $C^+(x_0)$ mit der transversalen Kurve streben monoton gegen x .

Beweis. Siehe [Hm82], Kap.VII, Theorem 12.2. ■

Wir betrachten nun eine kompakte, zeitorientierbare Lorentz–Fläche $(S, [h])$. Dann existieren zwei globale, lichtartige und linear unabhängige Vektorfelder X und Y , die die durch $[h]$ erzeugten C^∞ –Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} aufspannen. S identifizieren wir gemäß 2.2.10 mit $\mathbb{R}^2/\Gamma(a, b)$. Insbesondere haben wir dann globale Koordinaten (x_1, x_2) , bezüglich denen wir

$$X = X_1\partial_{x_1} + X_2\partial_{x_2} \text{ und } Y = Y_1\partial_{x_1} + Y_2\partial_{x_2}$$

für $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in C^\infty(S)$ schreiben können. Da nach Definition X und Y keine Nullstellen aufweisen, gilt $X_1^2 + X_2^2 \neq 0$ bzw. $Y_1^2 + Y_2^2 \neq 0$, und es existieren für die entsprechenden Flüsse keine stationären Punkte. Weiterhin ist jede minimale Menge kompakt. Also folgt aus den vorangehenden Theoremen das

2.5.26 KOROLLAR. Sei $(S, [h])$ eine kompakte, zeitorientierbare Lorentz-Fläche. Dann ist eine Nulllinie entweder (i) dicht oder (ii) eine geschlossene Kurve, die nicht homotop zu einem Punkt ist, oder (iii) Asymptote einer geschlossenen Nullkurve gleichen Typs.

Beweis. Sei $p \in S$ und betrachten wir o.B.d.A. die X -Linie durch p ; die Argumentation für Y -Linien verläuft analog. Dann ist $\Omega(p)$ eine kompakte Menge ohne stationäre Punkte. Ist $\Omega(p) = S$, so ist die X -Linie durch p dicht in S . Ist $\Omega(p)$ nichtleer und echt in S enthalten, dann definiert $\Omega(p)$ eine Jordankurve Γ und die X -Linie durch p strebt asymptotisch gegen Γ im Sinne von Theorem 2.5.25. Sei $q \in \Omega(p)$. Dann ist:

$$|\Gamma| = |X\text{-Kurve, die durch } q \text{ geht}|.$$

Falls dies nicht gälte, so wäre die durch q verlaufende X -Kurve transversal zu Γ , und würde daher die an Γ asymptotisch verlaufenden X -Linien schneiden — Widerspruch.

Es bleibt der Fall $\Omega(p) = \emptyset$. Dann ist $\overline{C(p)} = C(p)$ eine minimale Menge, und ist daher nach den Theoremen 2.5.23 und 2.5.5 eine geschlossene Nullkurve. Wäre diese homotop zu einem Punkt, so erhielten wir analog zu 2.5.14 einen Widerspruch. ■

Wie kann man nun diese drei Fälle unterscheiden? Wir machen dazu folgende

ANNAHME. X_1 bzw. Y_1 sind stets ungleich 0 (und o.B.d.A. strikt größer 0). Dies gilt z.B., falls ∂_{x_2} niemals lichtartig ist.

Um die Notation zu vereinfachen, behandeln wir nur die X -Linien. Alle Aussagen gelten mutatis mutandis auch für Y -Linien. Um den Fluß durch einen gegebenen Punkt $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ zu berechnen, müssen wir die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= X_1(x(t), y(t)), & x(0) &= \xi_1 \\ \dot{y}(t) &= X_2(x(t), y(t)), & y(0) &= \xi_2\end{aligned}$$

lösen. Aufgrund unserer Annahme sind die durch diese Differentialgleichung definierten Bahnen dieselben wie die durch die Gleichung

$$(P) \quad \frac{d}{dx}y = \frac{X_2(x, y)}{X_1(x, y)}$$

gegebenen (vgl. auch [Hm82] S.196 oder [Hl68], S.64 ff.): Ist $x' \neq 0$, so können wir lokal nach $t \equiv t(x)$ auflösen und erhalten $y(x) \equiv y(t(x))$. Anwenden der Kettenregel ergibt $y'(x) = y'(t)t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Die durch (P) definierten Bahnkurven sind — für beliebige Anfangsbedingungen — auf ganz \mathbb{R} definiert, da X_1 und X_2 beschränkt sind. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß sie die Kurve $\Delta = \{x_1 \equiv 0\}$ schneiden (vgl. [Hm82], S.196 ff., insbesondere Lemma VII.14.1 und Bedingung (H₂), oder [Hl68],

S.66). Sei nun $\xi \in \Delta \cap S$. Wir betrachten die eindeutige Lösung $v(u, \xi)$ von (P) zum Anfangswert $v(0) = \xi$.

2.5.27 DEFINITION UND THEOREM. *Die Zahl*

$$\rho := \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{v(u, \xi)}{u}$$

existiert und ist unabhängig von ξ . ρ wird Rotationszahl genannt (für eine Diskussion dieses Namens siehe z.B. [Ar88] S.104, ff. oder [Hm82], Theorem 13.3).

Beweis. Siehe z.B. [Hl68] Abschnitt II.2, Theorem 2.1 oder [Ar88], S.104 ff. ■

Dann gilt:

2.5.28 THEOREM.

(i) Ist $\rho \in \mathbb{Q}$, so existiert mindestens eine geschlossene X -Linie und jede nicht geschlossene X -Linie ist eine Asymptote einer geschlossenen X -Linie im Sinne von Theorem 2.5.25.

(ii) Ist $\rho \notin \mathbb{Q}$, so ist S eine minimale Menge und jede Halbbahn $C^+(x)$ liegt dicht in S .

Beweis. Siehe [Hl68], Abschnitt II.2 Theoreme 2.2 und 2.3, sowie die Bemerkung S.73, [De32], oder [Hm82], Kapitel VII Theoreme 14.1 und 14.2. ■

2.6 Orthoforme und parakomplexe Strukturen

Wir wollen nun untersuchen, wie man die durch \mathfrak{A}_h^0 bzw. \mathfrak{A}_h induzierten Übergangsfunktionen analytisch charakterisieren kann.

2.6.1 SATZ. Sei $\mathcal{L} = (S, h)$ eine Lorentz-Fläche. Seien $(U, \chi = (x, y))$ und $(V, \eta = (s, t))$ zwei Karten aus \mathfrak{A}_h mit $U \cap V \neq \emptyset$. Dann erfüllt die Übergangsfunktion $\eta \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap V) \rightarrow \eta(U \cap V)$ folgendes Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{x_1}(\eta \circ \chi^{-1})_1 &= \partial_{x_2}(\eta \circ \chi^{-1})_2 \\ \partial_{x_2}(\eta \circ \chi^{-1})_1 &= \partial_{x_1}(\eta \circ \chi^{-1})_2 \end{aligned} \right\} (PCR)$$

(wobei $(\eta \circ \chi^{-1})_i$ die i -te Komponente von $\eta \circ \chi^{-1}$ und (x_1, x_2) das Standardkoordinatensystem des \mathbb{R}^2 ist).

Beweis. Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} s = \partial_{x_1}(s \circ \chi^{-1}) = \partial_{x_1}(\eta \circ \chi^{-1})_1$$

(und analog für $\frac{\partial}{\partial y} s$, $\frac{\partial}{\partial x} t$ und $\frac{\partial}{\partial y} t$) können wir (PCR) wie folgt umschreiben:

$$(PCR) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}s = \frac{\partial}{\partial y}t \\ \frac{\partial}{\partial y}s = \frac{\partial}{\partial x}t \end{cases}$$

Für die Differentiale gilt:

$$(1) \quad ds = \frac{\partial}{\partial x}s dx + \frac{\partial}{\partial y}s dy \quad \text{und} \quad dt = \frac{\partial}{\partial x}t dx + \frac{\partial}{\partial y}t dy.$$

Auf $U \cap V$ läßt sich h in Koordinaten

$$\begin{aligned} h &= B(-ds^2 + dt^2) \stackrel{(1)}{=} B(-[(\frac{\partial}{\partial x}s)^2 - (\frac{\partial}{\partial x}t)^2]dx^2 \\ &\quad + 2[-\frac{\partial}{\partial x}s \frac{\partial}{\partial y}s + \frac{\partial}{\partial x}t \frac{\partial}{\partial y}t]dxdy + [(\frac{\partial}{\partial y}t)^2 - (\frac{\partial}{\partial y}s)^2]dy^2) \\ &= C(-dx^2 + dy^2) \end{aligned}$$

schreiben. Wegen $B, C > 0$ gilt auf $U \cap V$:

$$(2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}s\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}t\right)^2 \equiv \frac{C}{B} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y}t\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y}s\right)^2$$

und

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x}s \frac{\partial}{\partial y}s - \frac{\partial}{\partial x}t \frac{\partial}{\partial y}t \equiv 0$$

Wir schreiben (3) als Determinantengleichung:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}s & \frac{\partial}{\partial y}t \\ \frac{\partial}{\partial x}t & \frac{\partial}{\partial y}s \end{pmatrix} = 0$$

Also sind die Vektoren $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}s \\ \frac{\partial}{\partial x}t \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}t \\ \frac{\partial}{\partial y}s \end{pmatrix}$ linear abhängig, d.h. wir erhalten

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}s = f \frac{\partial}{\partial y}t \\ \frac{\partial}{\partial x}t = f \frac{\partial}{\partial y}s \end{cases}$$

für ein $f \in C^\infty(U \cap V)$, $f \neq 0$. Da wir nur orientierte Karten betrachten, ist

$$\det D(\eta \circ \chi^{-1}) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}s & \frac{\partial}{\partial y}s \\ \frac{\partial}{\partial x}t & \frac{\partial}{\partial y}t \end{pmatrix} \stackrel{(4)}{=} f[(\frac{\partial}{\partial y}t)^2 - (\frac{\partial}{\partial y}s)^2] \stackrel{(2)}{=} f \cdot \frac{C}{B} > 0,$$

und daher gilt $f > 0$. Aus (2) folgt nun mit (4) insbesondere, daß

$$f^2 \left(\frac{\partial}{\partial y}t\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}t\right)^2 \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y}t\right)^2 - \frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}t\right)^2$$

und somit

$$(f^2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial y}t\right)^2 + \left(\frac{1}{f^2} - 1\right) \left(\frac{\partial}{\partial x}t\right)^2 \equiv 0$$

ist. Für $f(p) \neq 1$ folgt $\frac{\partial}{\partial y} t(p) = \frac{\partial}{\partial x} t(p) = 0$ und wegen (4) auch $\frac{\partial}{\partial y} s(p) = \frac{\partial}{\partial x} s(p) = 0$. Also gilt in diesem Fall (PCR). Für $f(p) = 1$ gilt (PCR) wegen (4) ohnehin, woraus die Behauptung folgt. ■

2.6.2 KOROLLAR. *Auf jeder Lorentz-Fläche \mathcal{L} existiert eine Überdeckung aus Karten $\{(U_\alpha, \chi_\alpha)\}$, deren induzierte Übergangsfunktionen (PCR) erfüllen und die maximal bezüglich dieser Eigenschaft ist.*

Bevor wir uns der Untersuchung nach möglichen Abhängigkeiten zwischen h und dem in 2.6.1 ausgezeichneten Atlas widmen, wollen wir uns der oben formulierten Frage zuwenden, welcher Differentiationsbegriff sich hinter (PCR) verbirgt. Die formale Ähnlichkeit mit den Cauchy-Riemann-Gleichungen, die in der Differentiationstheorie über der Clifford-Algebra $(\mathbb{R}^2, -e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \simeq \mathbb{C}$ auftreten, läßt bereits vermuten, daß sich die Gleichungen (PCR) ebenfalls aus dem Differentiationsbegriff einer gewissen Clifford-Algebra ergeben.

2.6.3 DEFINITION. *Die dem Paar $(\mathbb{R}^2, e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$ zugeordnete Clifford-Algebra \mathbb{L} heißt Lorentz-Algebra.*

2.6.4 BEMERKUNG. Analog zu den komplexen Zahlen kann man \mathbb{L} mit der Algebra $\{u + \tau v \mid u, v \in \mathbb{R}^2\}$ identifizieren, wobei $\tau^2 = 1$ gilt, d.h. wir haben folgende Verknüpfungsregeln:

$$\begin{aligned} (u_1 + \tau v_1) + (u_2 + \tau v_2) &= (u_1 + u_2) + \tau(v_1 + v_2) \\ (u_1 + \tau v_1) \cdot (u_2 + \tau v_2) &= (u_1 u_2 + v_1 v_2) + \tau(u_1 v_2 + u_2 v_1) \end{aligned}$$

\mathbb{L} ist also eine assoziative, kommutative Algebra mit Eins über \mathbb{R} . Aber \mathbb{L} ist kein Körper: In der Tat ist z.B. für $0 \neq u \in \mathbb{R}$ $u + \tau u$ und $u - \tau u \neq 0$, aber $(u + \tau u) \cdot (u - \tau u) = 0$, d.h. \mathbb{L} ist nicht nullteilerfrei. Mit K bezeichnen wir die Menge der Nullteiler in \mathbb{L} . \mathbb{L} hat — als 2-dimensionaler reeller Vektorraum — eine natürliche Topologie. Dies erlaubt folgenden Differentiationsbegriff (vgl. auch [Kd97] Abschnitte 2.1–2.3 und die dort zitierten Quellen):

2.6.5 DEFINITION. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ eine Abbildung. f heißt parakomplex differenzierbar in z_0 , falls der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z - z_0 \in \mathbb{L} \setminus K}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man diesen Limes die parakomplexe Ableitung von f in z_0 und schreibt $f'(z_0)$. f heißt parakomplex differenzierbar auf Ω , falls f parakomplex differenzierbar in jedem Punkt aus Ω ist. f heißt n -fach parakomplex differenzierbar, wenn es Funktionen $f^{(i)} : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$, $i = 0, \dots, n$ mit $f^{(0)} = f$ und $f^{(i)} = (f^{(i-1)})'$ für $i = 0, \dots, n-1$ gibt. Ist f für alle $n \in \mathbb{N}$ n -fach parakomplex differenzierbar, so heißt f unendlich oft parakomplex differenzierbar.

Man kann — analog zur komplexen Differentiationstheorie — parakomplexe Funktionen als differenzierbare Funktion über \mathbb{R}^2 auffassen, deren Differentiale \mathbb{L} -linear sind. Dann erhalten wir die zu den Cauchy–Riemann–Gleichungen analoge Charakterisierung der parakomplexen Differenzierbarkeit:

2.6.6 SATZ. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$ eine durch

$$f(x_1 + \tau x_2) = a(x_1, x_2) + \tau b(x_1, x_2)$$

gegebene Abbildung, wobei $a, b \in C^1$ (im reellen Sinne) sind. Dann ist f parakomplex differenzierbar genau dann, wenn

$$(PCR) \quad \begin{cases} \partial_{x_1} a = \partial_{x_2} b \\ \partial_{x_2} a = \partial_{x_1} b \end{cases}$$

gilt.

2.6.7 BEMERKUNG. Im Gegensatz zum komplexen Fall impliziert Parakomplexität keinerlei Regularitätseigenschaften, und es existieren parakomplexe Abbildungen jeder Stufe (vgl. Bemerkung vor Theorem 1 in [Kd97]). Ist allerdings f wie oben durch $f = a + \tau b$ mit $a, b \in C^j(\Omega)$ gegeben, so ist f j -fach parakomplex differenzierbar. Dies sieht man wie folgt ein: Faßt man f als reelle Funktion mit Komponenten a und b auf, so gilt für das Differential in $z \in \Omega$:

$$Df_z = \begin{pmatrix} (\partial_{x_1} a)_z & (\partial_{x_2} a)_z \\ (\partial_{x_1} b)_z & (\partial_{x_2} b)_z \end{pmatrix}.$$

Als \mathbb{R} -lineare Abbildung interpretiert, ist

$$Df_z(u + \tau v) = ((\partial_{x_1} a)_z u + (\partial_{x_2} a)_z v) + ((\partial_{x_1} b)_z u + (\partial_{x_2} b)_z v) \tau.$$

Unter Ausnutzung der parakomplexen Cauchy–Riemann–Gleichungen können wir also Df_z als \mathbb{L} -lineare Abbildung, d.h. als Multiplikation mit $(\partial_{x_1} a)_z + (\partial_{x_1} b)_z \tau$ auffassen, d.h.

$$f'(z) = (\partial_{x_1} a)_z + (\partial_{x_1} b)_z \tau : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}.$$

Sind dann a und b mindestens C^2 , so folgt aus dem Satz von Schwarz und (PCR), daß f' parakomplex differenzierbar ist. Insbesondere folgt:

2.6.8 KOROLLAR. *Sind die Koeffizienten in Theorem 2.6.6 glatt und erfüllen sie (PCR), so ist f unendlich oft parakomplex differenzierbar.*

2.6.9 BEISPIEL.

Sind χ und η zwei isothermale Koordinatensysteme einer Lorentz-Fläche, so sind die Übergangsfunktionen gemäß dem Kriterium aus 2.6.6 parakomplex. Damit haben wir faktisch folgenden Satz bewiesen:

2.6.10 SATZ UND DEFINITION. *Jede Lorentz-Fläche besitzt eine offene Überdeckung aus Karten $\{(U_\nu, \chi_\nu)\}_{\nu \in A}$ mit Diffeomorphismen $\chi_\nu : U_\nu \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren induzierte Übergangsfunktionen unendlich oft parakomplex differenzierbar sind. Die Familie $\Lambda = \{(U_\nu, \chi_\nu)\}_{\nu \in A}$ heißt parakomplexe Struktur auf S . Jede solche Struktur zeichnet einen orientierten, parakomplexen Atlas aus (d.h. die Übergangsfunktionen sind parakomplex mit positiver Jacobi-Determinante).*

Wir untersuchen nun die Übergangsfunktionen, die sich aus der Existenz von isotropen Koordinaten ergeben:

2.6.11 DEFINITION. *Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{E}^{2,1}$, versehen mit den isotropen Standardkoordinaten (x, y) . Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ heißt C^j -orthoform oder C^j -netzerhaltend für $j = 1, 2, \dots, \infty$ genau dann, wenn für alle $p \in U$ eine Rechteckumgebung $R = (a, b) \times (c, d)$ in U und zwei Funktionen $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ aus C^j derart existieren, daß*

$$f|_R(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$$

und

$$\det(Df|_R) = \alpha' \beta' \neq 0$$

ist (sog. "Determinantenbedingung"). Ist die Jacobi-Determinante positiv, so heißt f positiv orthoform. Wir nennen α und β auch die lokale Darstellung von f . Im folgenden verstehen wir unter orthoform stets C^∞ -orthoform.

2.6.12 BEMERKUNG. Jede C^j -orthoforme Funktion ist ein lokaler C^j -Diffeomorphismus ($j = 1, 2, \dots; \infty$) auf ihr Bild, wobei f injektiv auf dem maximalen Definitionsbereich der lokalen Darstellung ist.

2.6.13 SATZ. Sei $j = 1, 2, \dots; \infty$. Dann ist $f : U \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ C^j -orthoform genau dann, wenn f jede C^j -Parametrisierung einer X - bzw. Y -Kurve in U (aufgefaßt als Minkowski-Fläche) auf eine C^j -Parametrisierung einer X - bzw. Y -Kurve in $\mathbb{E}^{2,1}$ abbildet (dies motiviert die Bezeichnung "orthoform" bzw. "netzerhaltend").

Beweis. \implies Sei $(l, y) : I \rightarrow U$, $t \mapsto (l(t), y)$ eine C^j -Parametrisierung einer X -Kurve (die Argumentation für Y -Kurven verläuft analog). Dann ist $f(l, y) : I \rightarrow U$, $t \mapsto f(l(t), y)$ lokal injektiv, C^j und regulär, da f und (l, t) es sind. Weil I zusammenhängend ist, genügt es zu zeigen, daß $pr_2 \circ f(l, y)$ lokal konstant ist; dann parametrisiert $f(l, y)$ eine X -Kurve. Nach Voraussetzung können wir aber lokal $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ schreiben, d.h.

$$pr_2 \circ f(l, y)(t) = pr_2(\alpha \circ l(t), \beta(y)) = \beta(y) = const.$$

\Leftarrow Sei $p = (x_0, y_0) \in U$ und $R = (a, b) \times (c, d) \subseteq U$ eine Rechteckumgebung von p . Dann sind $(\cdot, y_0) : I := (a, b) \rightarrow U$, $x \mapsto (x, y_0)$ und $(x_0, \cdot) : J := (c, d) \rightarrow U$, $y \mapsto (x_0, y)$ (C^∞ -)Parametrisierungen einer X - bzw. Y -Kurve, die nach Voraussetzung auf C^j -Parametrisierungen eines X - bzw. Y -Kurve abgebildet werden, d.h. wir haben

$$f(x, y_0) = (\alpha(x), const(y_0)) \text{ und } f(x_0, y) = (const(x_0), \beta(y))$$

Da $(\alpha(x), const(y_0))$ und $(const(x_0), \beta(y))$ C^j -Parametrisierungen sind, definieren $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen der Klasse C^j , deren Ableitungen ungleich null sind. Wir behaupten:

$$\text{Auf } R \text{ gilt: } f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)).$$

Sei dazu $(x, y) \in R$. Dann liegen $f(x, y)$ und $f(x_0, y)$ auf der gleichen X -Linie, also muß

$$pr_2 \circ f(x, y) = pr_2 \circ f(x_0, y) = \beta(y)$$

gelten. Genauso liegen $f(x, y)$ und $f(x, y_0)$ auf der gleichen Y -Linie, also ist

$$pr_1 \circ f(x, y) = pr_1 \circ f(x, y_0) = \alpha(x).$$

Es folgt $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. ■

2.6.14 BEMERKUNG. Aus dem Beweis von 2.6.13 erhalten wir sogar etwas mehr als wir behauptet haben: Jede orthoforme Funktion beliebiger Stufe besitzt auf jedem in ihrem Definitionsbereich einbeschriebenem Rechteck eine lokale Darstellung gemäß 2.6.11 und ist dort insbesondere injektiv (man vergleiche dies mit der Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen in Potenzreihen auf den im Definitionsbereich maximal einbeschriebenen Kreisscheiben). Dies läßt sich leicht verschärfen, wobei wir die durch die Netzerhaltung bewirkte "Starrheit" orthoformer Funktionen benutzen:

2.6.15 DEFINITION UND BEMERKUNG. Sei \mathcal{L} eine Lorentz-Fläche und γ eine Nullkurve in \mathcal{L} . Dann nennen wir die Menge

$$\text{span}(\gamma) := \bigcup_{\substack{\delta \text{ Nulllinie in } \mathcal{L} \text{ entge-} \\ \text{engesetzten Typs, } \delta \cap \gamma \neq \emptyset}} \delta$$

den Spann von γ in \mathcal{L} . Dabei ist $\text{span}(\gamma)$ für jede Nullkurve γ offen.

2.6.16 KOROLLAR 1. Sei γ eine Nullkurve in $U \subset \mathbb{E}^{2,1}$ und f orthoform. Dann ist f auf $\text{span}_U(\gamma)$ injektiv.

Beweis. Um die Notation zu fixieren, wollen wir γ o.B.d.A. als X -Kurve annehmen (der Beweis verläuft analog für Y -Kurven). Seien $p_0 = (x_0, y_0) \in \delta_0$ und $p_1 = (x_1, y_1) \in \delta_1$ zwei Punkte aus $\text{span}_U(\gamma)$ mit

$$(*) \quad f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1).$$

Dann gilt $\delta_0 \cap \gamma = \{(x_0, z)\}$ und $\delta_1 \cap \gamma = \{(x_1, z)\}$ für ein spezielles z . Also liegen $f(x_0, z)$ und $f(x_1, z)$ entlang derselben X -Kurve $f(\gamma)$. Weiterhin werden die Y -Linien δ_0 und δ_1 wegen (*) auf dieselbe Y -Kurve δ abgebildet. Somit folgt

$$\{f(x_0, z)\}, \{f(x_1, z)\} \in f(\gamma) \cap \delta,$$

und daher $f(x_0, z) = f(x_1, z)$, weil $f(\gamma)$ und δ nur einen Schnittpunkt haben können. Sei dann $(x_0, z) = \gamma(t_0)$ und $(x_1, z) = \gamma(t_1)$ mit o.B.d.A. $t_0 < t_1$ und $\hat{\gamma} := \gamma|_{[t_0, t_1]}$. Dann ist $|\hat{\gamma}|$ kompakt in U und kann durch ein Rechteck $R \subseteq U$ eingeschlossen werden. Aber gemäß Bemerkung 2.6.14 ist f injektiv auf R , und somit erhalten wir $(x_0, z) = (x_1, z)$ und insbesondere $x_0 = x_1$. Also liegen p_0 und p_1 entlang derselben Y -Linie in U und wir können ein zweites Rechteck um p_0 und p_1 konstruieren. Es folgt $p_0 = p_1$ und damit die Behauptung. ■

2.6.17 KOROLLAR 2. *Ist f C^j -orthoform, so werden Rechtecke auf Rechtecke abgebildet.*

Beweis. Sei $R := (a, b) \times (c, d)$ ein Rechteck in U . Da $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ für $(x, y) \in R$ gilt und α und β streng monoton sind, ist $\alpha((a, b)) \times \beta((c, d))$ offensichtlich wieder ein Rechteck. ■

2.6.18 KOROLLAR 3.

(i) *Die Hintereinanderausführung zweier C^j -orthoformer Abbildungen ist wieder orthoform.*

(ii) *Ist ein C^j -Diffeomorphismus f C^j -orthoform, so auch f^{-1} .*

Beweis. (i) C^j -Parametrisierungen von X - bzw. Y -Linien werden sukzessive wieder auf solche abgebildet.

(ii) Da f bijektiv und f^{-1} C^j ist, bildet f^{-1} natürlich wieder C^j -Parametrisierungen von X - bzw. Y -Kurven auf ebensolche ab. ■

2.6.19 SATZ. *Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine positive, (glatte) orthoforme Abbildung und F die in 2.3.2 definierte Abbildung. Dann ist $g := F^{-1} \circ f \circ F : F^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine unendlich oft parakomplex differenzierbare Abbildung mit positiver Jacobi-Determinante (wobei wir \mathbb{R}^2 kanonisch mit \mathbb{L} identifiziert haben). Ist umgekehrt $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine unendlich oft parakomplex differenzierbare Abbildung mit positiver Jacobi-Determinante, so ist $f := F \circ g \circ F^{-1} : F(U) \rightarrow \mathbb{R}^2$ positiv orthoform.*

Beweis. Lokal gilt $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. Nach 2.3.2 (i) ist dann

$$F^{-1} \circ f \circ F(u, v) = \frac{1}{2}(\alpha(u+v) - \beta(u-v), \alpha(u+v) + \beta(u-v)).$$

Wir überprüfen (PCR):

$$\begin{aligned} \partial_2(F^{-1} \circ f \circ F)_1 &= \frac{1}{2}(\alpha' + \beta') = \partial_1(F^{-1} \circ f \circ F)_2 \\ \partial_1(F^{-1} \circ f \circ F)_1 &= \frac{1}{2}(\alpha' - \beta') = \partial_2(F^{-1} \circ f \circ F)_2 \end{aligned}$$

Also ist $g := F^{-1} \circ f \circ F$ wegen der Glattheit der Komponenten unendlich oft parakomplex differenzierbar. Außerdem gilt

$$\det(Dg) = \det(D(F^{-1} \circ f \circ F)) = \det(Df) > 0.$$

Sei umgekehrt g eine parakomplexe Funktion wie in der Behauptung.

$$\begin{aligned} F \circ g \circ F^{-1}(x, y) &= \\ (g_1(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}) + g_2(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}), g_2(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}) - g_1(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2})). \end{aligned}$$

Wegen der Parakomplexität von g erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_y[g_1(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}) + g_2(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2})] &= \frac{1}{2}(-\partial_{x_1}g_1 + \partial_{x_2}g_1 - \partial_{x_1}g_2 + \partial_{x_2}g_2) \equiv 0 \\ \partial_x[g_2(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}) - g_1(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2})] &= \frac{1}{2}(\partial_{x_1}g_2 + \partial_{x_2}g_1 - \partial_{x_1}g_2 - \partial_{x_2}g_2) \equiv 0.\end{aligned}$$

Somit sind die Komponenten f_1 und f_2 von $f := F \circ g \circ F^{-1}$ auf jeder Zusammenhangskomponente jeweils nur von x oder nur von y abhängig (*). Sei nun $p \in F(U)$, und $R = (a, b) \times (c, d) \subset F(U)$ ein Rechteck, welches p enthält. Setze $I := (a, b)$ und $J := (c, d)$. Sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Definiere $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(x) := g_1(\frac{x-y_0}{2}, \frac{y_0+x}{2}) + g_2(\frac{x-y_0}{2}, \frac{y_0+x}{2})$$

und

$$\beta(y) := g_2(\frac{x_0-y}{2}, \frac{y+x_0}{2}) - g_1(\frac{x_0-y}{2}, \frac{y+x_0}{2}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}f|_R(x, y) &= (g_1(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}) + g_2(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}), g_2(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2}) - g_1(\frac{x-y}{2}, \frac{y+x}{2})) \\ &\stackrel{(*)}{=} (g_1(\frac{x-y_0}{2}, \frac{y_0+x}{2}) + g_2(\frac{x-y_0}{2}, \frac{y_0+x}{2}), g_2(\frac{x_0-y}{2}, \frac{y+x_0}{2}) - g_1(\frac{x_0-y}{2}, \frac{y+x_0}{2})) \\ &= (\alpha(x), \beta(y)).\end{aligned}$$

Wegen

$$\det(Df) = \det(D(F \circ g \circ F^{-1})) = \det(g) > 0$$

und der Glattheit der Komponenten ist f positiv orthoform. ■

2.6.20 KOROLLAR 1. *Sind χ und η zwei isotrope Koordinatensysteme, so sind die induzierten Übergangsfunktionen orthoform mit positiver Jacobi-Determinante.*

Beweis. Nach 2.3.11 sind $F^{-1} \circ \chi$ und $F^{-1} \circ \eta$ isothermale Koordinatensysteme und somit ist nach 2.6.19

$$F^{-1} \circ \chi \circ (F^{-1} \circ \eta)^{-1} = F^{-1} \circ \chi \circ \eta^{-1} \circ F$$

parakomplex. Da die Jacobi-Determinante von $\chi \circ \eta^{-1}$ echt größer null aufgrund der Orientiertheit sein muß, folgt aus 2.6.19, daß

$$F \circ F^{-1} \circ \chi \circ \eta^{-1} \circ F \circ F^{-1} = \chi \circ \eta^{-1}$$

orthoform ist. ■

2.6.21 KOROLLAR 2 UND DEFINITION. Jede Lorentz–Fläche besitzt eine offene Überdeckung $\{U_\nu\}_{\nu \in A}$ mit Diffeomorphismen $\chi_\nu : U_\nu \rightarrow \mathbb{R}^2$, deren induzierte Übergangsfunktionen orthoform sind. Die Familie $\Phi = \{(U_\nu, \chi_\nu)\}_{\nu \in A}$ heißt orthoforme Struktur auf S . Jede solche Struktur zeichnet einen orientierten, orthoformen Atlas aus (d.h. die Übergangsfunktionen sind orthoform mit positiver Jacobi–Determinante). Sind die Übergangsfunktionen lediglich (positiv) C^j –orthoform, so sprechen wir von einer (orientierten) C^j –orthoformen Struktur. Wir werden im folgenden stets orientierte(C^j)–orthoforme Strukturen betrachten.

Beweis. Nach 2.6.20 ist \mathfrak{A}_h^0 eine orthoforme Überdeckung, die einen orthoformen Atlas induziert. ■

Die Frage liegt nahe, inwieweit die Existenz parakomplexer bzw. orthoformer Strukturen — analog zu den konformen Strukturen im Riemannschen Fall (vgl. 2.1.11)— die Existenz einer Lorentz–Metrik sichert.

2.6.22 SATZ. Sei (S, Φ) eine orthoforme Struktur und $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Phi$ der durch diese ausgezeichnete, orientierte, orthoforme Atlas auf S . Dann gilt:

- (i) Es existiert eine Lorentz–Metrik h auf S mit $\mathfrak{A}_h^0 = \mathcal{A}$
- (ii) Ist \tilde{h} eine weitere Lorentz–Metrik auf S , so gilt $\mathfrak{A}_{\tilde{h}}^0 = \mathcal{A}$ genau dann, wenn $\tilde{h} \sim h$. Orthoforme Atlanten sind also konforme Invarianten.

Beweis. (i) Da S parakompakt ist, können wir eine lokal endliche und abzählbare Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit U_k = Definitionsbereich der Koordinaten $\eta_k = (x_k, y_k)$ aus \mathcal{A} wählen. Auf U_k definieren wir die Lorentz–Metrik $h_k = dx_k dy_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine der Überdeckung \mathfrak{U} untergeordnete Zerlegung der Eins. Definiere

$$h := \sum_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k h_k.$$

Lokal gilt $h = \sum_{i=1}^n \varphi_{k_i} h_{k_i}$, wobei $\bigcap_{i=1}^n U_{k_i} \neq \emptyset$. Dann kann man die Koordinaten (x_{k_i}, y_{k_i}) auf $\bigcap_{i=1}^n U_{k_i}$ durch (x_{k_1}, y_{k_1}) ausdrücken, und wir erhalten

$$h = \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{k_i} B_{k_i k_1} \right) dx_{k_1} dy_{k_1},$$

wobei $B_{k_i k_1} := \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} x_{k_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_{k_1}} y_{k_i} > 0$. Weil die Übergangsfunktionen orthoform sind, ist $\sum_{i=1}^n \varphi_{k_i} B_{k_i k_1} > 0$. Lokal können wir also stets $h = b dx_k dy_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $b > 0$ annehmen, insbesondere definiert dieses h eine Lorentz–Metrik. Es bleibt zu zeigen: $\mathfrak{A}_h^0 = \mathcal{A}$.

$\mathfrak{A}_h^0 \subset \mathcal{A}$: Sei $(U, \chi = (x, y))$ eine Karte aus \mathfrak{A}_h^0 . Wir müssen zeigen, daß für jede Karte $(V, \eta = (w, z))$ aus \mathcal{A} mit $U \cap V \neq \emptyset$ die Übergangsfunktionen $\eta \circ \chi^{-1}$ und $\chi \circ \eta^{-1}$ orthoforme Abbildungen auf $\chi(U \cap V)$ bzw. $\eta(U \cap V)$ sind. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, daß $W := U_k \cap U \cap V \neq \emptyset$. Dann gilt auf W einerseits

$$h = bdx_k dy_k = b' dw dz,$$

weil $\eta_k \circ \eta^{-1}$ bzw. $\eta \circ \eta_k^{-1}$ orthoform sind, und andererseits

$$h = B dx dy$$

nach Voraussetzung, d.h. $b' dw dz = B dx dy$. Also sind nach 2.6.20 $\eta \circ \chi^{-1}$ und $\chi \circ \eta^{-1}$ orthoforme Abbildungen auf $\chi(W)$ bzw. $\eta(W)$.

$\mathfrak{A}_h^0 \supset \mathcal{A}$: Sei $(V, \eta = (w, z))$ aus \mathcal{A} . Wir müssen zeigen, daß in diesen Koordinaten $h = B dw dz$ gilt. Lokal können wir stets $h = b dx_k dy_k$ schreiben und somit folgt die Behauptung aus der Orthoformität von $\eta_k \circ \eta^{-1}$ bzw. $\eta \circ \eta_k^{-1}$.

(ii) \Leftarrow) trivial, da Nullkoordinatensysteme eine konforme Invariante sind.

\Rightarrow) Wir müssen zeigen: Es existiert $\lambda \in C^\infty(S)$ mit $\lambda > 0$ und $\tilde{h} = \lambda h$. Sei $p \in S$. Mit dem gleichen Argument wie in 2.3.13 reicht es aus, die Existenz von λ auf einer Umgebung U von p zu zeigen. Sei U eine Umgebung, auf der h -Nullkoordinaten $\chi = (x, y)$ und \tilde{h} -Nullkoordinaten $\tilde{\chi} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ definiert sind. Nach Voraussetzung sind beide Karten aus \mathcal{A} , d.h.

$$\tilde{h} = \tilde{B} d\tilde{x} d\tilde{y} = \tilde{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{y} dx dy = \lambda dx dy = \lambda h,$$

wobei $\lambda = \tilde{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{y} > 0$ ist. ■

2.6.23 KOROLLAR 1. *Eine orthoforme Struktur auf S zeichnet genau eine konforme Äquivalenzklasse von Lorentz-Metriken aus (nämlich die durch h aus 2.6.22 (i) bestimmte); anders ausgedrückt: Orthoforme Flächen stehen in bijektiver Beziehung zu Lorentz-Flächen.*

2.6.24 KOROLLAR 2. *Sei (S, Λ) eine parakomplexe Struktur und $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Lambda$ der durch diese ausgezeichnete, orientierte, parakomplexe Atlas auf S . Dann gilt:*

(i) *Es existiert eine Lorentz-Metrik h auf S mit $\mathfrak{A}_h = \mathcal{A}$*

(ii) *Ist \tilde{h} eine weitere Lorentz-Metrik auf S , so gilt $\mathfrak{A}_{\tilde{h}} = \mathcal{A}$ genau dann, wenn $\tilde{h} \sim h$.*

Beweis. (i) Gemäß 2.3.11 ist $F \circ \mathcal{A}$ ein orthoformer Atlas, denn sind χ, η zwei Koordinatensysteme aus \mathcal{A} , so ist

$$(F \circ \chi) \circ (F \circ \eta)^{-1} = F \circ \chi \circ \eta^{-1} \circ F^{-1}.$$

Nach 2.6.22 existiert eine Lorentz-Metrik h mit $\mathfrak{A}_h^0 = F \circ \mathcal{A}$. Dann ist $F^{-1} \circ \mathfrak{A}_h^0 = \mathfrak{A}_h = \mathcal{A}$.

(ii) $\mathfrak{A}_{\tilde{h}} = F^{-1} \circ \mathfrak{A}_h^0 = \mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}_{\tilde{h}}^0 = F(\mathfrak{A}_{\tilde{h}}) = F \circ \mathcal{A}$, und dies ist nach 2.6.22 (ii) äquivalent zu $\tilde{h} \sim h$. ■

2.6.25 KOROLLAR 3. *Eine parakomplexe Struktur auf S zeichnet genau eine konforme Äquivalenzklasse von Lorentz-Metriken aus (nämlich die durch h aus 2.6.24 (i) bestimmte); anders ausgedrückt: Parakomplexe Flächen stehen in bijektiver Beziehung zu Lorentz-Flächen.*

2.6.26 BEMERKUNG. Die Beziehung zwischen parakomplexen Strukturen und Lorentz-Flächen ist intrinsisch: Die Nulldistributionen zerlegen lokal den Tangentialraum in die Summe zweier eindimensionaler Unterbündel. Somit können wir kanonisch jedem Tangentialraum einen linearen Operator T durch die Forderung zuordnen, daß diese beiden Unterräume die Eigenunterräume zum Eigenwert ± 1 sein sollen (vgl. auch Abschnitt 2.4.33). Dann gilt $T^{1,1} = id$ und wir erhalten auf S eine fast-Produktstruktur bzw. fast-parakomplexe Struktur, für die wir dann auch parakomplexe Abbildungen erklären können. Somit ist eine Lorentz-Fläche der einfachste Fall einer fast-parakomplexen Mannigfaltigkeit, siehe dazu auch den Übersichtsartikel über (fast-)parakomplexe Geometrie von [CrFoGa96]. Der Begriff der orthoformen Struktur erweist sich aber für die folgende Untersuchung von Lorentz-Flächen als handbarer, da er eine einfache Charakterisierung C^j -konformer Äquivalenzen gestattet (vgl. 2.6.31).

Die in 2.6.22 verwendete Technik des Zusammenklebens lokal definierter Lorentz-Metriken können wir nun benutzen, um ein Kriterium für die Existenz globaler isotroper Vektorfelder herzuleiten:

2.6.27 SATZ UND DEFINITION. *Für jede Lorentz-Fläche $(S, [h])$ existiert eine Riemannsche Metrik g , für die die Nulldistributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} orthogonal zueinander sind. Eine solche Riemannsche Metrik nennen wir regulär. Insbesondere existieren vollständige reguläre Metriken auf jeder Lorentz-Fläche.*

Beweis. Sei $\{(U_k, \chi_k = (x_k, y_k))\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Überdeckung von S mit isotropen Karten. Auf U_k definieren wir dann eine Riemannsche Metrik durch

$$g_k = dx_k^2 + dy_k^2.$$

Für Riemannsche Metriken dieser Form sind die Nulldistributionen augenscheinlich orthogonal. Falls $U_k \cap U_j \neq \emptyset$, so gilt

$$(*) \quad g_j = f'^2(x_k) dx_k^2 + g'^2(y_k) dy_k^2$$

mit $f', g' > 0$, da nach Voraussetzung die Übergangsfunktion $(x_k, y_k) \rightarrow (x_j, y_j)$ positiv orthoform sein soll. Wir wählen nun eine der fixierten Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\varphi_k\}$. Dann ist $h = \sum_k \varphi_k g_k$ eine endlich Summe von Riemannschen Metriken in einer Umgebung jeden Punktes von S und hat lokal die Form (*), woraus die erste Behauptung folgt. Ist nun S kompakt, so ist g vollständig gemäß dem Satz von Hopf und Rinow. Ist S nicht kompakt, so existiert ein vollständiges $\tilde{h} \in [h]$ nach dem bereits im vierten Abschnitt zitierten Satz von Nomizu und Ozeki (siehe Abschnitt 2.4.2). ■

2.6.28 KOROLLAR. Sei $\mathcal{L} = (S, [h])$ eine Lorentz-Fläche. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es existiert ein zeitartiges Vektorfeld
- (ii) Es existiert ein lichtartiges Vektorfeld
- (iii) Es existiert ein nullstellenfreies, raumartiges Vektorfeld

Insbesondere existieren auf jeder zeitorientierten Lorentz-Fläche zwei globale X - und Y -Vektorfelder.

Beweis. Sei g eine reguläre Metrik für \mathcal{L} und T ein nullstellenfreies, zeitartiges Vektorfeld. Wir konstruieren ein glattes, isotropes Vektorfeld, indem wir $T(p)$ in $T_p S$ solange in negative bzw. positive Richtung (bezüglich g) rotieren, bis es in einer Nulldistribution liegt. Aus einem isotropen Vektorfeld können wir durch Rotation in positive oder negative Richtung um einen Winkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$ stets ein nullstellenfreies, zeitartiges bzw. raumartiges Vektorfeld konstruieren. Drehen wir schließlich ein nullstellenfreies, raumartiges Vektorfeld um $\frac{\pi}{2}$ (bezüglich g), so erhalten wir ein nullstellenfreies, zeitartiges Vektorfeld. ■

2.6.29 DEFINITION. Seien (S, Φ_l) und $(\tilde{S}, \tilde{\Phi}_l)$ zwei C^l -orthoforme Strukturen. Dann heißt eine stetige Abbildung $f : S \rightarrow \tilde{S}$ für $j = 1, 2, \dots, l$ (positiv) C^j -orthoform genau dann, wenn für alle Karten $(U, \chi) \in \Phi$ um p und alle Karten $(\tilde{U}, \tilde{\chi}) \in \tilde{\Phi}$ um $f(p)$ die Abbildung $\tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (positiv) C^j -orthoform ist.

2.6.30 BEMERKUNGEN. (i) Das Vorzeichen der Jacobi-Determinante ist unabhängig von der Kartenwahl.

(ii) Da die Hintereinanderausführung orthoformer Abbildungen beliebiger Stufe wieder orthoform gleicher Stufe ist, genügt es natürlich, die Orthoformität einer Abbildung lediglich für eine spezielle Überdeckung von Karten (U, χ) aus Φ bzw. $\tilde{\Phi}$ zu überprüfen.

Es gilt folgendes Analogon zu 2.1.11:

2.6.31 SATZ. Seien $(S, [h])$ und $(\tilde{S}, [\tilde{h}])$ zwei Lorentz-Flächen. Dann sind für eine Funktion $f : S \rightarrow \tilde{S}$ der Klasse C^j folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist positiv C^j -orthoform
- (ii) f ist eine lokale C^j -konforme Äquivalenz.
- (iii) df erhält die Orientierung und den kausalen Charakter.

Beweis. (i) \implies (ii) Sei f eine positive C^j -orthoforme Abbildung. Wir müssen zeigen: Für $p \in S$ existiert eine Umgebung U derart, daß

$$(f|_U)^* \tilde{h} = \lambda h \text{ für } \lambda \in C^j(U) \text{ mit } \lambda > 0$$

gilt. Sei $(U, \chi = (\chi_1, \chi_2)) \in \Phi$ eine Karte um p und $(\tilde{U}, \tilde{\chi} = (\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2)) \in \tilde{\Phi}$ eine Karte um $f(p)$. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß $f(U) \subset \tilde{U}$ und U ein Rechteck in S ist, d.h. $\chi(U) = (a, b) \times (c, d)$. Nach Definition existieren dann Abbildungen $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ der Klasse C^j mit $\alpha' \cdot \beta' > 0$ und

$$\tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1}(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)).$$

Gilt für $q \in U$, daß $q = \chi^{-1}(x(q), y(q))$, so ist $x(q) = \chi_1(q)$ und $y(q) = \chi_2(q)$. Wir erhalten also $\tilde{\chi} \circ f|_U = (\alpha \circ \chi_1, \beta \circ \chi_2)$ und daraus

$$\tilde{\chi}_1 \circ f = \alpha \circ \chi_1 \text{ und } \tilde{\chi}_2 \circ f = \beta \circ \chi_2$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{\chi}$ ein isotropes Koordinatensystem, d.h. es gilt $\tilde{h}|_{\tilde{U}} = \tilde{B}d\tilde{\chi}_1d\tilde{\chi}_2$ und somit:

$$(f|_U)^* \tilde{h} = (\tilde{B} \circ f)d(\tilde{\chi}_1 \circ f)d(\tilde{\chi}_2 \circ f) = (\tilde{B} \circ f)d(\alpha \circ \chi_1)d(\beta \circ \chi_2).$$

Wegen $d(\alpha \circ \chi_1) = \alpha' \circ \chi_1 d\chi_1$ und $d(\beta \circ \chi_2) = \beta' \circ \chi_2 d\chi_2$ einerseits und $h|_U = B d\chi_1 d\chi_2$ andererseits erhalten wir schließlich

$$f^* \tilde{h}|_U = \underbrace{(\tilde{B} \circ f)(\alpha' \circ \chi_1)(\beta' \circ \chi_2)}_{=: \lambda \in C^j(U) > 0} \frac{1}{B} h|_U = \lambda h|_U;$$

dies war die Behauptung.

(ii) \implies (iii) klar.

(iii) \implies (i) Sei $p \in S$. Wir wählen eine Karte in p zentrierte Karte $(U, \chi) \in \Phi$ mit $\chi(U) = (a, b) \times (c, d)$, und eine Karte $(\tilde{U}, \tilde{\chi}) \in \tilde{\Phi}$ um $f(p)$. Wir müssen Funktionen $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ der Klasse C^j derart finden, daß

$$\tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1}(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$$

und $\alpha'\beta' > 0$ gilt. Dazu definieren wir für $x \in (a, b)$ und $y \in (c, d)$ die Nullkurven $\alpha_y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta_x : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ in $\chi(U)$ durch $\alpha_y(s) = (s, y)$ und $\beta_x(t) = (x, t)$. Sei

$$\alpha := pr_1 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} \circ \alpha_0 \text{ und } \beta := pr_2 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} \circ \beta_0.$$

Wir behaupten:

$$\tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1}(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)).$$

$\chi^{-1} \circ \alpha_y$ parametrisiert eine glatte X -Kurve in S . Da f den kausalen Charakter und die Orientierung erhält, überführt f die \mathcal{X} - und \mathcal{Y} -Distribution auf S in die $\tilde{\mathcal{X}}$ - und $\tilde{\mathcal{Y}}$ -Distribution auf \tilde{S} , und daher ist $\tilde{f} \circ \alpha_y$ eine C^j - X -Kurve in \tilde{S} . Analog folgt, daß $\tilde{f} \circ \beta_x$ eine C^j - Y -Kurve ist. Also ist

$$pr_1 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1}(x, y) = pr_1 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} \circ \beta_x(y) = \text{const}(x).$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} pr_1 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} \circ \beta_x(y) &= pr_1 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} \circ \beta_x(0) \\ &= pr_1 \circ \tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} \circ \alpha_0(x) = \alpha(x). \end{aligned}$$

Genauso erhalten wir

$$pr_2 \circ \tilde{f} \circ (x, y) = pr_2 \circ \tilde{f} \circ \alpha_y(x) = \beta(y).$$

Die Determinantenbedingung $\alpha'\beta' > 0$ folgt aus der Orientierungserhaltung von f . ■

2.6.32 BEMERKUNG. Sinngemäß gilt Satz 2.6.31 für C^j -orthoforme Abbildungen, wenn f nicht als orientierungserhaltend vorausgesetzt wird.

2.6.33 KOROLLAR. Jede C^j -orthoforme Abbildung von \mathcal{L} nach $\tilde{\mathcal{L}}$ bildet glatte Parametrisierungen von Nullkurven in \mathcal{L} auf C^j Parametrisierungen von Nullkurven gleichen Typs in $\tilde{\mathcal{L}}$ ab.

2.6.34 BEMERKUNG. Schematisch läßt sich 2.6.31 wie folgt zusammenfassen:

| | | |
|-------------|--|------------------------------|
| Struktur: | charakterisierendes Objekt: | lokaler Äquivalenzbegriff: |
| geometrisch | konforme Klasse $[h]$ | lokal konforme Äquivalenz |
| analytisch | 0-Distributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} | positiv orthoforme Abbildung |

Formal scheint also die Theorie der Riemannschen Flächen und der Lorentz-Flächen keine tiefen Unterschiede aufzuweisen; die konforme Klasse der Metrik zeichnet stets ein speziellen Atlas aus, dessen Übergangsfunktionen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen müssen. Metrik wie Nulldistributionen enthalten die vollständige konforme Information, und die lokalen Äquivalenzbegriffe sind daher gleichwertig. Die Natur der Cauchy-Riemann-Gleichungen bedingt aber, daß jede C^1 -konforme Struktur einer Fläche S automatisch eine C^∞ -konforme Struktur (de facto sogar eine komplex analytische konforme Struktur) auf S ist, während für Lorentz-Flächen a priori nicht offensichtlich (und tatsächlich falsch) ist, ob C^j -konform äquivalente Strukturen auch C^{j+1} - bzw. C^∞ -konform äquivalente Strukturen implizieren.

2.6.35 DEFINITION. Ein Homöomorphismus $f : (S, h) \rightarrow (\tilde{S}, \tilde{h})$ heißt konform, falls f glatte Parametrisierungen von Nullkurven in S auf stetige Parametrisierungen von Nullkurven in \tilde{S} gleichen Typs überführt und orientierungserhaltend ist.

2.6.36 BEMERKUNG. Orientierungserhaltend bedeutet dabei folgendes für f : Sind σ und $f \circ \sigma$ zwei 2-Simplexes, und ist σ positiv orientiert, so auch $f \circ \sigma$ (siehe Definitionen 7.1.1 und 11.3.1 ff. aus [StZi94] zur Orientierbarkeit von Simplicialkomplexen, die zum üblichen Orientierbarkeitsbegriff topologischer bzw. differenzierbarer Mannigfaltigkeiten äquivalent ist, vgl. 11.4.11 und 11.4.14).

2.6.37 DEFINITION

- (i) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{E}^{2,1}$, versehen mit den isotropen Standardkoordinaten (x, y) . Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ heißt stetig orthoform oder stetig netzerhaltend genau dann, wenn für alle $p \in U$ eine Rechteckumgebung $R = (a, b) \times (c, d)$ in U und zwei stetige Funktionen $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derart existieren, daß

$$f|_R(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$$

ist und α und β entweder beide streng monoton steigend oder beide streng monoton fallend sind.

- (ii) Seien (S, Φ_j) und $(\tilde{S}, \tilde{\Phi}_j)$ zwei C^j -orthoforme Strukturen. Dann heißt eine stetige Abbildung $f : S \rightarrow \tilde{S}$ stetig orthoform genau dann, wenn für alle $p \in S$ und alle Karten $(U, \chi) \in \Phi$ um p

und alle Karten $(\tilde{U}, \tilde{\chi}) \in \tilde{\Phi}$ um $f(p)$ die Abbildung $\tilde{\chi} \circ f \circ \chi^{-1} : \chi(U \cap f^{-1}(\tilde{U})) \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig orthoform ist.

(iii) Sei (S, Φ_j) eine C^j -orthoforme Struktur. Dann sei

$$\mathcal{H} := \{(U, \chi) \mid \chi : U \rightarrow \mathbb{E}^{2,1} \text{ ist injektiv und stetig orthoform}\}$$

und

$$\mathcal{H}^+ := \{(U, \chi) \in \mathcal{H} \mid \chi : U \rightarrow \mathbb{E}^{2,1} \text{ erhält die natürliche Orientierung der Nullkurven}\}.$$

2.6.38 BEMERKUNG. Man könnte in Definition 2.6.37 wiederum zwischen "stetig orthoform" (d.h. α und β sind streng monoton) und "positiv" stetig orthoform (d.h. α und β sind beide entweder streng monoton fallend oder steigend) — analog zu 2.6.11 — unterscheiden. Da aber die Definition stetig orthoformer Abbildungen geometrisch (und nicht analytisch) motiviert ist, wollen wir nur die geometrisch relevante Situation betrachten und eine Unterscheidung zwecks Vereinfachung der Sprechweise unterlassen.

2.6.39 SATZ. Für eine Abbildung $f : (S, h) \rightarrow (\tilde{S}, \tilde{h})$ sind äquivalent:

(i) f ist lokal ein konformer Homöomorphismus

(ii) f ist stetig orthoform

Beweis. Weil f glatte Parametrisierungen von Nullkurven in S auf stetige Parametrisierungen von Nullkurven in \tilde{S} gleichen Typs überführt, ist es klar, daß f — modulo Karten — lokal von der Form $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ ist, wobei α und β beide streng monoton sind. Umgekehrt definiert jede Abbildung dieser Form einen Homöomorphismus. Weil ein Homöomorphismus dieser Form aber orientierungserhaltend genau dann ist, falls f jedes positiv orientierte Rechteck wieder auf ein positiv orientiertes Rechteck abbildet (vgl. 2.6.36), folgt die Behauptung, denn dies ist wiederum äquivalent zur Tatsache, daß α und β entweder beide streng monoton steigend oder beide streng monoton fallend sind. ■

2.6.40 BEMERKUNG. Abschließend sei noch auf einen zumindest formalen Zusammenhang zur Theorie dynamischer Systeme hingewiesen: Seien V und \tilde{V} Vektorfelder auf zwei Mannigfaltigkeiten M

und \tilde{M} . Man nennt solche Paare (M, V) und (\tilde{M}, \tilde{V}) auch dynamische Systeme. Der natürliche Äquivalenzbegriff scheint zunächst Gleichheit bis auf Diffeomorphie zu sein, aber dieser stellt sich als zu stark heraus (vgl. [Ar88], S.91 ff.). Man führt dann einen zum konformen Homöomorphismus analogen Begriff ein: Zwei dynamische Systeme heißen topologisch orbital äquivalent, falls ein Homöomorphismus zwischen M und \tilde{M} existiert, der orientierte Flußkurven von V auf orientierte Flußkurven von \tilde{V} in \tilde{M} überführt. Man vergißt also die analytische Natur des Flußes und betrachtet stattdessen lediglich seine "Form". Eben dieser Gedanke liegt auch der Definition des konformen Homöomorphismus zu Grunde (vgl. auch die Bemerkung vor 2.7.18): Die geometrische Information von $[h]$ wird von den Nulldistributionen \mathcal{X} und \mathcal{Y} kodiert, und ein gewisser Teil dieser Information findet sich in den Flußkurven wieder, deren Verhalten man leichter studieren kann (vgl. Abschnitt 1.5). In manchen Situationen reicht dies bereits aus, um zwischen konformen Klassen zu unterscheiden. Wie wir weiterhin im dritten Kapitel sehen werden, hängt z.B. die Dimension des Vektorraumes der positiven harmonischen Spinoren über einer kompakten Lorentz-Fläche in vielen Fällen sehr sensibel von der Form der Nulllinien ab.

2.7 Beispiele

2.7.1 SATZ. Sei $f : \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ C^j -orthoform, $\tilde{\mathcal{L}}$ einfach zusammenhängend, und γ eine Nullkurve in \mathcal{L} . Dann ist $f|_{span(\gamma)}$ injektiv.

Beweis. Sei γ o.B.d.A. eine X -Kurve. Angenommen, es existieren $p, q \in span(\gamma)$ mit

$$(*) \quad f(p) = f(q).$$

Seien δ_p und δ_q die durch p bzw. q verlaufenden Y -Nulllinien. Dann folgt $f(p') = f(q')$ für die eindeutig bestimmten Schnittpunkte p' von $\gamma \cap \delta_p$ und q' von $\gamma \cap \delta_q$, denn p' und q' liegen entlang derselben X -Linie und $f(p')$ und $f(q')$ wegen $(*)$ entlang derselben Y -Linie. Wäre nun $p' \neq q'$, so wäre die Nulllinie $f \circ \gamma$ auf einer einfach zusammenhängenden Lorentz-Fläche geschlossen. Also ist $p' = q'$ und somit folgt $p = q$, denn anderenfalls wäre die Nulllinie $f \circ \delta_p$ geschlossen. ■

2.7.2 BEISPIELE.

(i)

$$(\{|x| + |y| < 1\}, [dxdy]) \sim_\infty (\{x^2 + y^2 < 1\}, [dxdy]) :$$

Definiere eine konforme Äquivalenz durch

$$(x, y) \rightarrow \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right).$$

Man überprüft leicht, daß diese Abbildung positiv orthoform und

$$\begin{aligned} (\{|x| + |y| < 1\}, [dxdy]) &= sp(Y - \text{Linie durch Ursprung}) \\ &= sp(X - \text{Linie durch Ursprung}) \end{aligned}$$

ist.

(ii) Einige konforme Äquivalenzen in $\mathbb{E}^{2,1}$:

Translation: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$ für ein $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

Rotation um π : $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

Reskalierung einer Variablen: $(x, y) \rightarrow (f(x), y)$ bzw. $(x, y) \rightarrow (x, g(y))$ für glattes f und g mit $f', g' > 0$.

2.7.3 SATZ (Modell-Lemma). *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $-\infty \leq c < d \leq \infty$. Dann ist $\mathbb{E}^{2,1} \sim_{\infty} \mathcal{L}_{(a,b) \times (c,d)}$.*

Beweis. Da Translation, Rotation um π und Reskalierung einer Variablen gemäß 2.7.2 konforme Äquivalenzen sind, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $(a, b) \times (c, d)$ eines der folgenden Rechtecke ist:

$$\begin{aligned} &(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty), \quad (-\infty, \infty) \times (-1, 1), \quad (-\infty, \infty) \times (0, \infty), \\ &(-1, 1) \times (-\infty, \infty), \quad (-1, 1) \times (-1, 1), \quad (-1, 1) \times (0, \infty), \\ &(0, \infty) \times (0, \infty), \quad (0, \infty) \times (-1, 1) \text{ oder } (-\infty, 0) \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Definiere $F : \mathbb{E}^{2,1} \rightarrow \mathcal{L}_{(a,b) \times (c,d)}$ durch $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$, wobei

$$\alpha(x) = x, \tanh x, e^x \text{ oder } -e^{-x}$$

ist (analog für β), je nachdem, welches Rechteck vorliegt. Dann ist F positiv orthoform und 2.6.31 und 2.7.1 ergeben die Behauptung. ■

Da auf Lorentz-Flächen keine lokalen konformen Invarianten existieren, kodiert lediglich das globale Verhalten der Nulllinien konforme Information. Daß die gesamte Minkowski-Ebene auf ein beliebig kleines Modell transformiert werden kann, liegt an der Starrheit der Nulllinien und ist charakteristisch für Minkowski-Flächen:

2.7.4 KOROLLAR (Cloning Lemma). *Sei $j = 1, \dots, \infty$. Eine Lorentz-Fläche $\mathcal{L} = (S, [h])$ ist C^j -konform äquivalent zu einer Minkowski-Fläche genau dann, wenn für jede nicht leere, offene*

Teilmenge V von S eine Teilmenge U in V so existiert, daß $\mathcal{L} \sim_j (U, [h])$ gilt. Eine analoge Aussage gilt im stetigen Fall.

Beweis. \implies) Angenommen,

$$(S, [h]) \sim_j \mathcal{L}_W = (W, [dxdy])$$

für $W \subset \mathbb{R}^2$. Sei V eine nicht leere, offene Teilmenge von S . Dann enthält V eine Rechteckkartenumgebung \tilde{V} mit $(\tilde{V}, \chi) \in \mathfrak{A}_{[h]}^0$. Nun ist $\chi(\tilde{V})$ ein Rechteck, also nach 2.7.3 eine konforme Kopie von $\mathbb{E}^{2,1}$:

$$(\tilde{V}, [h]) \sim_\infty (\chi(\tilde{V}), [dxdy]) \sim_\infty \mathbb{E}^{2,1}.$$

Also existiert eine konforme Kopie von \mathcal{L}_W in $\chi(\tilde{V})$, d.h es existiert $\tilde{W} \subset \chi(\tilde{V})$ so, daß $\mathcal{L}_W \sim_\infty \mathcal{L}_{\tilde{W}}$. Somit gilt

$$(S, [h]) \sim_j (W, [dxdy]) \sim_\infty (\tilde{W}, [dxdy]) \sim_\infty (\chi^{-1}(\tilde{W}), [h]),$$

wobei $U := \chi^{-1}(\tilde{W}) \subset \tilde{V} \subset V$. Also ist $(S, [h]) \sim_j (U, [h])$

\Leftarrow) Sei V wie in der Behauptung. V enthält eine Kartenumgebung W einer Karte $(W, \chi) \in \mathfrak{A}_{[h]}^0$, und

$$(W, [h]) \sim_\infty (\chi(W), [dxdy]) \subset \mathbb{E}^{2,1}.$$

Nun ist W ebenfalls offen und nichtleer, enthält also eine Teilmenge U für die nach Voraussetzung

$$(S, [h]) \sim_j (U, [h]) \sim_\infty (\chi(U), [dxdy]) = \mathcal{L}_{\chi(U)} \subset \mathbb{E}^{2,1}$$

gilt. ■

2.7.5 BEISPIELE.

(i) Überlagerungen von Minkowski-Flächen. Sei $S := \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ und $K : S^\infty \rightarrow S$ die universelle Überlagerung von S . S^∞ kann wie folgt konstruiert werden (siehe auch [Ah79] Abschnitt 3.4.3 für diese und weitere derartiger Konstruktionen in der Funktionentheorie): Bezeichnet für $n \in \mathbb{N}$ S_n die n -te Kopie von S , so erhalten wir S^∞ durch Schlitzten der Kopien S_n entlang der negativen x -Achse und Identifizieren der oberen Kante von S_n mit der unteren Kante von S_{n+1} . Durch Hochziehen der kanonischen Lorentz-Metrik h_0 auf S erhalten wir die Lorentz-Fläche $\mathcal{L}^\infty = (S^\infty, [h_0])$, vgl. 2.3.2 (iii). Also ist k nach 2.6.31 eine orthoforme Abbildung; restringiert auf eine Kopie S_n ist k injektiv, aber natürlich ist k nicht global injektiv. Bezeichnen wir mit γ die entlang $x \equiv \frac{1}{2}$ verlaufende Nulllinie in S , und mit γ_n die Hebung von γ in S_n , so ist k offensichtlich injektiv auf den Mengen $sp(\gamma_n)$, aber k ist nicht injektiv auf irgendeiner Menge in S , die $\overline{sp(\gamma_n)}$ enthält. Weiterhin gilt der Satz:

Für alle Minkowski-Flächen \mathcal{L}_U ist $\mathcal{L}^\infty \approx_0 \mathcal{L}_U$.

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$, und fixiere $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$$\text{Sei } \gamma_{4k+m} := \begin{cases} \text{der Lift der negativen } y\text{-Achse nach } S_{4k}, m = 0 \\ \text{der Lift der positiven } x\text{-Achse nach } S_{4k}, m = 1 \\ \text{der Lift der positiven } y\text{-Achse nach } S_{4k}, m = 2 \\ \text{der Lift der negativen } x\text{-Achse nach } S_{4k}, m = 3 \end{cases}$$

Angenommen, F wäre ein konformer Homöomorphismus, so daß $\mathcal{L}^\infty \sim_0 \mathcal{L}_U$ doch gälte. Wir führen zuerst Nullkoordinaten auf jeder geschlitzten Kopie S_n ein, so daß wir von Rechtecken auf S_{4k} sprechen können. Betrachten wir speziell das durch γ_{4k} und γ_{4k+1} gebildete Rechteck R , so wäre $F(R)$ wieder ein Rechteck in U ; insbesondere wird γ_{4k} bzw. γ_{4k+1} auf eine vertikale bzw. horizontale Nullkurve in U mit gemeinsamen Endpunkt $p \in \mathbb{R}^2$ (der natürlich nicht in U liegen muß) abgebildet. Das gleiche gilt sinngemäß für γ_{4k+1} und γ_{4k+2} . Also wird für jede natürliche Zahl j die Nulllinie γ_j auf eine in p mündende Nulllinie abgebildet. Da jeder Punkt aus \mathbb{R}^2 aber nur der Endpunkt von höchstens vier verschiedenen Nulllinien sein kann, F aber nach unserer Annahme injektiv ist, folgt ein Widerspruch. ■

Offenbar müssen konform äquivalente Flächen in der Anzahl der Möglichkeiten, sich einem Punkte entlang von Nulllinien zu nähern, übereinstimmen. Unser Argument benutzt diese Idee, die im Abschnitt 2.8 als Charakteristik eines Punktes formalisiert werden wird, um auf konforme Nichtäquivalenz zu schließen. Die kanonische Metrik weist also ein zu starres Nulllinienverhalten auf, um zu der "gefalteten" Lorentz-Fläche \mathcal{L}^∞ stetig konform äquivalent sein zu können. Man beachte aber folgendes Resultat:

$$\mathcal{L}^\infty \sim_\infty (\mathbb{R}^2, [h = \sin(v)(dv^2 - du^2) - 2\cos(v)dudv]).$$

Beweis. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow S = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$$

definiert durch

$$f(u, v) = 2e^{-\frac{v}{2}} \left(\cos\left(\frac{u}{2}\right), \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right)$$

ist eine Überlagerung. Es ist die reel geschriebene universelle Überlagerung der punktierten komplexen Ebene durch \mathbb{C} , die durch $f(w) = 2e^{\frac{iw}{2}}$ gegeben wird. Direktes Ausrechnen ergibt $\frac{1}{2}e^{-v}h = f^*(dxdy)$, d.h. $[h] = [f^*(dxdy)]$. Also erhalten wir mit

$$(\mathbb{R}^2, [\sin(v)(dv^2 - du^2) - 2\cos(v)dudv])$$

eine weitere Realisierung der universellen Überlagerung von S , die lokal konform äquivalent zu $(S, [dxdy])$ ist, womit die konforme Äquivalenz zu \mathcal{L}^∞ aus Standardargumenten folgt (vgl. z.B. [Wo84], Korollar 1.8.23). ■

(ii) Der Standard-Lorentz-Torus. Sei T die Orbitmannigfaltigkeit unter der freien und eigentlich diskontinuierlichen Wirkung von \mathbb{Z}^2 auf \mathbb{R}^2 , mit der Überlagerung $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{Z}^2}$ zwei nullstellenfreie Funktionen, die unter der Wirkung von \mathbb{Z}^2 invariant sind, und h die in den Koordinaten (x_1, x_2) durch

$$h := -\lambda_1^2(x_1, x_2) dx_1^2 + \lambda_2^2(x_1, x_2) dx_2^2$$

definierte Lorentz-Metrik. Dann ist auch h invariant unter \mathbb{Z}^2 , und wir können h als Metrik auf dem Torus selbst auffassen (genauer gesagt existiert eine 2-Form h_T auf T mit $p^*h_T = h$). Also ist p eine lokal konforme Äquivalenz. Die X - bzw. Y -Kurven $l_y := (t, y)$ bzw. $m_x := (x, t)$ für fixiertes y bzw. x aus \mathbb{R} werden daher wieder auf X - bzw. Y -Kurven in T projiziert. Seien speziell λ_1 und λ_2 konstant, d.h. h ist eine linksinvariante Metrik auf T . Dann sind alle Nulllinien geschlossen, falls $\rho = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$; andernfalls liegen sie dicht (dies folgt z.B. aus Theorem 2.5.28 und der Linksinvarianz der Metrik; für einen direkten Beweis siehe z.B. [Hl68], Abschnitt II.2, Bsp. 2.1). Offensichtlich ist im rationalen Fall p nicht injektiv, obwohl $sp(l_y) = sp(m_x) = \mathbb{R}^2$ gilt.

Um die Beschaffenheit der im folgenden vorgestellten Beispielfamilien besser zu verstehen, beweisen wir zunächst ein

2.7.6 LEMMA. *Seien \mathcal{L}_U und \mathcal{L}_V zwei Minkowski-Flächen, wobei $U \subset \mathbb{E}^{2,1}$ eine Teilmenge mit folgender Eigenschaft ist:*

(S) *Der Schnitt zwischen U und jeder Nulllinie in $\mathbb{E}^{2,1}$ ist zusammenhängend*

(dies gilt z.B., wenn U konvex ist). Sei weiterhin $F : \mathcal{L}_U \rightarrow \mathcal{L}_V$ eine C^j -konforme Äquivalenz (bzw. ein konformer Homöomorphismus) zwischen zwei Minkowski-Flächen, und $R = (a, b) \times (c, d)$ das minimale Rechteck, welches U enthält (eventuell ist $R = \mathbb{R}^2$). Dann existieren zwei Abbildungen der Klasse C^j (bzw. C^0) $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ und $\alpha' \beta' > 0$ (bzw. α und β sind entweder beide streng monoton fallend oder beide streng monoton steigend).

Beweis. Wir betrachten U und V als Lorentz-Unterflächen von $\mathbb{E}^{2,1} = (\mathbb{R}^2, [dxdy])$, d.h. wir versehen U und V mit den globalen Nullkoordinaten (x, y) . Sei $x_1 \in (a, b)$. Dann existiert ein $y_1 \in (c, d)$ mit $p_1 = (x_1, y_1) \in U$, andernfalls wäre R nicht minimal. Sei m_p die durch (x_1, t) definierte und durch p verlaufende Y -Linie. Dann definieren wir $\alpha(x_1) := pr_1(f(m_p))$. Genauso definieren wir für $y_2 \in (c, d)$ $\beta(y_2) = pr_2(f(l_q))$, wobei l_q die durch (t, y_2) gegebene, durch $q = (x_2, y_2) \in U$ verlaufende X -Kurve ist. Wegen (S) ist dies unabhängig von der Wahl von y_1 und x_2 , denn alle möglichen $y \in (c, d)$ bzw. $x \in (a, b)$ liegen entlang derselben X - bzw. Y -Linie. Offensichtlich gilt dann für

$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, daß

$$\alpha(x) = pr_1(f(m_{(x,y)})) = pr_1(f(x, y)) = f_1(x, y)$$

und

$$\beta(y) = pr_2(f(l_{(x,y)})) = pr_2(f(x, y)) = f_2(x, y),$$

d.h. $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. Sei nun $x_0 \in (a, b)$ fixiert. Dann existieren (i) ein $y_0 \in (c, d)$ mit $p_0 = (x_0, y_0) \in U$, und (ii) auf einem Rechteck R_{p_0} um p_0 Funktionen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ der Klasse C^j mit $\tilde{\alpha}'\tilde{\beta}' > 0$ und $f(x, y) = (\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(y))$. Also gilt $\alpha = \tilde{\alpha}$ lokal um x_0 , d.h. α ist C^j mit $\alpha' > 0$. Der Beweis für β und den stetigen Fall funktionieren analog. ■

2.7.7 BEMERKUNG. Insbesondere können wir f aus 2.7.6 auf ganz R stetig bzw. differenzierbar fortsetzen. Dies erweist sich in folgender Situation als besonders nützlich: Sei U eine beschränkte, einfach zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Da für einfach zusammenhängende Flächen das globale Schnittpunktverhalten die konforme Information enthält, liegt es nahe, Schnittpunkte von Nulllinien im "Unendlichen" betrachten zu wollen, d.h. Punkte aus dem topologischen Rand von U , in denen sich die Fortsetzungen der Nulllinien schneiden. Dazu definieren wir

$$d\mathcal{L}_U := \{p \in \partial U \mid \text{es existiert eine konvergente Folge } (p_n) \\ \text{und eine Nullkurve } \gamma \text{ mit } p_n \rightarrow p \text{ und } p_n \in \gamma \text{ für alle } n\}.$$

Wir nennen $d\mathcal{L}_U$ den idealen Rand der Lorentz-Fläche \mathcal{L}_U . Ist z.B. $U = \text{Int}(\Gamma)$, wobei Γ ein C^1 -Jordanbogen ist, so gilt $d\mathcal{L}_U = \Gamma$. Allerdings muß der ideale Rand nicht mit dem topologischen Rand übereinstimmen und ist in der Regel echt enthalten. Sei dann \bar{f} die durch 2.7.6 gegebene Fortsetzung auf $R \cap d\mathcal{L}_U$. Wie wir anschließend anhand einiger Beispielfamilien sehen werden, stellt das Randverhalten von f die eigentliche Obstruktion für konforme Äquivalenz dar. Im Abschnitt 2.8 werden wir diese Ideen formalisieren und für die Klassifikation einfach zusammenhängender Lorentz-Flächen benutzen.

2.7.8 KOROLLAR. *Unter der Voraussetzung von Lemma 2.7.6 bildet jede C^j -konforme Äquivalenz (jeder stetige Homöomorphismus) $f : \mathcal{L}_U \rightarrow \mathcal{L}_V$ maximale Rechtecke auf maximale Rechtecke ab. Insbesondere induziert jede solche Abbildung eine Bijektion zwischen den maximalen Rechtecken beider Flächen.*

Beweis. Sei $f : \mathcal{L}_U \rightarrow \mathcal{L}_V$ eine solche Abbildung und R ein maximales Rechteck. Dann ist $f(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$, $f^{-1}(x, y) = (\alpha^{-1}(x), \beta^{-1}(y))$ und f bildet Rechtecke auf Rechtecke ab (vgl. 2.6.17).

Wäre $f(R)$ nicht maximal, so wäre es nach Definition in einem maximalen Rechteck \tilde{R} enthalten. Dann definierte aber $f^{-1}(\tilde{R})$ ein Rechteck in U , welches R echt enthielte — im Widerspruch zur Maximalität von R . ■

Wir betrachten nun einige Beispielfamilien, die (S) erfüllen. Dann können wir jede konforme Äquivalenz F global durch zwei reelle Funktionen α und β darstellen. Kennen wir dann zusätzlich noch das Vorzeichen der Ableitung dieser Funktionen, können wir durch "Schnittpunktargumente" starke qualitative Aussagen über F machen, ohne F explizit zu bestimmen und schließen so auf Nichtäquivalenz. Der erste Schritt wird also immer die Bestimmung des Vorzeichens der Ableitung von α und β sein, wobei wir für Minkowski-Flächen mit kompakten Abschluß die spezielle, durch den topologischen Rand bestimmte "Form" ausnutzen können. Unser Ziel ist es, trotz der Einfachheit der Beispiele, einen gravierenden Unterschied zu den Riemannschen Flächen herauszuarbeiten:

- C^j -konforme Äquivalenz impliziert nicht C^{j+1} -konforme Äquivalenz
- es existieren überabzählbar viele konforme Klassen einfach zusammenhängender Lorentz-Flächen.

Wir folgen dabei den Ideen des Artikels [SmWe96].

Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige, streng monotone Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, und bezeichne $\mathcal{L}_f := (S_f := \text{Gebiet, daß von den Geraden } x \equiv 1, y \equiv 0 \text{ und } f \text{ eingeschlossen wird, } [dx dy])$. Sei speziell $\mathbb{T}^{2,1} := \mathcal{L}_x$.

2.7.9 SATZ (Flattening Lemma).

(i) $\mathcal{L}_f \sim_0 \mathbb{T}^{2,1}$

(ii) Sei $j = 1, 2, \dots; \infty$ gegeben. Ist $f \in C^j$ und $f'(x) > 0$ auf $(0, 1)$, dann gilt $\mathcal{L}_f \sim_j \mathbb{T}^{2,1}$.

Beweis. Die Abbildung $(x, y) \rightarrow (f(x), y)$ ist ein konformer Homöomorphismus von $\mathbb{T}^{2,1}$ nach \mathcal{L}_f und somit folgt (i). Ist $f \in C^j$ und $f'(x) > 0$ auf $(0, 1)$, so definiert diese Abbildung sogar eine C^j -konforme Äquivalenz, d.h. wir erhalten (ii). ■

2.7.10 SATZ (Breaking Lemma). Sei $j = 1, 2, \dots; \infty$ gegeben. Falls $\mathcal{L}_f \sim_j \mathbb{T}^{2,1}$, so ist $f \in C^j$ und $f'(x) > 0$ auf $(0, 1)$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine C^j -konforme Äquivalenz $F : \mathcal{L}_f \rightarrow \mathbb{T}^{2,1}$. Also existieren nach 2.7.6 C^j -Funktionen $\alpha, \beta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha' \beta' > 0$ derart, daß $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ gilt.

Bezeichne nun R ein in S_f einbeschriebenes Rechteck mit der Eigenschaft, daß $\partial R \cap \partial S_f = \{p\}$ ist. Da ∂S_f durch den Graphen von f und zwei Liniensegmenten gegeben ist, muß p ein Element von $\text{graph}(f)$ sein, d.h. $p = (a, f(a))$ für ein $a \in (0, 1)$. Weiterhin ist F auf $\bar{R} \setminus \{p\}$ definiert. Schließlich ist $F(R)$ wieder ein Rechteck und $\partial F(R) \cap \partial S_x = \{q\}$ mit $q \in \text{graph}(x)$, d.h. $q = (b, b)$ für ein $b \in (0, 1)$; sonst wäre F auf ganz \bar{R} definiert. Daraus folgt zunächst, daß die Ableitung von α positiv auf $(0, 1)$ ist: Für $(x, y) \in R$ gilt $x > a$ und $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y)) \in F(R)$, d.h. es folgt $\alpha(x) > \alpha(a) = b$. Somit hat auch β eine echt positive Ableitung. Betrachten wir die in 2.7.7 definierte Fortsetzung \bar{F} , so folgt

$$\begin{aligned} \bar{F}(p) &= \bar{F}(a, f(a)) = \lim_{t \rightarrow f(a)^-} F(a, t) = \lim_{t \rightarrow a^+} F(t, f(a)) \\ &= (\alpha(a), \beta(f(a))) = q = (b, b). \end{aligned}$$

Dies gilt aber für jedes $p = (a, f(a))$, $a \in (0, 1)$. Auf $(0, 1)$ ist also $\alpha(x) = \beta(f(x))$ und somit $f = \beta^{-1} \circ \alpha$. Dann ist f C^j und $f' > 0$. ■

2.7.11 KOROLLAR. Für jedes $j = 1, 2, \dots$ existieren C^j -konform äquivalente, einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen, die nicht C^{j+1} -konform äquivalent sind. Zusätzlich existieren konform homöomorphe, einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen, die nicht C^1 -konform äquivalent sind.

Beweis. Man nehme ein f , welches C^j , aber nicht C^{j+1} ist bzw. ein stetiges f , welches nicht C^1 ist. ■

Die nächste Beispielfamilie wird durch einen numerischen Parameter charakterisiert. Seien $\mu < 0 < \lambda$ und $\tilde{\mu} < 0 < \tilde{\lambda}$ reelle Zahlen. Sei S bzw. \tilde{S} das Gebiet, welches durch die Linien $y = \lambda x$, $y = \mu x$ und $y \equiv -1$ (bzw. $y = \tilde{\lambda} x$, $y = \tilde{\mu} x$ und $y \equiv -1$) eingeschlossen wird. Seien

$$\mathcal{L} := (S, [dxdy]) \text{ und } \tilde{\mathcal{L}} := (\tilde{S}, [dxdy]).$$

2.7.12 SATZ.

(i) $\mathcal{L} \sim_0 \tilde{\mathcal{L}}$

(ii) Für alle $j = 1, 2, \dots; \infty$ gilt $\mathcal{L} \sim_j \tilde{\mathcal{L}}$ genau dann, wenn $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}$.

Beweis. (i) Definiere $F : \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ durch

$$F(x, y) := \left(-\frac{\lambda x}{\lambda}, y\right) \text{ für } x \leq 0$$

und

$$F(x, y) := \left(\frac{\mu x}{\tilde{\mu}}, y \right) \text{ für } 0 \leq x.$$

Dann ist F ein konformer Homöomorphismus.

(ii) \iff Falls $\lambda\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}\mu$, so ist die in (i) definierte Abbildung F eine konforme Äquivalenz.

\implies) Angenommen, wir haben $\mathcal{L} \sim_j \tilde{\mathcal{L}}$, d.h. es existiert eine C^j -konforme Äquivalenz $F : S \rightarrow \tilde{S}$ gegeben durch $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ mit $\alpha : (-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\mu}) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir zeigen zuerst:

$$(1) \quad \beta'(y) > 0 \text{ für } y \in (0, 1)$$

Sei $y_1 > y_2$. Es reicht zu zeigen: $\beta(y_1) > \beta(y_2)$, d.h. β ist streng monoton steigend. Sei dazu R das in S maximale, einbeschriebene Rechteck, dessen obere Kante parallel zur x -Achse durch $y_0 := \frac{y_1 + y_2}{2}$ verläuft. Dann liegen insbesondere alle Ecken von ∂R in ∂S , genauer: ∂R besitzt zwei Ecken auf $y \equiv -1$, eine Ecke auf $y = \lambda x$ und eine Ecke auf $y = \mu x$. Weil F orthoform ist folgt, daß $\tilde{R} := F(R)$ wieder ein maximales Rechteck ist, für das zwei Ecken auf $y \equiv -1$, eine Ecke auf $y = \tilde{\lambda}x$ und eine Ecke auf $y = \tilde{\mu}x$ liegen. Insbesondere gilt: Für alle X -Kurven, die durch $y > y_0$ verlaufen, geht ihr Bild unter F durch ein y überhalb (d.h. näher an der x -Achse) von $\partial\tilde{R}$. Also verläuft die Bildkurve der X -Kurve durch y_1 überhalb der Bildkurve der X -Kurve durch y_2 , d.h. $\beta(y_1) > \beta(y_2)$. Insbesondere folgt aus (1): $\alpha'(x) > 0$ für $x \in (-\frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\mu})$. Wir behaupten nun:

$$(2) \quad \tilde{\lambda}\alpha(x) = \beta(\lambda x) \text{ für alle } x \in (-\frac{1}{\lambda}, 0)$$

und

$$(3) \quad \beta(\mu x) = \tilde{\mu}\alpha(x) \text{ für alle } x \in (0, \frac{1}{\mu}).$$

Dazu betrachten wir die Fortsetzung \bar{F} von F und ein Rechteck R wie oben, d.h. zwei Ecken von R liegen auf $y \equiv -1$, eine Ecke auf $y = \lambda x$ und eine Ecke auf $y = \mu x$. Weil die Ableitungen von α und β positiv sind, werden die Ecken mit negativer bzw. positiver Abszisse wieder auf Ecken negativer bzw. positiver Abszisse abgebildet, und die obere bzw. untere Kante von R wird auf die obere bzw. untere Kante von $\tilde{R} = F(R)$ abgebildet. Also gilt für $-\frac{1}{\lambda} < x < 0$:

$$\bar{F}(x, \lambda x) = (\alpha(x), \beta(\lambda x)) = (\alpha(x), \tilde{\lambda}\alpha(x)),$$

d.h. wir erhalten (2). Genauso erhält man (3) aus

$$\bar{F}(x, \mu x) = (\alpha(x), \beta(\mu x)) = (\alpha(x), \tilde{\mu}\alpha(x)).$$

Differenzieren der Gleichungen (2) und (3) ergibt:

$$\tilde{\lambda}\alpha'(x) = \lambda\beta'(\lambda x) \text{ auf } \left(-\frac{1}{\lambda}, 0\right)$$

und

$$\mu\beta'(\mu x) = \tilde{\mu}\alpha'(x) \text{ auf } (0, \frac{1}{\mu}).$$

Da α und β mindestens C^1 sind, folgt aus Stetigkeitsgründen:

$$\begin{aligned} \beta'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \beta'(\lambda x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha'(x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \alpha'(0) \\ &= \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha'(x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\tilde{\mu}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \beta'(\mu x) = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\tilde{\mu}} \beta'(0), \end{aligned}$$

woraus wegen $\beta'(0) \neq 0$ die Behauptung folgt. ■

Sei $j = 1, 2, \dots$ vorgegeben. Für $k = 1, 2, \dots$ definiere

$$a_k := 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, I_k := [a_{2k}, a_{2k+1}] \text{ und } J_k := (a_{2k-1}, a_{2k}).$$

Für jedes k fixieren wir ein abgeschlossenes Intervall \mathcal{J}_k , das in J_k echt enthalten ist. Für jedes $r \in (0, 1)$ bezeichne $r = .r_1 r_2 \dots$ die Binärdarstellung von r , i.e. $r_k \in \{0, 1\}$ für alle k und $r = \sum_{k=1}^{\infty} r_k 2^{-k}$. Sei nun $r \in (0, 1)$ fest gewählt. Wir können dann eine stetige Funktion $f_r : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

- (i) $f_r(0) = 0$ und $f_r(1) = 1$,
- (ii) $f_r(x) \equiv 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ auf I_k für alle $k = 1, 2, \dots$
- (iii) f_r ist C^j mit $f_r'(x) > 0$ auf J_k und $f_r'(x) \equiv 1$ für alle $x \in J_k \setminus \mathcal{J}_k$ und $k = 1, 2, \dots$
- (iv) f_r ist C^{j+1} (bzw. ist nicht C^{j+1}) auf J_k für $r_k = 1$ (bzw. $r_k = 0$).

Sei $S_r :=$ Gebiet, das vom Graphen von f_r , $y \equiv 0$ und $x \equiv 1$ eingeschlossen wird (dann erfüllt S_r insbesondere (S)), und $\mathcal{L}_r := (S_r, [dxdy])$.

2.7.13 LEMMA. Für alle $r, r' \in (0, 1)$ gilt $\mathcal{L}_r \sim_j \mathcal{L}_{r'}$, aber $\mathcal{L}_r \not\sim_{j+1} \mathcal{L}_{r'}$, falls $r \neq r'$.

Beweis. Seien r und r' aus $(0, 1)$ mit $r \neq r'$ gegeben. Zuerst konstruieren wir eine C^j -konforme Äquivalenz $F : \mathcal{L}_r \rightarrow \mathcal{L}_{r'}$: Sei $(x, y) \in S_r$. Definiere

$$g(y) := \begin{cases} y, & \text{falls } y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ für ein } k = 1, 2, \dots \\ f_{r'} \circ f_r^{-1}(y), & \text{sonst} \end{cases}$$

(beachte, daß $f_r^{-1}(y)$ für $y \neq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$ eindeutig definiert ist). Behauptung:

- (1) $F(x, y) := (x, g(y))$ ist eine C^j -konforme Äquivalenz.

F ist surjektiv, denn ist $(x', y') \in S_{r'}$ und $y \neq 1 - (\frac{1}{2})^k$, so existiert $t \in (0, 1)$ mit $f_{r'}(t) = y'$. Dann ist $F(x', y) = (x', y')$ für $y \in f_r^{-1}(t)$. Also reicht es zu zeigen: g ist C^j mit streng positiver Ableitung. Wegen (iii) ist $g(y)$ C^j auf $(1 - (\frac{1}{2})^k, 1 - (\frac{1}{2})^{k+1})$ und mit positiver Ableitung auf jedem Intervall J_k . Zusätzlich gilt:

$$(2) \quad g(y) = y \text{ auf einer Umgebung von } y = 1 - (\frac{1}{2})^k \text{ für } k = 1, 2, \dots,$$

denn ist $y_1 < y = 1 - (\frac{1}{2})^k < y_2$ und die Differenz aus $y - y_1$ bzw. $y - y_2$ hinreichend klein, so folgt $f_r^{-1}(y_1) \in J_k$ mit

$$f_r^{-1}(y_1) > \sup(\mathcal{J}_k), \quad f_r^{-1}(y) = I_k,$$

und

$$f_r^{-1}(y_2) \in J_{k+1} \text{ mit } f_r^{-1}(y_2) < \inf(\mathcal{J}_{k+1}).$$

Da f stetig und $f'_{r|(J_i \setminus \mathcal{J}_i)} \equiv 1$ für alle i ist, ergibt integrieren (unter Berücksichtigung der Randbedingung $\lim_{x \rightarrow a_{2k}^-} f_r(x) = 1 - (\frac{1}{2})^k = \lim_{x \rightarrow a_{2k+1}^+} f_r(x)$):

$$f_r(x) = x + (\frac{1}{2})^k ((\frac{1}{2})^{k-1} - 1)$$

für $x \in J_k$ mit $x > \sup(\mathcal{J}_k)$ und $f_r(x) = x + (\frac{1}{2})^k ((\frac{1}{2})^k - 1)$ für $x \in J_{k+1}$ mit $x < \inf(\mathcal{J}_{k+1})$, wobei r beliebig ist. Somit folgt

$$f_{r'}(f_r^{-1}(y_1)) = f_{r'}(y_1 - (\frac{1}{2})^k ((\frac{1}{2})^{k-1} - 1)) = y_1$$

und genauso

$$f_{r'}(f_r^{-1}(y_2)) = f_{r'}(y_2 - (\frac{1}{2})^k ((\frac{1}{2})^k - 1)) = y_2,$$

woraus sich (2) ergibt. Also ist $g(y)$ C^j mit $g'(y) > 0$ auch auf einer Umgebung von $1 - (\frac{1}{2})^k$, und somit auf ganz $(0, 1)$, d.h. $F : \mathcal{L}_r \rightarrow \mathcal{L}_{r'}$ ist eine C^j -konforme Äquivalenz, woraus (1) und der erste Teil der Behauptung folgt. Wir müssen noch zeigen:

$$(3) \quad \text{Es existiert keine } C^{j+1}\text{-konforme Äquivalenz } F : \mathcal{L}_r \rightarrow \mathcal{L}_{r'}$$

Nehmen wir das Gegenteil an. Wir zeigen zuerst, daß für konforme Äquivalenzen jeder Stufe

$$(4) \quad F((I_k \times \mathbb{R}) \cap S_r) = (I_k \times \mathbb{R}) \cap S_{r'} \text{ und } F((J_k \times \mathbb{R}) \cap S_r) = (J_k \times \mathbb{R}) \cap S_{r'}$$

gelten muß. Da S_r (S) erfüllt, können wir $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ schreiben. Sei R ein maximales Rechteck in \mathcal{L}_r bzw. $\mathcal{L}_{r'}$. Dann liegt die untere Kante in $y \equiv 0$, die rechte Kante in $x \equiv 1$, und die

linke obere Ecke in $\text{graph}(f_r)$ bzw. $\text{graph}(f_{r'})$, wobei die linke, untere Ecke aus \bar{J}_k für ein $k = 1, 2, \dots$ ist. Ein maximales Rechteck der Form

$$R_k := (a_{2k}, 1) \times (0, 1 - (\frac{1}{2})^k)$$

nennen wir speziell, denn diese sind die einzigen maximalen Rechtecke, deren obere Kante (ohne die Ecken) nicht vollständig in S_r und $S_{r'}$ liegen. Jedes spezielle Rechteck in S_r ist zugleich spezielles Rechteck in $S_{r'}$ und umgekehrt. Also permutiert F die speziellen Rechtecke, und induziert daher eine Bijektion $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$, wobei f durch die Beziehung $F(R_k) = R_{f(k)}$ eindeutig definiert ist. Dann muß f streng monoton sein (dies folgt direkt aus den Monotonieeigenschaften der Komponenten von F), also ist $f = id$, d.h. F bildet jedes spezielle Rechteck auf sich selbst ab. Daraus folgt insbesondere, daß die Komponenten von F , α und β , streng monoton steigend sind und

$$F(I_k \times \mathbb{R} \cap S_r) = I_k \times \mathbb{R} \cap S_{r'}$$

gilt. Dazu schließe man mit folgendem Schnittpunktargument: X -Linien der Form l_x mit $a_{2k+1} \geq x$ dürfen mit der Y -Linie m auf $y \equiv \{1 - (\frac{1}{2})^k\} \cap S_{r'}$ keinen Schnittpunkt haben, wohingegen X -Linien l_x mit $x > a_{2k+1}$ mit m genau einen Schnittpunkt haben müssen. Damit haben wir (4) bewiesen. Wir betrachten nun innerhalb der R_k die Rechtecke

$$\hat{R}_k := (a_{2k}, a_{2k+1}) \times (0, 1 - (\frac{1}{2})^k).$$

Da die obere Kante wieder ein Segment außerhalb von S_r bzw. $S_{r'}$ ist, folgt analog zu oben, daß $F(\hat{R}_k) = \hat{R}_k$. Also schließen wir aus der Stetigkeit von F , daß das Segment $x \equiv a_{2k+1}$ unter F wieder auf sich selbst abgebildet wird. Aus der Bijektivität von F folgt $F(R_k \setminus R_{k+1}) = R_k \setminus R_{k+1}$, also gilt

$$F((J_k \times \mathbb{R}) \cap S_r) = (J_k \times \mathbb{R}) \cap S_{r'}.$$

Bezeichnet dann

$$\mathcal{T}_r^k := ((J_k \times \mathbb{R}) \cap S_r) \setminus R_k \text{ und } T_r^k := \text{int}(\mathcal{T}_r^k),$$

so bildet F T_r^k C^{j+1} -konform äquivalent auf $T_{r'}^k$ ab. Modulo der konformen Äquivalenzen aus 2.7.2 können wir annehmen, daß T_r^k bzw. $T_{r'}^k$ eine Lorentz-Fläche wie im Breaking Lemma definiert. Wegen $r \neq r'$ sind aber f_r und $f_{r'}$ nicht beide C^{j+1} über J_k für wenigstens ein $k = 1, 2, \dots$. Dann folgt aber aus dem Breaking Lemma, daß entweder

$$T_r^k \approx_{j+1} \mathbb{T}^{2,1} \text{ oder } T_{r'}^k \approx_{j+1} \mathbb{T}^{2,1}$$

— im Widerspruch zu unserer Annahme, aus welcher $T_r^k \sim_{j+1} T_{r'}^k$ folgt. Also gilt (3) und damit die Behauptung des Satzes. ■

Aus 2.7.12 und 2.7.13 folgt dann sofort der

2.7.14 SATZ. Sei $j = 1, 2, \dots$ gegeben. Dann existieren überabzählbar viele einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen, welche homöomorph bzw. C^j -konform äquivalent, aber nicht C^1 - bzw. C^{j+1} -konform äquivalent sind.

2.7.15 KOROLLAR. Es existieren überabzählbar viele verschiedene C^∞ -konforme Klassen einfach zusammenhängender Lorentz-Flächen.

Seien

$$\begin{aligned} Q &:= \{(x, y) \mid (x+4)^2 + (y+1)^2 < 4\} \cup (-3, 0) \times (-2, 0), \\ C &:= \{(x, y) \mid (x+4)^2 + (y+1)^2 = 4\} \end{aligned}$$

und

$$\Gamma := C \cap \{x > -4\} \cap \{y \geq 0\}.$$

Für $p \in \Gamma$ sei $R(p)$ das maximale einbeschriebene Rechteck in Q mit einer Ecke in p , d.h. alle Ecken von $R(p)$ liegen in C . Umgekehrt ist jedes Rechteck, dessen Rand geschnitten mit ∂Q genau vier Punkte enthält, von der Form $R(p)$ für ein $p \in \Gamma$. Nun wähle eine Sequenz von Punkten $\{p_k\} \subset \Gamma$, deren Ordinaten streng monoton steigend sind, wobei

$$p_1 := (\sqrt{3} - 4, 0) \text{ und } p_k \rightarrow (-4, 1) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

gelten soll. Wir fixieren wie in 2.7.13 die Binärdarstellung von $r \in (0, 1)$, d.h. $r = .r_1r_2\dots$ mit $r_i \in \{0, 1\}$. Wir definieren rekursiv eine Folge $\{q_k^r\}$: Ist $r_k = 0$, so sei $q_k^r = p_k$; ist $r_k = 1$, so setze $q_k^r :=$ ein abgeschlossener Bogen in Γ , der p_k enthält, aber disjunkt mit $q_{k-1}^r \cup \{p_{k+1}\}$ ist. Für $k = 1, 2, \dots$ sei $I_k^r :=$ Liniensegment, welche den Punkt mit der größten Ordinate von q_k^r mit dem Punkt der kleinsten Ordinate von q_{k+1}^r verbindet. Dann können wir einen (stetigen) Bogen Γ_r durch Verbinden der Punkte q_k^r mit Hilfe der I_k^r bilden. Wir definieren dann die Jordankurve

$$C_r := (C \setminus \Gamma) \cup \Gamma_r,$$

die Fläche

$$Q_r := \text{Int}(C_r) \cup (-3, 0) \times (-2, 0)$$

und die Lorentz-Fläche

$$\mathcal{L}_r := (Q_r, [dx dy]).$$

Wir bemerken, daß $Q_r(S)$ erfüllt und:

(□) Γ ist in jedem Rechteck R mit $Q_r \subset R$ enthalten.

Dann gilt der

2.7.16 SATZ. $\mathcal{L}_r \sim_0 \mathcal{L}_{r'}$ genau dann, wenn $r = r'$.

Beweis. Nur die Hinrichtung ist nichttrivial. Nehmen wir also an, daß $F : \mathcal{L}_r \rightarrow \mathcal{L}_{r'}$ ein konformer Homöomorphismus mit $F(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ ist. Man beachte, daß \bar{F} auf Γ wegen (□) definiert ist.

Behauptung:

(1) α und β haben positive Ableitung.

Da

$$I = \{y \equiv -1\} \cap Q_r = \{y \equiv -1\} \cap Q_{r'}$$

das einzig maximale horizontale Liniensegment in Q_r (bzw. $Q_{r'}$) ist, welches nicht die Kante eines in Q_r (bzw. $Q_{r'}$) eingeschriebenen Rechteckes ist, gilt

$$F(I) = \{(\alpha(x), \beta(-1)) \mid x \in (-6, 0)\} = I.$$

Das Rechteck

$$R_0 := (\sqrt{3} - 4, 0) \times (-2, 0)$$

ist maximal in der Menge der Rechtecke in Q_r (bzw. $Q_{r'}$), von denen drei Kanten in ∂Q_r (bzw. $\partial Q_{r'}$) enthalten sind. Also bildet $F R_0$ auf sich selbst ab und muß deswegen aus Stetigkeitsgründen den natürlichen Durchlaufsinne von I erhalten, d.h. α muß streng monoton und daher mit positiver Ableitung sein. (1) folgt somit aus der Determinantenbedingung. Wir zeigen nun:

(2) q_k^r ist ein Punkt genau dann, wenn $q_k^{r'}$ ein Punkt ist.

Dann folgt $r = r'$. Um (2) zu zeigen, ordnen wir jedem Punkt $p \in \Gamma \cap \Gamma_r$ (bzw. aus $\Gamma \cap \Gamma_{r'}$) das eingangs definierte Rechteck $R(p)$ zu. Da keine weiteren Rechtecke in Q_r bzw. $Q_{r'}$ existieren, deren topologischer Rand genau vier Punkte in ∂Q_r bzw. $\partial Q_{r'}$ hat, überführt F jedes Rechteck $R(p)$ für $p \in \Gamma \cap \Gamma_r$ in ein Rechteck $R(p')$ für $p' \in \Gamma \cap \Gamma_{r'}$. Wäre $p \in \Gamma_r$ (bzw. $p' \in \Gamma_{r'}$) nicht aus Γ , so wäre p (bzw. p') aus einem der I_k^r (bzw. $I_k^{r'}$) und könnte daher nicht Eckpunkt eines Rechtecks mit vier Ecken aus ∂Q_r (bzw. $\partial Q_{r'}$) sein: Der rechte, untere Eckpunkt von $R(p)$ (bzw. $R(p')$) wäre aus Q_r (bzw. $Q_{r'}$). Mit anderen Worten, \bar{F} induziert eine stetige Bijektion

$$\bar{f} = \bar{F}|_{\Gamma \cap \Gamma_r} = (\alpha|_{\Gamma \cap \Gamma_r}, \beta|_{\Gamma \cap \Gamma_r})$$

zwischen $\Gamma \cap \Gamma_r$ und $\Gamma \cap \Gamma_{r'}$. Die Zusammenhangskomponenten von $\Gamma \cap \Gamma_r$ bzw. $\Gamma \cap \Gamma_{r'}$ sind die q_k^r bzw. $q_k^{r'}$, d.h. \bar{f} induziert eine Bijektion $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definiert durch $\bar{f}(q_k^r) \subseteq q_{\pi(k)}^{r'}$. Da aber die Ordinate von \bar{f} streng monoton steigend ist (siehe (1)), muß auch π streng monoton und deswegen die Identität sein. Aus der Bijektivität von \bar{f} folgt (2). ■

Sei S^2 die zweiblättrige Überlagerung von $S := (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{(0, 0)\}$, die man analog zu S^∞ , nämlich durch Schlitzen und Verkleben entlang von $(-1, 0)$ nach $(0, 0)$ konstruieren kann, und

$$\mathcal{L}^2 := (S^2, [dxdy]).$$

Man beweist genau wie in 2.7.5, daß kein konformer Homöomorphismus zwischen \mathcal{L}^2 und einer Minkowski–Fläche existieren kann. Dann konstruieren wir für $r \in (0, 1)$ eine neue Familie von Flächen $S(r)$, indem wir Q_r längs des Intervalls $\{y \equiv 0, -1 < x < 0\}$ im 2. Blatt von S^2 ankleben. Wir erhalten die Lorentz–Fläche $\mathcal{L}(r) := (S(r), [dxdy])$. Jeder konforme Homöomorphismus $F : \mathcal{L}(r) \hookrightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ würde zu einem konformen Homöomorphismus $F : \mathcal{L}^2 \hookrightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ restringieren, was aber, wie gerade festgestellt, unmöglich ist. Umgekehrt induziert aber jeder konforme Homöomorphismus $F : \mathcal{L}(r) \rightarrow \mathcal{L}(r')$ durch Restriktion einen konformen Homöomorphismus $F : \mathcal{L}_r \rightarrow \mathcal{L}_{r'}$: Die der X –Linie $x \equiv -1$ in \mathcal{L}_r entsprechende X –Linie in $\mathcal{L}(r)$ wird wieder auf sich selbst abgebildet, weil es die einzige Nulllinie ist, die nicht Kante eines in $\mathcal{L}(r)$ einbeschriebenen Rechteckes sein kann. Da jede Y –Linie in \mathcal{L}_r (betrachtet als Unterfläche in $\mathcal{L}(r)$) diese Linie schneidet, gilt das Gleiche für die Bildlinien. Aus Stetigkeitsgründen folgt dann, daß die Punkte in einer Umgebung der Klebelinie nicht aus \mathcal{L}_r heraus abgebildet werden können. Also gilt $r = r'$ gemäß 2.7.16 und wir erhalten damit den

2.7.17 SATZ. *Es existieren überabzählbar viele, nicht stetig konform äquivalente, einfach zusammenhängende Lorentz–Flächen, jede davon nicht stetig konform äquivalent zu einer Minkowski–Fläche.*

Abschließend wollen wir noch ein Beispiel mit nichttrivialen Lorentz–Metriken auf Flächen untersuchen, die (S) nicht erfüllen. Es soll außerdem den Unterschied zwischen stetig und differenzierbarer konformer Äquivalenz herausstellen. Dabei wird der schon anhand der Definition erkennbare Sachverhalt deutlich, daß konforme Homöomorphismen lediglich die "Form" der Nulllinien bewahren (vgl. 2.6.40 und den Begriff der topologisch orbitalen Äquivalenz). Um eine solche Beispielfamilie zu konstruieren, verschieben wir nun Q_r um $(1, 1)$ in der (x, y) –Ebene und ziehen die Menge $\{y \equiv 0 \mid 1 > x \geq 0\}$ ab. Die so entstandene geschlitzte Fläche nennen wir \hat{Q}_r und definieren dann die Minkowski–Fläche

$$\hat{\mathcal{L}}_r := (\hat{Q}_r, [dxdy]).$$

Die offenen Mengen

$$U_1 = (\hat{Q}_r \cap \{y > 0\}) \cup (\hat{Q}_r \cap \{x < 0\}) \text{ und } U_2 = (-1, 1) \times (-1, 0)$$

überdecken \hat{Q}_r . Die Karten

$$(U_1, \chi_1 = (x_1, y_1)) \text{ mit } x_1(x, y) = x, y_1(x, y) = y$$

und

$$(U_2, \chi_2 = (x_2, y_2)) \text{ mit } x_2(x, y) = x^3, y_2(x, y) = y,$$

induzieren eine glatte und orthoforme Übergangsfunktion auf $U_1 \cap U_2 = (-1, 0) \times (-1, 0)$. Also erzeugen (U_1, χ_1) und (U_2, χ_2) eine glatte und orthoforme Struktur auf dem Hausdorff-Raum \hat{Q}_r ; die so erhaltene Fläche bzw. durch die orthoforme Struktur definierte Lorentz-Fläche bezeichnen wir mit

$$Q_r^* \text{ bzw. } \mathcal{L}_r^* := (Q_r^*, [h^*]).$$

Dann gilt:

2.7.18 SATZ. $\mathcal{L}_r^* \sim_0 \hat{\mathcal{L}}_r$, aber \mathcal{L}_r^* ist nicht C^1 -konform äquivalent zu irgendeiner Minkowski-Fläche.

Beweis. Wir zeigen, daß die Identität ein konformer Homöomorphismus ist. Dazu reicht es zu beweisen: Die Identität $id : \mathcal{L}_r^* \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_r$ ist bezüglich der orthoformen Strukturen von $\hat{\mathcal{L}}_r$ und \mathcal{L}_r^* positiv stetig orthoform. Sei z.B. $p \in U_2$. Der Atlas auf \hat{Q}_r ist durch die Identität gegeben. Dann gilt: $id \circ \chi_2^{-1}(x, y) = (\sqrt[3]{x}, y)$, also sind die Komponentenfunktionen streng monoton steigend und stetig (aber nicht C^1). Auf U_1 erhalten wir die Identität. Also ist nach 2.6.39 die Identität ein konformer Homöomorphismus. Jedoch ist \mathcal{L}_r^* nicht C^1 -konform äquivalent zu irgendeiner Minkowski-Fläche. Denn angenommen, $F : \mathcal{L}_r^* \hookrightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ wäre ein C^1 -konformer Diffeomorphismus auf sein Bild. Definiere die Unterfläche

$$Q^* := Q_r^* \cap \{x > -1\},$$

die unabhängig von der Wahl von r ist. Sei

$$\mathcal{L}^* := (Q^*, [h^*_{|Q^*}]).$$

Dann restringierte F zu einer C^1 -konformen Äquivalenz zwischen \mathcal{L}^* und $F(\mathcal{L}^*)$. Dann reicht zu zeigen:

\mathcal{L}^* ist nicht C^1 -konform äquivalent zu irgendeiner Minkowski-Fläche.

Angenommen, $F : \mathcal{L}^* \hookrightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ wäre eine C^1 -konforme Äquivalenz auf sein Bild. Da die Bilder der Nulllinien von $\mathcal{L}^* = (Q^*, [h^*_{|Q^*}])$ und $(Q^*, [dxdy])$ dieselben sind, induziert $\mathbb{E}^{2,1}$ eine natürliche Zeitorientierung auf \mathcal{L}^* und damit einen natürlichen Durchlaufsinne auf den Nullkurven von \mathcal{L}^* . Also können

wir modulo Rotation um π annehmen, daß F den natürlichen Durchlaufsinne der X - und Y -Kurven erhält. Seien γ^+ bzw. γ^- die X -Linien, die durch $y \equiv \frac{1}{2}$ bzw. $y \equiv -\frac{1}{2}$ in \mathcal{L}^* gegeben sind. Sei

$$\gamma_0^+ := \gamma^+ \cap \{(x, \frac{1}{2}) \mid x \leq 0\} \text{ und } \gamma_0^- := \gamma^- \cap \{(x, -\frac{1}{2}) \mid x \leq 0\}.$$

Sind $p \in \gamma^+$ und $q \in \gamma^-$ zwei Punkte, die auf der gleichen Y -Linie in Q^* liegen, so befinden sich auch $F(p)$ und $F(q)$ auf der gleichen Y -Linie. Dann gilt für

$$G := \{p \in F(\gamma^+) \mid Y\text{-Linie durch } p \text{ schneidet } F(\gamma^-)\},$$

daß $F(\gamma_0^+) \subsetneq G$. Sei dann $\hat{f} : G \rightarrow F(\gamma^-)$ die Abbildung, die jeden Punkt $p' \in F(\gamma^+)$ auf den korrespondierenden Punkt $q' \in F(\gamma^-)$ abbildet (d.h. p' und q' liegen auf der selben Y -Linie), falls dieser existiert. Dann ist \hat{f} ein Diffeomorphismus und insbesondere auf $F(\gamma_0^+)$ definiert, und das Bild von \hat{f} enthält $F(\gamma_0^-)$ als echte Untermenge. Wir definieren $f := F^{-1} \circ \hat{f}$. Dann ist f ein Diffeomorphismus von γ^+ in γ^- , dessen Bild γ_0^- echt enthält. Gilt $f((x, \frac{1}{2})) = (\sigma(x), -\frac{1}{2})$ für $-1 < x < 1$, so ist $\chi_{2|\gamma^-} \circ \sigma \circ id_{\gamma^+}(x) = \sigma^3(x)$ eine Abbildung der Klasse C^1 mit strikt positiver Ableitung und $\sigma(x) \equiv x$ bzw. $\sigma(x) \equiv 1$ für $-1 < x \leq 0$. Dann folgt aber

$$\frac{d}{dx}(\sigma^3) = 3\sigma^2 \frac{d}{dx}\sigma = 3\sigma^2,$$

d.h. $\frac{d}{dx}(\sigma^3) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0^-$, Widerspruch. ■

Wir haben gezeigt, daß \mathcal{L}_r^* für jedes $r \in (0, 1)$ nicht C^1 -konform äquivalent zu einer Minkowski-Fläche ist. Dann folgt wie für die Lorentz-Flächen \mathcal{L}_r , daß $\mathcal{L}_r^* \sim_0 \mathcal{L}_{r'}^*$ dann und nur dann gilt, wenn $r = r'$ ist. Damit ergibt sich der

2.7.19 SATZ. *Es existieren überabzählbar viele einfach zusammenhängende, paarweise nicht stetig konform äquivalente Lorentz-Flächen, jede konform homöomorph zu einer Minkowski-Fläche, aber nicht C^1 -konform äquivalent zu irgendeiner Minkowski-Fläche.*

Diese Resultate lassen wenig Hoffnung auf ähnlich einfache Klassifikationsresultate wie in der Theorie der Riemannschen Flächen. Jedoch könnten vielleicht durch weitere — nicht unbedingt topologische — Zusatzbedingungen stärkere Ergebnisse erzielt werden. Man vergleiche dazu folgendes Resultat:

2.7.20 SATZ. *Es existieren genau 21 Äquivalenzklassen bezüglich \sim_0 in der Klasse der beschränkten, konvexen Minkowski-Flächen, die symmetrisch bezüglich einer Nulllinie in $\mathbb{E}^{2,1}$ sind.*

Beweis. Siehe [Sm96]. ■

2.8 Ideale Ränder

Bei der Besprechung der Beispiele aus Abschnitt 2.7 bemerkten wir, daß auf einfach zusammenhängenden Flächen ein Großteil der konformen Information im Schnittpunktverhalten der Nulllinien kodiert wurde, und zwar auch und vor allem in den "virtuellen" Schnittpunkten im "Unendlichen". Diese Beobachtung führte auf einen Randbegriff, den man als unendlich fernen Horizont interpretieren mag und sich aus der Kompaktifizierung der Nulllinien ergab. Diesen Ansatz werden wir nun für einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen formalisieren, was zu der Konstruktion einer wichtigen konformen Invariante, des sogenannten idealen Randes führt. Dabei sei darauf hingewiesen, daß derartige Randbegriffe auch für Riemannsche Flächen (vgl. z.B. die Abschnitte I.13 A und I.13 D in [AhSa60]) oder in der Kausalitätstheorie (siehe [BeEhEa96], Abschnitt 6.4) betrachtet werden.

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{L} = (S, h)$ eine einfach zusammenhängende, zeitorientierte Lorentz-Fläche. Wie üblich betrachten wir auf zeitorientierten Lorentz-Flächen stets Karten aus \mathfrak{A}^+ , und alle konformen Äquivalenzen sollen ebenfalls die natürliche Orientierung der Nulllinien respektieren. Die zitierten Aufgaben beziehen sich auf [We96].

2.8.1 Die Konstruktion des idealen Randes

Wir folgen im wesentlichen den Ideen des Artikels [Ku85] und des 4. Kapitels aus [We96].

Der Grund für die Betrachtung einfach zusammenhängender und zeitorientierter Lorentz-Flächen besteht darin, daß

- jede Nulllinie eine Einbettung ihres Definitionsbereiches ist (vgl. 2.5.18),
- wir jeder Nulllinie eine natürliche Orientierung zuweisen können und auf einer Umgebung jeder Nulllinie ein isotropes Koordinatensystem aus \mathfrak{A}_h^+ definiert ist (vgl. 2.8.20) und
- der Kurvensatz von Jordan gilt (vgl. 2.2.11 und 2.2.12).

Wir beginnen mit der Konstruktion des idealen Randes. Dabei soll der abstrakte Randbegriff mit dem in 2.7.7 definierten übereinstimmen. Wir wollen uns daher stets Minkowski-Flächen der Form $\mathcal{L}_{Int(\Gamma)}$, wobei Γ ein C^1 -Jordanbogen ist, vor Augen halten.

2.8.1 DEFINITION. *Eine Folge $(a_n) \subset S$ heißt K -Folge entlang γ , falls*

- eine Nulllinie $\gamma : I \rightarrow S$ und*
- eine streng monotone Folge $(t_n) \subset I$ mit $\gamma(t_n) = a_n$ existiert, so daß*

(iii) (a_n) nicht in S konvergiert.

Dabei sprechen wir von einer rechten K -Folge, falls die Folge (t_n) aus (ii) streng monoton steigt, und von einer linken, falls sie streng monoton fällt. In diesem Sinne sprechen wir von der Richtung einer K -Folge. \mathcal{K} bezeichne die Menge aller K -Folgen in S .

2.8.2 DIE KONSTRUKTION DES IDEALEN RANDES. Wir konstruieren den idealen Rand in vier Schritten: Seien $(a_n), (b_n) \in \mathcal{K}$.

(i) Wir definieren eine Relation \sim auf \mathcal{K} wie folgt: $(a_n) \sim (b_n)$ gelte genau dann, wenn beide K -Folgen in die gleiche Richtung zeigen und eine Nullkurve ν mit $a_n, b_n \in \nu$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Die Äquivalenzklasse $[(a_n)] = [(b_n)]$ schreiben wir ν^+ bzw. ν^- bzw. generisch ν^∞ , falls wir die Richtung nicht hervorheben wollen, und nennen sie (rechten bzw. linken) Endpunkt. Eine Nullkurve, die nur positive bzw. negative K -Folgen enthält, nennen wir rechtes bzw. linkes Nullende und schreiben dafür auch $\nu \uparrow$ bzw. $\nu \downarrow$. Ist also $\nu : (a, b) \rightarrow S$ der maximale Definitionsbereich einer Parametrisierung von ν , so definieren die Nullstrahlen $[c, b]$ bzw. $(a, c]$ rechte bzw. linke Nullenden. In diesem Sinne reden wir auch von dem rechten oder linken Nullende $\nu \uparrow_p$ bzw. $\nu \downarrow_p$ ab $p = \nu(c)$. Enthält eine Nullkurve ein positives bzw. negatives Nullende, so sprechen wir einfach von einem Nullende. Wir definieren die Menge der Endpunkte² $\mathcal{E} = (\mathcal{K} / \sim)$.

Um unsere Vorstellung von Schnittpunkten im "Unendlichen" zu formalisieren, müssen wir aber noch gewisse Endpunkte untereinander identifizieren, denn ein Endpunkt kann von verschiedenen Nulllinien aus approximiert werden. Dies geschieht in den folgenden drei Schritten:

(ii) Seien $\alpha^\infty, \beta^\infty \in \mathcal{E}$. Wir sagen, daß α^∞ nach β^∞ zeigt und schreiben dafür $\alpha^\infty \nearrow \beta^\infty$, falls eine Karte (U, χ) von \mathcal{L} mit folgenden Eigenschaften existiert:

(a) $\overline{\chi(U)}$ ist kompakt in \mathbb{R}^2 ,

(b) $a_n, b_n \in U$ gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist

(c)

$$\lim \chi(a_n) = \lim \chi(b_n) = q \in \partial\chi(U),$$

wobei q die Ecke eines Rechteckes R in $\chi(U)$ mit $\bar{R} \setminus \{q\} \subset \chi(U)$ ist. Dabei gelte weiterhin: Sind σ und μ die an q liegenden Kanten und benennt σ diejenige Kante, die durch eine Drehung in $\chi(U)$ gegen den Uhrzeigersinn in μ überführt werden kann, so ist $a_n \in \chi^{-1}(\sigma)$ und $b_n \in \chi^{-1}(\mu)$ für fast alle n . Die Benennung der Kanten ist eindeutig, denn könnten beide an q liegenden Kanten durch Drehung gegen

²Im einem gewissen Sinne kann man die Endpunkte als ω - bzw. α -Punkte analog zu 1.5.22 auffassen, allerdings mit dem Unterschied, daß die Endpunkte virtuell und nicht der Fläche zugehörig sind.

den Uhrzeigersinn in $\chi(U)$ ineinander überführt werden, wäre wegen $q = \lim \chi(a_n) = \lim \chi(b_n)$ und 2.8.1 (iii) S nicht einfach zusammenhängend.

Anschaulich bedeutet dies folgendes (vgl. [Ku85], Abschnitt 2.4): Sei beispielsweise l eine X -Linie, und m eine Y -Linie mit $l \cap m = \emptyset$, und (a_n) und (b_n) zwei K -Folgen entlang l bzw. m . Gemäß der eingangs gemachten Bemerkung können wir in einer Umgebung von l Nullkoordinaten $\chi = (x, y)$ einführen, so daß $\chi(l) = \{y \equiv 0\}$ ist. Angenommen, es existiert ein $\epsilon > 0$ derart, daß das Y -Segment $\{(x, y) \mid \epsilon < y < 0\}$ einem Y -Segment in m sich beliebig nähert (wobei "beliebig nah" intuitiv zu verstehen ist). Dann gilt $l^+ \nearrow m^+$.

(iii) Wir sagen, daß α^∞ indirekt nach β^∞ zeigt und schreiben dafür $\alpha^\infty \nearrow \beta^\infty$, falls eine endliche Familie von Endpunkten $\{\alpha_i^\infty\}_{i=0}^n \subset \mathcal{E}$ mit $\alpha_0^\infty = \alpha^\infty$, $\alpha_n^\infty = \beta^\infty$ und $\alpha_i^\infty \nearrow \alpha_{i+1}^\infty$ für $i = 0, \dots, n-1$ existiert. Die Familie $\{\alpha_i^\infty\}_{i=0}^n$ heißt die von α^∞ nach β^∞ führende Liste.

(iv) Wir sagen, daß α^∞ äquivalent zu β^∞ ist und schreiben dafür $\alpha^\infty \cong \beta^\infty$, falls $\alpha^\infty = \beta^\infty$, $\alpha^\infty \nearrow \beta^\infty$ oder $\beta^\infty \nearrow \alpha^\infty$ gilt. \cong ist trivialerweise eine Äquivalenzrelation.

2.8.3 DEFINITION. Die Menge $\partial S := \mathcal{E} / \cong$ heißt idealer Rand von \mathcal{L} . Die Äquivalenzklassen nennen wir ideale (End-)Punkte und schreiben diese $[\alpha^\infty]$, wobei α ein Nullende ist. Die Menge $\bar{\mathcal{L}} := S \cup \partial S$ nennen wir fortgesetzte Lorentz-Fläche.

2.8.4 BEISPIELE.

(i) Sei $U = \text{Int}(\Gamma)$, wobei Γ ein C^1 -Jordanbogen ist. Dann gilt $\partial U = \Gamma$. Betrachten wir konkret die Lorentz-Fläche

$$(\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, [dxdy]),$$

so entsprechen in der Schreibweise von 2.8.2 die Randpunkte $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ respektive den idealen Punkten $[l_{(0,0)}^+]$, $[m_{(0,0)}^+]$, $[l_{(0,0)}^-]$ und $[m_{(0,0)}^-]$. Für die Randpunkte aus den Kreissektoren $\Gamma \cap \{x, y > 0\}$, $\Gamma \cap \{x < 0, y > 0\}$, $\Gamma \cap \{x < 0, y < 0\}$ und $\Gamma \cap \{x > 0, y < 0\}$ gilt respektive $l^+ \nearrow m^+$, also $[l^+] = [m^+]$, $m^+ \nearrow l^-$, also $[m^+] = [l^-]$, $l^- \nearrow m^-$, also $[l^-] = [m^-]$ und $m^- \nearrow l^+$, also $[m^-] = [l^+]$.

(ii) Wir betrachten wieder die punktierte Ebene $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei m_0 die negative y -Achse, l_1 die positive x -Achse, m_2 die positive y -Achse und l_3 die negative x -Achse. Alle vier Nulllinien münden bzw. beginnen im Ursprung. Weil S nicht einfach zusammenhängend ist, können wir die Relation \nearrow nicht sinnvoll definieren (denn die Benennung der Kanten wäre nicht eindeutig, vgl. 2.8.2 (ii)); wir betrachten daher die universelle Überlagerung S^∞ aus 2.7.5 (i). Dann war γ_{4k+i} der Lift in die k -te

Kopie von m_i , falls i gerade, und von l_i , falls i ungerade ist. Dann finden wir

$$m_0^+ \nearrow l_1^- \nearrow m_2^- \nearrow l_3^+ \nearrow \gamma_{4+0}^+ \nearrow \gamma_{4+1}^- \nearrow \dots$$

Wir können diese Liste auch nach unten fortsetzen, indem wir weitere Kopien von S an der noch freien Kante von $S = S_0$ ankleben (vgl. 2.7.5 (i)) und die entsprechenden Hebungen γ_{4k-i} für negative ganze Zahlen k betrachten. Dann finden wir

$$\dots \nearrow \gamma_{-3}^- \nearrow \gamma_{-2}^- \nearrow \gamma_{-1}^+ \nearrow m_0^+ \nearrow \dots$$

Den durch diese Nulllinien definierte ideale Endpunkt $\dots = [\gamma_{-1}^+] = [m_0^+] = [l_1^-] = [m_2^-] = \dots$ nennen wir ω^∞ .

Das letzte Beispiel zeigt, daß die auftretenden Listen unendlich lang sein können und weder Anfangs- noch Endpunkt besitzen müssen. Jedoch sind Listen der Form $\dots \nearrow m^+ \nearrow l^- \nearrow m^- \nearrow l^+ \nearrow \dots$ kein Zufall:

2.8.5 LEMMA.

- (i) Seien l und m eine X - bzw. Y -Linie in S mit $[l^\infty] = [m^\infty]$. Dann treten nur die Fälle $l^+ \nearrow m^+$, $l^- \nearrow m^-$, $m^+ \nearrow l^-$ und $m^- \nearrow l^+$ auf.
- (ii) Seien l' und m' eine weitere X - bzw. Y -Linie in S . Gilt $l'^\infty \nearrow m^\infty$ und $l^\infty \nearrow m^\infty$, so folgt $l' = l$ und $l'^\infty = l^\infty$. Genauso gilt, daß aus $l^\infty \nearrow m^\infty$ und $l^\infty \nearrow m'^\infty$ $m = m'$ und $m^\infty = m'^\infty$ folgt. Insbesondere ist die von einem Nullpunkt zu einem anderen Nullpunkt führende Liste eindeutig.

Beweis. (i) Insgesamt können acht Fälle auftreten: $l^+ \nearrow m^+$, $l^- \nearrow m^-$, $m^+ \nearrow l^-$, $m^- \nearrow l^+$ und $l^+ \nearrow m^-$, $l^- \nearrow m^+$, $m^+ \nearrow l^+$, $m^- \nearrow l^-$. Anhand der Definition 2.8.2 bzw. 2.8.4 (i) ist klar, daß jede Minkowski-Fläche mit kompakten Abschluß höchstens die ersten vier Fälle realisieren kann, und da der Fall einer allgemeinen Lorentzfläche durch 2.8.2 (ii) auf den einer Minkowski-Fläche mit kompakten Abschluß zurückgeführt wird, folgt die Behauptung.

(ii) Um die Notation zu fixieren, nehmen wir z.B. $[m^\infty] = [m^+]$ an. Dann gilt nach (i):

$$[l'^\infty] = [l'^+] = [m^+] = [l^\infty] = [l^+].$$

Es bleibt zu zeigen: $l = l'$. Nach Voraussetzung existieren K -Folgen (a_n) , (b_n) und (b'_n) und Karten (U, χ) , (U', χ') mit

$$\lim \chi(b_n) = \lim \chi(a_n) = \lim \chi'(b'_n),$$

d.h. $\chi(b_n)$ und $\chi'(b'_n)$ liegen entlang derselben Kante. ■

Um weitere Aussagen über den idealen Rand beweisen zu können, benötigen wir zuerst ein technisches, aber intuitiv einsichtiges Lemma (vgl. auch den Beweis von Satz 2.5 aus [Ku85]):

2.8.6 LEMMA UND DEFINITION. *Seien α^∞ und β^∞ zwei Endpunkte mit $\alpha^\infty \nearrow \nearrow \beta^\infty$ und Liste $\{\alpha_i^\infty\}_{i=1}^n$ (vgl. 2. 8. 2 (iii)). Dann existiert ein einfacher, nicht geschlossener und stückweise glatter Bogen Λ in S , der aus n (glatten) Nullbögen besteht, in einem Punkt $r_1 \in \alpha_1 = \alpha$ beginnt, in einem Punkt $r_n \in \alpha_n = \beta$ endet und die Nulllinie γ_i , die das Nullende α_i enthält, genau in einem Punkt $r_i \in \alpha_i$ schneidet. Dabei kann Λ so konstruiert werden, daß $\Lambda \cap K = \emptyset$ für eine fest vorgegebene kompakte Menge K in S gilt. Einen solchen Bogen Λ nennen wir $\alpha^\infty, \beta^\infty$ -Zug und das zugehörige n die Länge von Λ . Insbesondere folgt: Jede Erweiterung eines $\alpha^\infty, \beta^\infty$ -Zuges Λ der Länge n zu einem X, Y -Polygon hat mindestens $n + 1$ Ecken, die nicht aus Λ sind.*

Beweis. Siehe Lemma 18 und das zugehörige Korollar auf S.59 in [We96]. ■

2.8.7 KOROLLAR. *Die Fälle*

$$\nu^+ \nearrow \nearrow \nu^+, \nu^- \nearrow \nearrow \nu^-, \nu^+ \nearrow \nearrow \nu^-, \nu^- \nearrow \nearrow \nu^+$$

sind unmöglich.

Beweis. Ein ν_+, ν_+ -Zug ist entweder geschlossen oder schneidet die Nulllinie $\gamma_1 = \gamma_n$ in zwei verschiedenen Punkten, im Widerspruch zu 2.8.6. Gleiches gilt für die übrigen Fälle. ■

Um die auf 2.8.6 fußenden Beweistechniken zu demonstrieren, sei stellvertretend der folgende Satz bewiesen:

2.8.8 SATZ. *Zwei verschiedene Nulllinien γ_1 und γ_2 mit $[\gamma_1^\infty] = [\gamma_2^\infty]$ können nicht die gleiche Nulllinie schneiden.*

Beweis. Nehmen wir o.B.d.A. $\gamma_1 \nearrow \nearrow \gamma_2$ an. Schneiden γ_1 und γ_2 dieselbe Nulllinie γ in \mathcal{L} , so sind γ_1 und γ_2 Nulllinien gleichen Typs. Sei $\hat{\gamma}$ der Nullbogen in γ , der $p_1 \in \gamma_1 \cap \gamma$ mit $p_2 \in \gamma_2 \cap \gamma$ verbindet (eventuell besteht $\hat{\gamma}$ nur aus einem Punkt). Dann ist $\hat{\gamma}$ kompakt, und wir können einen $\gamma_1^\infty, \gamma_2^\infty$ -Zug konstruieren, der $\hat{\gamma}$ nicht schneidet. Weil γ_1 und γ_2 Nulllinien gleichen Typs sind, muß die von γ_1 nach γ_2 führende Liste mindestens drei Endpunkte aufweisen (vgl. 2.8.5), und die Länge von Λ beträgt mindestens 3. Dann setzen wir Λ zu einem einfach geschlossenen Bogen Γ fort, indem wir von r_n nach p_2 entlang γ_2 , dann über $\hat{\gamma}$ nach p_1 und von p_1 nach r_1 entlang γ_1 gehen und schließlich über Λ zurücklaufen. Dann ist Γ ein X, Y -Polygon mit höchstens zwei Ecken in p_1 und p_2 , die nicht in Λ liegen, im Widerspruch zu 2.8.6. ■

2.8.9 SATZ UND DEFINITION.

(i) Die Vereinigung eines Nullende ν mit seinem (oder seinen) idealem(-n) Endpunkt(en) heißt vollständiges Nullende, das wir $\bar{\nu}$ schreiben. Dann gilt: Fortgesetzte Nulllinien sind entweder identisch oder schneiden sich in höchstens einem Punkt in $\bar{\mathcal{L}}$.

(ii) Seien nun $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ und $\bar{\gamma}_3$ drei fortgesetzte Nulllinien, die sich paarweise in den Punkten $p \in \bar{\gamma}_1 \cap \bar{\gamma}_2$, $q \in \bar{\gamma}_2 \cap \bar{\gamma}_3$ und $r \in \bar{\gamma}_1 \cap \bar{\gamma}_3$ schneiden. Dann sind $p, q, r \in \bar{\mathcal{L}}$ verschieden und die Vereinigung von p, q und r und aller Punkte, die zwischen diesen auf den Nulllinien $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ und $\bar{\gamma}_3$ liegen, heißt fortgesetztes Null-Dreieck mit Ecken in p, q und r . Dann gilt: Auf $\bar{\mathcal{L}}$ existieren keine fortgesetzten Null-Dreiecke.

Beweis. Siehe Theorem 3 und 4 in [We96]. ■

DIE CHARAKTERISTIK EINES PUNKTES. Sei $\omega = [\alpha^\infty] \in d\mathcal{L}$ und $\Omega = \{\gamma^\infty \mid [\gamma^\infty] = \omega\}$ die Menge aller Repräsentanten von ω . Weil jede Lorentz-Fläche nach Vereinbarung das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist Ω höchstens abzählbar unendlich. Weil für $\alpha^\infty, \beta^\infty \in \Omega$ stets $\alpha^\infty \nearrow \beta^\infty$, $\beta^\infty \nearrow \alpha^\infty$ oder $\alpha^\infty = \beta^\infty$ gilt, induziert die Relation \nearrow eine induktive Ordnung auf Ω , d.h. wir können jedem $\omega \in d\mathcal{L}$ eine induktiv geordnete Kette $\langle \omega \rangle$ der Form $\dots \nearrow \alpha_{-1} \nearrow \alpha_0 \nearrow \alpha_1 \nearrow \dots$, das sogenannten Symbol von ω , zuordnen.

2.8.10 DEFINITION

(i) Die Funktion

$$\sigma : d\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty, \pm\infty\},$$

definiert durch

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \text{card}(\langle \omega \rangle), & \text{falls } \langle \omega \rangle \text{ endlich} \\ -\infty \text{ bzw. } +\infty, & \text{falls } \langle \omega \rangle \text{ kein kleinstes/größtes Element hat} \\ \pm\infty, & \text{falls } \langle \omega \rangle \text{ weder kleinstes noch größtes Element hat} \end{cases}$$

heißt Charakteristik des idealen Randes.

(ii) Ein idealer Punkt $\omega \in d\mathcal{L}$ heißt nichtcharakteristisch, falls $\sigma(\omega) = 2$ und charakteristisch andernfalls.

(iii) Gilt für die Charakteristik $\sigma \equiv n \in \mathbb{N}$, so nennen wir \mathcal{L} eine Lorentz-Fläche der Charakteristik n .

2.8.11 BEMERKUNG. Das Symbol eines nichtcharakteristische Punktes wird nach 2.8.5 entweder durch $l^+ \nearrow m^+$, $m^+ \nearrow l^-$, $l^- \nearrow m^-$ oder $m^- \nearrow l^+$ gegeben. Jeden nichtcharakteristischen Punkt können wir demnach als Punkt vom Typ $\{l^+, m^+\}$, $\{m^+, l^-\}$, $\{l^-, m^-\}$ und $\{m^-, l^+\}$ klassifizieren (dies entspricht den Typen s_+ , t_- , s_- und t_+ aus 2.10 in [Ku85]). Ist insbesondere \mathcal{L} eine Lorentz–Fläche der Charakteristik 2, so zerfällt $d\mathcal{L}$ in die vier disjunkten Teilmengen dieser Typen.

2.8.12 BEISPIELE.

(i) Die einzigen charakteristischen Punkte der in 2.8.4 (i) betrachteten Lorentz–Fläche sind $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$.

(ii)

$$\mathbb{D}^{2,1} := (\{-1 < y - x < 1\}, [dx dy]) \quad \text{und} \quad -\mathbb{D}^{2,1} := (\{-1 < x + y < 1\}, [dx dy])$$

stellen den Prototypen von Lorentz–Flächen der Charakteristik 2 dar. Diese Lorentz–Flächen können als Analogon zu \mathbb{D} aus 2.1.9 (iii) angesehen werden (vgl. 2.8.32).

(iii) Für den Punkt ω^∞ aus 2.8.4 (ii) gilt $\sigma(\omega^\infty) = \pm\infty$. Betrachtet man nur die positiven Kopien S_k von $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (also die Lorentz–Fläche \mathcal{L}^∞) und definiert analog zu 2.8.4 (ii) den Punkt ω^∞ , so gilt $\sigma(\omega^\infty) = +\infty$. Genauso findet man für die negativen Kopien $\sigma(\omega^\infty) = -\infty$ bzw. $\sigma(\omega^\infty) = n$, falls wir nur n Kopien an S ankleben. Die Charakteristik kann also alle Werte aus $\mathbb{N} \cup \{-\infty, +\infty, \pm\infty\}$ annehmen.

TOPOLOGISIERUNG DES IDEALEN RANDES. Um eine Topologie auf dem idealen Rand zu definieren, geben wir eine Unterbasis einer Topologie \mathfrak{T} der erweiterten Lorentz–Fläche $\overline{\mathcal{L}}$ an, die auf \mathcal{L} die alte Topologie induziert. Durch Einschränkung auf $d\mathcal{L}$ erhalten wir schließlich eine Topologie auf dem idealen Rand. Wir beginnen mit folgendem

2.8.13 LEMMA. *Sei γ eine Nulllinie. Dann hat $S \setminus \gamma$ genau zwei Zusammenhangskomponenten.*

Beweis. Da γ einfach ist, folgt, daß es höchstens zwei Komponenten geben kann. Angenommen, $S \setminus \gamma$ hätte nur eine Komponente, wäre also bogenzusammenhängend. Sei γ o.B.d.A. eine X –Kurve. Wir wählen ein $p \in \gamma$ und Nullkoordinaten $\chi = (x, y)$ um p , so daß $\chi(U \cap \gamma) = \{y \equiv 0\}$. Sei τ eine zu γ transversale Kurve durch p und q_+ und q_- zwei Punkte aus τ mit $y > 0$ bzw. $y < 0$. Da gemäß unserer Annahme $S \setminus \gamma$ bogenzusammenhängend sein soll, können wir q_+ und q_- durch eine Kurve α in $S \setminus \gamma$ miteinander verbinden. Die Kurve Γ , die von q_+ nach q_- entlang α und von q_- nach q_+ entlang von τ geht, ist dann offensichtlich ein (stetiger) Jordanbogen. Nach Satz 2.2.11 bzw. 2.2.12 ist also $K = \text{Int}(\Gamma)$ kompakt, und enthält das positive oder negative Nullende $\gamma \uparrow_p$ bzw. $\gamma \downarrow_p$ — Widerspruch zu 2.5.18. ■

Für jede Nulllinie γ erhalten wir also zwei nichtleere, offene und disjunkte Mengen. Diese bezeichnen wir mit \mathcal{U}_γ^+ und \mathcal{U}_γ^- , wobei das Vorzeichen wie folgt gewählt werden soll: Sei $\hat{\gamma}$ eine weitere Nulllinie, die γ in p schneidet. Sei dann \mathcal{U}_γ^+ bzw. \mathcal{U}_γ^- diejenige Komponente, die das rechte bzw. linke Nullende ab p von $\hat{\gamma}$ enthält. Diese Einteilung ist unabhängig von dem fixierten $\hat{\gamma}$: Sei $\hat{\gamma}_1$ eine weitere Nulllinie, die γ in einem Punkt p schneidet. Nach 2.8.20 existiert eine Rechteck-Karte (U, χ) aus \mathfrak{A}_h^{0+} , die den Nullbogen zwischen den Schnittpunkten p und p_1 enthält. Diese bildet $\hat{\gamma} \uparrow_p \cap U$ und $\hat{\gamma}_1 \uparrow_{p_1} \cap U$ auf dieselbe Seite bezüglich $\chi(U \cap \gamma)$ ab. $\hat{\gamma}$ und $\hat{\gamma}_1$ ergeben also die gleiche Bezeichnung. Wir definieren dann

$$d\mathcal{U}_\gamma^+ := \{\omega = [\nu^\infty] \in d\mathcal{L} \mid \nu \text{ ist linkes oder rechtes Nullende in } \mathcal{U}_\gamma^+ \setminus \{[\gamma^+], [\gamma^-]\}\}$$

und genauso

$$d\mathcal{U}_\gamma^- := \{\omega = [\nu^\infty] \in d\mathcal{L} \mid \nu \text{ ist linkes oder rechtes Nullende in } \mathcal{U}_\gamma^- \setminus \{[\gamma^+], [\gamma^-]\}\}.$$

Sei dann

$$\bar{\mathcal{U}}_\gamma^\pm := \mathcal{U}_\gamma^\pm \cup d\mathcal{U}_\gamma^\pm.$$

\mathfrak{T} sei dann die von den Mengen $\bar{\mathcal{U}}_\gamma^\pm$ erzeugte Topologie auf $\bar{\mathcal{L}}$. Restringsiert auf die Lorentz-Fläche \mathcal{L} erhalten wir die alte Topologie zurück (vgl. Aufg. 4.3.6).

Wir weisen darauf hin, daß die soeben eingeführte Topologie aus [We96] von der in [Ku85] benutzten abweicht (siehe die Diskussion S.69 ff. in [We96]). Die von Kulkarni vorgeschlagene Topologie weist einige Nachteile auf, z.B. gilt 2.8.16 (i) nicht mehr, da man leicht isolierte Punkte als Schnitt zweier offener Mengen erhält.

Als Eigenschaften von \mathfrak{T} notieren wir:

2.8.14 SATZ.

- (i) $d\mathcal{L}$ ist Hausdorffsch
- (ii) $d\mathcal{L}$ ist parakompakt.
- (iii) $d\mathcal{L}$ besitzt keine isolierten Punkte.

Beweis. (i) Siehe [Sm96].

(ii) Siehe [Sm?].

(iii) Siehe Theorem 7 in [We96]. ■

2.8.15 DEFINITION. \mathcal{L} heißt regulär (im Unendlichen), falls $d\mathcal{L}$ eine topologische 1-Mannigfaltigkeit definiert, d.h. ein parakompakter Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu \mathbb{R} ist.

2.8.16 BEISPIELE.

(i) Ist Γ eine C^1 -Jordankurve in \mathbb{R}^2 , so ist

$$d\mathcal{L}_{Int(\Gamma)} \stackrel{\text{homöo-}}{\cong} \Gamma, \\ \text{morph}$$

d.h. man kann Γ als homöomorphe Realisierung des idealen Randes betrachten; insbesondere ist $\mathcal{L}_{Int(\Gamma)}$ regulär (vgl. Aufg. 4.3.3 aus [We96]). Allerdings muß auch für diese Topologie der ideale Rand einer Minkowski-Fläche nicht immer mit der von $\mathbb{E}^{2,1}$ induzierten Topologie zusammenfallen, selbst wenn $d\mathcal{L} = \partial\mathcal{L}$ gilt (vgl. Figur 26 b in [We96]).

(ii) Jede Umgebung von ω^∞ ist nicht zusammenhängend, insbesondere ist \mathcal{L}^∞ nicht regulär.

2.8.17 BEMERKUNG. Unsere Konstruktion des idealen Randes verallgemeinert den in 2.7 eingeführten Begriff. Insbesondere kann jeder konforme Homöomorphismus $F : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ zwischen zwei einfach zusammenhängenden, zeitorientierten Lorentz-Flächen zu einem eindeutig bestimmten Homöomorphismus $\bar{F} : \bar{\mathcal{L}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{L}}_2$ fortgesetzt werden, und die Einschränkung $\bar{F}|_{\partial\mathcal{L}_1} : \partial\mathcal{L}_1 \rightarrow \partial\mathcal{L}_2$ ist ein Homöomorphismus zwischen den Rändern (siehe Aufg. 4.3.7 aus [We96]). Die Existenz eines solchen Homöomorphismus impliziert aber noch nicht Fortsetzbarkeit auf die gesamte Lorentz-Fläche (siehe [We96], S.71 f.). Der ideale Rand kodiert also nicht die gesamte konforme Information einfach zusammenhängender, zeitorientierter Flächen.

2.8.2 Der Abbildungssatz von Kulkarni und weitere Anwendungen

Wir wollen nun ideale Ränder miteinander vergleichen und untersuchen, inwieweit die Kenntnis des idealen Randes auf die zugehörige konforme Klasse der Lorentz-Fläche schließen läßt. Da die Beweise, auch und vor allem der anschaulich einsichtigen Tatsachen zum Teil technisch aufwendig sind, wollen wir uns mit der Darstellung der wesentlichen Ideen begnügen und lediglich die Schritte hervorstreichen, die die Nützlichkeit des Randkonzeptes beleuchten.

Um die nachfolgenden Konstruktionen zu motivieren, betrachten wir zunächst ein elementares Beispiel: $\mathbb{E}^{2,1}$ ist offenbar eine Lorentz-Fläche der Charakteristik 1. Wie können wir aber nun den idealen Rand zumindest lokal als "Kompaktifizierung" von $\mathbb{E}^{2,1}$ auffassen? Nach dem Modell-Lemma ist die Minkowski-Ebene konform äquivalent zum Quadrat $(-1, 1) \times (-1, 1)$, dessen idealer Rand durch den topologischen Rand minus der Eckpunkte gegeben wird. Dabei induziert jede Nulllinie zwei ideale Punkte. Betrachten wir z.B. das horizontale Liniensegment $I = (-1, 1) \times \{1\}$. Wir können dann jeden idealen Endpunkt, der durch I repräsentiert wird, mit einem Punkt von l_0 , der X -Linie durch den

Ursprung, identifizieren. Umgekehrt können wir aber auch I als Graphen der konstanten Funktion $f^+ : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \equiv 1$ auffassen. Intuitiv erscheint es ohnehin nicht abwegig, den idealen Rand lokal als Graph einer noch zu definierenden Funktion anzusehen; die Bildpunkte, also die Elemente des idealen Randes, wären demnach als kompaktifizierende Randpunkte der im "Graph" mündenden Nulllinien zu interpretieren. Um diesen Ansatz zu formalisieren, erweitern wir den schon in 2.6 eingeführten Spannbegriff:

2.8.18 DEFINITION. Seien λ und μ zwei Nullkurven in S mit $\lambda \cap \mu \neq \emptyset$. Dann nennen wir die Menge $sp(\lambda, \mu) := sp(\lambda) \cap sp(\mu)$ den von λ und μ erzeugten Spann.

2.8.19 BEMERKUNG. Wie bereits in 2.6.15 angemerkt, ist $sp(\lambda)$ bzw. $sp(\mu)$ offen, mithin ist auch der von λ und μ erzeugte Spann $sp(\lambda, \mu)$ offen. Ferner sind auf einfach zusammenhängenden Flächen die Mengen $sp(\lambda)$, $sp(\mu)$ und $sp(\lambda, \mu)$ ebenfalls einfach zusammenhängend (siehe Lemma 22 in [We96]).

Seien α und β zwei Parametrisierungen von λ und μ , die die natürliche Orientierung respektieren, und sei $\alpha(0) = \beta(0) = \lambda \cap \mu$. Wir definieren die Abbildung $\chi : sp(\lambda, \mu) \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $\chi(q) = (x, y)$, wobei $q \in m_{\alpha(x)} \cap l_{\beta(y)}$ gilt. Augenscheinlich überführt χ glatte Parametrisierungen von Nulllinien aus $sp(\lambda, \mu)$ in glatte Parametrisierungen von Nulllinien aus $\mathbb{E}^{2,1}$ und erhält den natürlichen Durchlaufsinne. χ definiert also gemäß 2.6.31 eine Karte aus \mathfrak{A}_h^{0+} . Damit haben wir faktisch bewiesen:

2.8.20 SATZ. Sei \mathcal{L} eine einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche. Jeder von zwei (sich schneidenden) Nullkurven erzeugte Spann ist konform-äquivalent zu einer Minkowski-Fläche. Insbesondere existiert um jede Nulllinie l bzw. m eine Umgebung U und eine Karte $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\chi(l) = \{y \equiv 0\}$ bzw. $\chi(m) = \{x \equiv 0\}$.

2.8.21 BEMERKUNG. Es ist wesentlich, die Lorentz-Fläche einfach zusammenhängend vorauszusetzen, um die Wohldefiniertheit von χ zu gewährleisten; der Satz ist z.B. falsch auf einem Torus mit dichten Nulllinien.

Die für Satz 2.8.20 konstruierten Karten hängen natürlich von der zu Grunde liegenden Parametrisierung der Nullkurven ab. Wir arbeiten im folgenden mit Parametrisierungen α und β der Form $(-1, 1) \rightarrow S$. Die hieraus resultierenden konformen Äquivalenzen nennen wir Spannkarten. Das Bild von $sp(\lambda, \mu)$ unter einer Spannkarte schreiben wir $Sp(\lambda, \mu)$ und nennen es den parametrisierten (λ, μ) -Spann. $Sp(\lambda, \mu)$ ist also eine offene Menge in \mathbb{R}^2 um den Ursprung, über deren "Form"

wir qualitative Aussagen unabhängig von der speziellen Parametrisierung machen können (vgl. auch [We96], S.91 ff., deren Bezeichnungen wir größtenteils übernehmen). Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{F}(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in Sp(\lambda, \mu)\}$ und definieren die Funktionen $f^+, f^- : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f^+(x) =$ kleinste obere Schranke von $\mathcal{F}(x)$ und $f^-(x) =$ größte obere Schranke von $\mathcal{F}(x)$ (analoge Überlegungen kann man auch für die Menge $\mathcal{G}(y) := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in Sp(\lambda, \mu)\}$ anstellen, siehe S.92 in [We96]). Dann gilt die Ungleichung

$$-1 = f^-(0) \leq f^-(x) < 0 < f^+(x) \leq f^+(0) = 1,$$

und nach Konstruktion ist $graph(f^\pm) \subset \partial Sp(\lambda, \mu)$. Insbesondere enthält also $graph(f^\pm)$ die Randpunkte aller maximalen vertikalen Liniensegmente in $Sp(\lambda, \mu)$ (und von denen nach unserer intuitiven Vorstellung zumindest ein Teil als ideale Punkte zu betrachten sind). Der folgende Satz macht eine erste Aussage über das Randverhalten von $Sp(\lambda, \mu)$:

2.8.22 SATZ.

- (i) Die Abbildung $f^+ : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$ ist monoton steigend auf $(-1, 0]$ und monoton fallend auf $[0, 1)$. Die Abbildung $f^- : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$ ist monoton fallend auf $(-1, 0]$ und monoton steigend auf $[0, 1)$.
- (ii) Sei γ eine Nulllinie in $\mathbb{E}^{2,1}$. Dann ist $\gamma \cap Sp(\lambda, \mu)$ entweder leer oder ein Liniensegment (vgl. auch Eigenschaft (S) aus 2.7).
- (iii) Sei $\Delta := Sp(\lambda, \mu) \setminus \{graph(f^+) \cup graph(f^-)\}$. Ist $\Delta \neq \emptyset$, so ist jede Zusammenhangskomponente von Δ ein vertikales Liniensegment J entlang $x \equiv x_0 \neq 0$, das die x -Achse nicht schneidet, falls $|x_0| \neq 1$. Dabei gilt: Ist $|x_0| = 1$, so enthält J keinen seiner Randpunkte. Ist $|x_0| \neq 1$, so enthält J den Randpunkt größerer Ordinate.

Beweis. Siehe Lemma 26, Aufg. 5.2.15 und Aufg. 5.2.18 in [We96]. ■

Unser Augenmerk richtet sich nun auf den topologischen Rand von $Sp(\lambda, \mu)$. In 1.7 sahen wir bereits, daß der ideale Rand im allgemeinen echt im topologischen Rand enthalten war; man denke z.B. an die zweite Beispielfamilie, die aus Dreiecken bestand und deren Spitzen augenscheinlich nicht im idealen Rand enthalten sind. Den idealen Punkten müßten diejenigen Punkte aus $\partial Sp(\lambda, \mu)$ entsprechen, die wir entlang der Nulllinien erreichen können. Wir definieren also: $\mathbb{L} := \{p \in \partial Sp(\lambda, \mu) \mid \text{es existiert eine konvergente Folge } (p_n) \text{ mit } p_n \rightarrow p \text{ und alle } p_n \text{ liegen in derselben horizontalen Nulllinie des } \mathbb{E}^{2,1}\} = \{\text{Randpunkte horizontaler Liniensegmente in } Sp(\lambda, \mu)\}$ und genauso $\mathbb{M} := \{p \in \partial Sp(\lambda, \mu) \mid \text{es existiert eine konvergente Folge } (p_n) \text{ mit } p_n \rightarrow p \text{ und alle } p_n \text{ liegen in derselben vertikalen Nulllinie des } \mathbb{E}^{2,1}\} = \{\text{Randpunkte vertikaler Liniensegmente in } Sp(\lambda, \mu)\}$. Nun wird in der Regel nicht jeder

Punkt aus \mathbb{L} oder \mathbb{M} ideal sein, denn die Urbilder in S der entsprechenden horizontalen bzw. vertikalen Segmente könnten einen Randpunkt in S haben, d.h. sie sind zu einem Bogen fortsetzbar und besitzen demnach einen kompakten Abschluß in S . Wir betrachten daher zusätzlich die Untermenngen $\mathbf{L} := \{\text{Randpunkte der horizontalen Liniensegmente in } Sp(\lambda, \mu), \text{ deren Urbild unter } \chi \text{ kompakten Abschluß in } S \text{ hat}\}$ und $\mathbf{M} := \{\text{Randpunkte der vertikalen Liniensegmente in } Sp(\lambda, \mu), \text{ deren Urbild unter } \chi \text{ kompakten Abschluß in } S \text{ hat}\}$. Die Komplemente, d.h. die Mengen der Form $\mathbb{L} \setminus \mathbf{L}$ bzw. $\mathbb{M} \setminus \mathbf{M}$, sind also die Endpunkte der Liniensegmente, deren Urbilder Nullenden in S sind. Daher können diese als Teilmengen des idealen Randes verstanden werden. Wir benötigen also Kriterien, um zu entscheiden, wann ein Punkt aus $\partial Sp(\lambda, \mu)$ in $\mathbb{L} \setminus \mathbf{L}$ bzw. $\mathbb{M} \setminus \mathbf{M}$ liegt. Dazu setzen wir zunächst f^+ und f^- auf $[-1, 1]$ so fort, daß f^+ und f^- in 1 bzw. -1 stetig sind. f^+ und f^- sind im allgemeinen nicht auf dem gesamten Intervall $[-1, 1]$ stetig, denn f^+ bzw. f^- weisen Sprungstellen an den vertikalen Liniensegmenten von $\partial Sp(\lambda, \mu)$ auf (vgl. 2.8.22 (iii)). Das Innere dieser vertikalen Sprungstellen besitzt offenbar keine idealen Endpunkte aus \mathbb{L} (vgl. auch Aufg. 5.2.21). Für die Randpunkte gilt aber folgendes

2.8.23 LEMMA.

- (i) Sei $0 < |c| < 1$, und I bzw. J ein maximal vertikales bzw. horizontales Liniensegment entlang $x \equiv c$ bzw. $y \equiv c$ in $\partial Sp(\lambda, \mu)$. Dann ist der Schnitt von I bzw. J mit den Koordinatenachsen leer, und der Randpunkt von I bzw. von J mit kleinerer Ordinate bzw. Abszisse ist ein Element aus $\mathbb{L} \setminus \mathbf{L}$ bzw. $\mathbb{M} \setminus \mathbf{M}$.
- (ii) Sei f^+ bzw. f^- streng monoton über einem offenen Intervall \mathcal{I} . Dann ist $\text{graph}(f^+_{|\mathcal{I}})$ bzw. $\text{graph}(f^-_{|\mathcal{I}})$ in $\mathbb{L} \setminus \mathbf{L} \cap \mathbb{M} \setminus \mathbf{M}$.
- (iii) \mathbf{L} bzw. \mathbf{M} ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler offener, vertikaler bzw. horizontaler Liniensegmenten mit x bzw. $y \neq 0$.

Beweis. Siehe Aufg. 5.2.22, 5.2.25 und 5.2.28. ■

Nun können wir den ersten Schritt in Richtung Klassifikation tun:

2.8.24 SATZ. Sei $\mathcal{L} = (S, h)$ eine einfach zusammenhängende, zeitorientierte Lorentz-Fläche mit $\sigma \equiv 1$. Dann ist $\mathcal{L} \sim_{\infty} \mathbb{E}^{2,1}$.

Beweis. (vgl. auch S.87 ff in [We96], insbesondere Lemma 27) Sei $q \in \mathcal{L}$, $l = l_q$ und $m = m_q$. Wir betrachten $Sp(l, m) \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}$: Existierte ein offenes Intervall $\mathcal{I} \subset (0, 1)$, auf dem f^+ streng monoton fiel, so wäre für $x \in \mathcal{I}$ der Punkt $(x, f^+(x))$ aus $\mathbb{L} \setminus \mathbf{L}$ und $\mathbb{M} \setminus \mathbf{M}$ (2.8.23 (ii)). Für ein offenes horizontales Liniensegment I in $\{x > 0\} \cap Sp(l, m)$ mit rechtem Endpunkt $(x, f^+(x))$

wäre $\sigma(\nu^+) \geq 2$ (wobei $\nu = \chi^{-1}(I)$). Folglich ist f^+ lokal konstant über $(0, 1)$. Der Graph von f^+ kann aber in $x = 0$ keine Sprungstelle aufweisen (2.8.22 (iii)), noch in $x = x_0 \in (0, 1)$, denn dann wäre $q_0 = (x_0, f^+(x_0))$ aus $\mathbb{L} \setminus \mathbf{L}$ wegen $f^+(x_0) > 0$ und aus $\mathbb{M} \setminus \mathbf{M}$ aufgrund der lokalen Konstanz (vgl. 2.8.23 (i)). Daraus folgte wiederum die Existenz eines idealen Endpunktes der Charakteristik $\sigma([\nu^+]) \geq 2$ für $\nu = \chi^{-1}(I)$, wobei I ein horizontales Liniensegment in $\{x > 0, y > 0\} \cap Sp(l, m)$ mit rechtem Endpunkt q_0 ist. Also gilt $f^+(x) \equiv 1$ auf $[0, 1]$. Analoge Argumente für die übrigen Quadranten ergeben dann $Sp(l, m) = (-1, 1) \times (-1, 1)$. Also reicht es zu zeigen: $S = sp(l, m)$. Angenommen, es gäbe ein $\hat{q} \in S \setminus sp(l, m)$. Man kann beweisen, daß ein stückweise glatter Nullbogen Γ existiert, der aus den Nullbögen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ besteht und $\partial sp(l, m)$ genau einmal schneidet (siehe Aufg. 5.2.32). Sei γ_i dasjenige Teilstück, welches $\partial sp(l, m)$ in r schneidet. Sei γ_i o.B.d.A. ein X -Bogen. χ bildet γ_i auf ein horizontales Liniensegment ab, dessen dem Schnittpunkt r entsprechenden Endpunkt \tilde{r} in \mathbf{L} liegt. Der Schnittpunkt $r \in \gamma \cap \partial Sp(l, m)$ wäre dann aus einer Zusammenhangskomponente $\mathbf{J} \subset \mathbf{L}$. Man kann nun χ zu einem Homöomorphismus $|\chi|$ fortsetzen, dessen Definitionsbereich aus $sp(l, m)$ und allen idealen Punkten besteht, die durch X -Kurven aus $sp(l, m)$ induziert werden (siehe Aufg. 5.2.31). Wie bereits erwähnt, entspricht \mathbf{J} einer Teilmenge aus S , genauer gesagt ist \mathbf{J} das Bild einer Y -Kurve μ unter $|\chi|$ (vgl. Aufg. 5.2.33), die einen idealen Punkt $[\mu^-]$ induziert, der dem Randpunkt von \mathbf{J} mit kleinerer Ordinate entspricht. Dann gilt aber $\sigma([\mu^-]) \geq 2$ in Hinblick auf 2.8.23 (i) — Widerspruch. ■

Nach diesem Beweis scheint die Annahme natürlich, daß für eine Lorentz-Fläche eigentlich immer $\sigma \leq 2$ gelten sollte, sofern wir den idealen Rand lokal als Graphen einer (stetigen) Funktion beschreiben können. Dies ist natürlich nicht immer der Fall, wie wir bereits feststellen mußten. Wollen wir nun den in 2.8.18 eingeschlagenen Weg weiterverfolgen, müssen wir zuerst eine handbare Klasse von Lorentz-Flächen aussondern (z.B. reguläre Lorentz-Flächen), um ein allzu pathologisches Randverhalten auszuschließen. Dazu machen wir einmal mehr von unserer intuitiven Vorstellung des idealen Randes Gebrauch, wonach die idealen Endpunkte in der Umgebung von sagen wir z.B. $[l_q^+]$ durch die Punkte $[l_{q'}^+]$, wobei q und q' nicht entlang derselben X -Linie, aber doch "nahe" beieinander liegen sollten, beschrieben werden könnten. Um diese Vorstellung zu formalisieren, führen wir für ein rechtes (bzw. linkes) Nullende ν den Begriff der Projektion entlang ν oder einfach ν -Projektion ein: Wird ν von der Nullkurve μ geschnitten, so sei die Projektion entlang $\nu \uparrow_{\nu \cap \mu}$ (bzw. $\nu \downarrow_{\nu \cap \mu}$) durch $\varphi : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$, $\varphi(q) = [\nu_q^+]$ (bzw. $[\nu_q^-]$) gegeben. Dabei sei ν_q ein rechtes (bzw. linkes) Ende von ν desselben Typs. "Nahe" des idealen Randes wird man erwarten wollen, daß μ eine Umgebung von $[\nu^+]$ hinreichend gut approximiert. Einfache Beispiele überzeugen uns jedoch schnell davon, daß der ideale Rand sehr pathologische Züge annehmen kann — man denke nur an ω^∞ (dies motiviert im übrigen eine Reihe

von Begriffen (siehe [Ku85] 2.7 und [We96] S.76 ff.), die auch für Einbettungsfragen relevant sind). Stattdessen beschränken wir uns auf die Untersuchung einer besonders zugänglichen Familie von idealen Rändern, für die man ein Analogon zu 2.1.13 kennt. Dazu vereinbaren wir die

2.8.25 DEFINITION. Sei $\omega \in d\mathcal{L}$. Dann heißt $\omega = [\gamma^\infty]$ rektifizierbar entlang der Nulllinie γ , falls ein Nullende ν in γ mit $\nu^\infty = \gamma^\infty$ und eine zu γ transversale Nullkurve μ mit $\mu \cap \nu \neq \emptyset$ existiert, so daß die ν -Projektion $\varphi : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$ stetig ist. Ein idealer Endpunkt ω heißt rektifizierbar, wenn er mindestens für eine Nulllinie γ mit $\omega = [\gamma^\infty]$ rektifizierbar entlang γ ist. Wir nennen \mathcal{L} rektifizierbar, falls jeder Endpunkt in $d\mathcal{L}$ rektifizierbar ist.

Auch diese Definition ist mit unserer intuitiven Vorstellung vereinbar:

2.8.26 BEISPIELE.

- (i) Ist Γ eine C^1 -Jordankurve, so ist $d\mathcal{L}_{Int(\Gamma)}$ rektifizierbar (vgl. Aufg. 4.4.6 in [We96])
- (ii) ω^∞ ist nicht rektifizierbar; dies folgt direkt aus 2.8.16 und 2.8.31.

Man beachte, daß Rektifizierbarkeit entlang einer Nulllinie nicht Rektifizierbarkeit entlang einer zweiten Nulllinie impliziert und φ nicht für jedes μ stetig sein muß (siehe auch die Beispiele auf S.75 in [We96]). Es gilt aber der

2.8.27 SATZ. Ist $\omega = [l^+]$ rektifizierbar entlang l , dann existiert eine Y -Kurve μ entlang jeder Nulllinie m , die l schneidet, so daß die $l \uparrow$ -Projektion $\varphi : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$ stetig für das rechte Nullende $l \uparrow_{l \cap \mu}$ ist. Analoge Aussagen gelten für $\omega = [l^-]$, $[m^+]$ oder $[m^-]$ (im folgenden betrachten wir lediglich den Fall $[l^+]$, aber die Übertragbarkeit auf die restlichen Fälle sei stets stillschweigend vorausgesetzt).

Beweis. Siehe Aufg. 4.4.9. ■

2.8.28 SATZ. Sei \mathcal{L} eine rektifizierbare Lorentz-Fläche der Charakteristik 2. Dann gilt:

- (i) Ist $\omega \in d\mathcal{L}$ rektifizierbar entlang einer Nulllinie, so ist ω auch rektifizierbar entlang der Nulllinie entgegengesetzten Typs.
- (ii) Sei $[l^+]$ vom Typ $\{m^-, l^+\}$ für eine X -Linie l und eine Y -Linie m , die sich schneiden. Dann gilt für jeden parametrisierten Spann $Sp(l, m)$, daß f^+ und f^- stetig sind. Weiterhin gilt: f^+ ist streng monoton steigend auf $[-1, 0]$ und identisch 1 auf $[0, 1]$. f^- ist streng monoton steigend auf $[0, 1]$ und identisch 1 auf $[-1, 0]$.

Beweis. Siehe Aufg. 4.4.10 und Aufg. 5.5.5. ■

Wir wenden uns nun der Behandlung von Lorentz-Flächen mit idealen Punkten der Charakteristik ungleich 1 zu. Das Problem bei der Betrachtung von Spannkarten besteht in der Existenz vertikaler Liniensegmente in $\partial Sp(l, m)$. Diese Punkte entsprechen X -Linien aus $sp(m)$, die ihrerseits wieder ideale Punkte induzieren, aber in dem zu klein geratenen Definitionsbereich $sp(l, m)$ unserer Spannkarte nicht eingefangen werden. Man müßte, ausgehend von der ersten Spannkarte $\chi : sp(l, m) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ aus \mathfrak{A}_h^{0+} , diese Karte über die vertikalen Liniensegmente von $\partial Sp(l, m)$ hinaus fortsetzen. Dieser Ansatz wird im Abschnitt 5.3 aus [We96] zur Konstruktion einer "speziellen" Spannkarte $\chi_\square : sp(\mu) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ aus \mathcal{H}^+ benutzt, für die wir im folgenden dieses Symbol reservieren. Das Bild von $sp(\mu)$ unter χ_\square schreiben wir $Sp_\square(l, \mu)$, um anzumerken, daß χ_\square ausgehend von $\chi : sp(l, \mu) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ konstruiert wurde und insbesondere l enthält (vgl. auch die Schreibweise aus Theorem 5 und S.103 unten aus [We96]). Mit Hilfe dieser Karten können wir nun Rektifizierbarkeit als lokale Darstellbarkeit des idealen Randes als Graphen einer stetigen Funktion interpretieren:

2.8.29 SATZ. *Der Punkt $\omega = [l^+] \in d\mathcal{L}$ ist genau dann rektifizierbar, wenn eine Y -Kurve μ existiert, die l in p schneidet, und die zugehörige spezielle Spannkarte $\chi_\square : sp(\mu) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ aus \mathcal{H}^+ , die $sp^+(\mu) = sp(\mu) \cap \mathcal{U}_m^+$ (wobei m die Y -Linie ist, die μ enthält) auf ein Gebiet in $\mathbb{E}^{2,1}$ abbildet, welches durch $x \equiv 0, y \equiv 1, y \equiv -1$ und dem Graph einer stetigen Funktion $x = G^+(y)$ beschränkt wird und die $l \uparrow_p$ auf $\{y \equiv 0 \mid 0 < x < 1\}$ abbildet. Dabei entspricht der $l \uparrow_p$ -Projektion $\varphi : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$ die Abbildung $\Phi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}, y \mapsto (y, G^+(y))$.*

Beweis. Siehe Abschnitt 5.4 aus [We96], insbesondere Theorem 6 und 6" sowie Aufg. 5.4.12. ■

Als Korollar erhalten wir:

2.8.30 KOROLLAR. *Ist die $l \uparrow_{l \cap \mu}$ -Projektion stetig, so ist $\varphi(\mu)$ offen in $d\mathcal{L}$, und φ ist ein Homöomorphismus auf sein Bild.*

2.8.31 SATZ ("Regularitätssatz" Kulkarni '85, vgl. Satz 2.9 aus [Ku85]). *Ist $d\mathcal{L}$ rektifizierbar, dann ist \mathcal{L} regulär.*

Beweis. Nach Satz 2.8.14 ist $d\mathcal{L}$ stets Hausdorffsch und parakompakt. Wegen 2.8.30 existiert für jeden idealen Punkt $[\nu^\infty] \in d\mathcal{L}$ eine ν -Projektion $\varphi : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$, die einen Homöomorphismus zwischen μ und der in $d\mathcal{L}$ offenen Menge $\varphi(\mu)$ induziert. Ist β eine Parametrisierung von μ , so ist $\beta^{-1} \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Karte, d.h. $d\mathcal{L}$ ist lokal homöomorph zu \mathbb{R} .

2.8.32 BEMERKUNG. Es ist anzumerken, daß die Umkehrung nicht gilt: Die Lorentz-Fläche $((-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \{y \equiv 0 \mid 0 \leq x < 1\}, [dx dy])$ ist regulär, aber nicht rektifizierbar (siehe Aufg. 4.4.5 in [We96]). Die rektifizierbaren Lorentz-Flächen bilden also eine echte Unterfamilie der regulären Lorentz-Flächen.

Es gilt nun das folgende Analogon zu 2.1.13:

2.8.33 SATZ (“Abbildungssatz” Kulkarni ’85). Sei $\mathcal{L} = (S, h)$ eine rektifizierbare, einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche. Dann gilt:

(i) Sind alle idealen Endpunkte charakteristisch (d.h. ihre Charakteristik ist ungleich 2), so gilt $\mathcal{L} \sim_{\infty} \mathbb{E}^{2,1}$.

(ii) Ist \mathcal{L} eine Lorentz-Fläche der Charakteristik 2, so gilt $\mathcal{L} \sim_0 \mathbb{D}^{2,1}$ oder $\mathcal{L} \sim_0 -\mathbb{D}^{2,1}$.

Beweis. (i) Sei $\omega_0 \in d\mathcal{L}$. Aufgrund der Rektifizierbarkeit von \mathcal{L} ist insbesondere ω_0 rektifizierbar entlang einer Nulllinie γ mit $[\gamma^{\infty}] = \omega_0$. Wir nehmen oB.d.A. $\omega_0 = [l^+]$ an. Dann existiert eine Y -Kurve μ , die l in p schneidet. Die \mathcal{H}^+ -Karte $\chi_{\square} : sp(\mu) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ bildet $sp^+(l, \mu)$ auf ein Gebiet in $\mathbb{E}^{2,1}$ ab, welches durch $x \equiv 0$, $y \equiv 1$, $y \equiv -1$ und dem Graph einer stetigen Funktion $x = G(y)$ beschränkt wird. Dabei wird $l \uparrow_p$ auf $\{y \equiv 0 \mid 0 < x < 1\}$ abgebildet. Identifizieren wir nun jedes $q \in \mu$ mit $\chi_{\square}(q) = (0, y_q)$ und $\varphi(q)$ mit $(G(y_q), y_q)$, dann existiert, falls G nicht monoton über $\mathcal{I} = (-1, 1)$ ist, ein offenes Unterintervall \mathcal{J} , über welchem G streng monoton steigend ist. Für ein $y_q \in \mathcal{J}$ wäre aber dann $\sigma(G(y_q), y_q) = 2$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Also muß G konstant und daher $\sigma \equiv 1$ sein, woraus die Behauptung aus Satz 2.8.24 folgt.

(ii) Beweisskizze. (für einen detaillierten Beweis siehe [We96], S.112 ff.) Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten:

(a) Wir wissen bereits (vgl. 2.8.11), daß für Flächen der Charakteristik 2 der ideale Rand $d\mathcal{L}$ in vier disjunkte Teilmengen zerfällt. Der erste Schritt besteht darin zu zeigen, daß $d\mathcal{L}$ aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, deren Punkte von genau einem Typ sind, und daß somit nur zwei Typen idealer Punkte auftreten können. Sei $q_0 \in S$ fixiert, $l_0 = l_{q_0}$ und $m_0 = m_{q_0}$. Dann existiert gemäß 2.8.27 eine Y -Kurve μ durch q_0 , so daß die Projektionsabbildungen $\varphi^+ : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$ entlang $l_0 \uparrow_{q_0}$ und $\varphi^- : \mu \rightarrow d\mathcal{L}$ entlang $l_0 \downarrow_{q_0}$ jeweils stetig sind. Wir betrachten wieder eine Spannkarte $\chi_{\square} : sp(\mu) \rightarrow Sp_{\square}(l, \mu)$; der Schnitt $\partial_{\square}^{\pm} := dSp_{\square}(l, \mu) \cap \{x > 0\} \cup \{|y| < 1\}$ wird von dem Graphen einer stetigen Funktion $x = G^+(y)$ über $(-1, 1)$ gegeben. Wegen $\sigma \equiv 2$ ist G^+ streng monoton auf $(-1, 1)$; angenommen, er ist streng monoton steigend, so daß l_0^+ vom Typ $\{m^-, l^+\}$ ist (*). Dann

ist jeder Punkt aus $\varphi^+(\mu)$ von diesem Typ, und die Menge der Punkte aus $d\mathcal{L}$ diesen Typs ist offen (vgl. 2.8.30). Genauso argumentiert man, um zu zeigen, daß die Mengen der Punkte der übrigen Typen $\{l^+, m^+\}$, $\{m^+, l^-\}$, $\{l^-, m^-\}$ ebenfalls offen sind. Weil $d\mathcal{L}$ die disjunkte Vereinigung dieser vier Mengen ist, muß jede Zusammenhangskomponente in einer Typmenge enthalten sein. Daher ist jeder Punkt aus der Zusammenhangskomponente von $d_R\mathcal{L}$, die $[l_0^+]$ enthält, von eben diesem Typ. Um die weiteren auftretenden Zusammenhangskomponenten zu bestimmen, betrachten wir nun die idealen Endpunkte, die wir entlang der Y -Linien erreichen können. Die Menge der Punkte q auf l_0 , für welche $[m_q]$ einen fixierten Typ hat, ist offen aufgrund der Rektifizierbarkeit von $[m_q^-]$ entlang von m_q (vgl. 2.8.30), d.h. l_0 zerfällt wieder in Zusammenhangskomponenten verschiedener Typen. Da aber l_0 zusammenhängend ist, kann es nur eine Komponente geben, d.h. alle $[m_q^-]$ für $q \in l_0$ haben einen fixierten Typ. Wählt man nun $q \in l_0 \uparrow_{q_0}$ "nahe" des idealen Randes (d.h. $\chi_\square(q)$ ist aus einer geeigneten Umgebung von $\partial_\square^+ \cap \{y \equiv 0\}$), muß $[m_q^-]$ vom Typ $\{m^-, l^+\}$ sein. Also ist $[m_q^-] \in d\mathcal{L}$ vom Typ $\{m^-, l^+\}$ für alle $q \in l_0$. Wäre nun $[l_0^-]$ vom Typ $\{l^-, m^-\}$, so auch $[m_q^-]$ für alle $q \in l_0 \downarrow_{q_0}$ nahe des idealen Randes — Widerspruch. Also bleibt nur noch übrig: $[l_0^-]$ ist vom Typ $\{m^+, l^-\}$, genau wie jeder Punkt aus der Zusammenhangskomponente $d_L\mathcal{L}$, die $[l_0^-]$ enthält. Mit analogen Argumenten beweist man, daß für jede X -Linie l der ideale Punkt $[l^+]$ genau dann vom Typ $\{m^-, l^+\}$ ist, wenn $[l^-]$ vom Typ $\{m^+, l^-\}$ ist, und genauso, daß für jede Y -Linie m der ideale Punkt $[m^+]$ genau dann vom Typ $\{m^+, l^-\}$ ist, wenn $[m^-]$ vom Typ $\{m^-, l^+\}$ ist. Sei nun m_{-1} die eindeutig bestimmte Y -Linie mit $[m_{-1}^+] = [l_0^-]$, so daß $[m_{-1}^-]$ vom Typ $\{m^-, l^+\}$ ist. Dann liegt $[m_{-1}^-]$ in $d_R\mathcal{L}$, weil eine Umgebung von $[m_{-1}^-]$ in $d\mathcal{L}$ existiert, die Punkte $[m_q^-]$ für beliebig nahe am idealen Rand liegende $q \in l_0 \downarrow_{q_0}$ enthält. Man zeigt leicht, daß $[m_q^+]$ in $d_L\mathcal{L}$ für alle $q \in l_0$ liegt, also ist auch $[m_{-1}^+]$ aus $d_L\mathcal{L}$. Es existieren schließlich genau zwei Zusammenhangskomponenten $d_R\mathcal{L}$ und $d_L\mathcal{L}$ von $d\mathcal{L}$.

(b) Wir betrachten den durch die Karte $\tilde{\chi}_0 : sp(l_0, m_0) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ parametrisierten Spann $Sp(l_0, m_0)$. Der zweite Schritt besteht nun darin, diesen Spann zu "rektifizieren". Nach 2.8.28 wird $Sp(l_0, m_0)$ durch den Graphen der zwei über $[-1, 1]$ stetigen Funktionen f^+ und f^- begrenzt. Dabei ist f^+ streng monoton steigend über $[-1, 0]$ und identisch 1 über $[0, 1]$ und f^- identisch 1 über $[-1, 0]$ und streng monoton steigend über $[0, 1]$. Die Rektifizierungsabbildung ("flattening map" in [We96]) die durch

$$F_0(x, y) := \begin{cases} (x, y), & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \text{ und } -1 \leq y \leq 0 \\ (x, (f^+)^{-1}(y) + 1), & \text{falls } -1 \leq x \leq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 \\ (f^-(x) + 1, y), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } -1 \leq y \leq 0 \\ (f^-(x) + 1, (f^+)^{-1}(y) + 1), & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

definiert wird, ist ein konformer Homöomorphismus, der zusätzlich die natürliche Orientierungen der Nulllinien erhält und die Graphen von f^+ bzw. f^- über $[-1, 0]$ bzw. $[0, 1]$ auf die Funktionen $y = x + 1$

bzw. $y = x - 1$ staucht. Wir erhalten die \mathcal{H}^+ Karte $\chi_0 = F_0 \circ \tilde{\chi}_0 : sp(l_0, m_0) \rightarrow \Omega_0 \subset \mathbb{E}^{2,1}$.

(c) Da $[m_0^+]$ vom Typ $\{m^+, l^-\}$ ist, existiert genau eine X -Linie l_1 mit $[l_1^-] = [m_0^+]$. Sei dann m_1 die einzige Y -Linie mit $[m_1^-] = [l_0^+]$. Der dritte Schritt besteht darin, zu zeigen, daß m_1 und l_1 einen Schnittpunkt haben, und man eine \mathcal{H}^+ -Karte $\chi_1 : sp(l_1, m_1) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$ konstruieren kann, deren Restriktion auf $\mathcal{U}_{l_1}^- \cap \mathcal{U}_{m_1}^-$ mit $\chi_0|_{\mathcal{U}_{l_0}^+ \cap \mathcal{U}_{m_0}^+}$ übereinstimmt und deren Bild Ω_1 die Translation von Ω_0 um $(1, 1)$ ist. Genauso definiert man eine Karte $\chi_{-1} : sp(l_{-1}, m_{-1}) \rightarrow \mathbb{E}^{2,1}$, wobei l_{-1} die eindeutig bestimmte X -Linie mit $[l_{-1}^+] = [m_0^-]$ ist, deren Restriktion auf $\mathcal{U}_{l_{-1}}^+ \cap \mathcal{U}_{m_{-1}}^+$ mit $\chi_0|_{\mathcal{U}_{l_0}^- \cap \mathcal{U}_{m_0}^-}$ zusammenfällt. Man findet so \mathcal{H}^+ -Karten $\chi_n : sp(l_n, m_n)$, $n \in \mathbb{Z}$, die man induktiv zu einer Gesamt-Karte $\chi \in \mathcal{H}^+$ von \mathcal{L} zusammensetzen kann, dessen Definitionsbereich eine Lorentz-Fläche $\tilde{\mathcal{L}}$ definiert.

(e) Es bleibt noch zu zeigen: $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}}$. Aus Aufg. 5.5.9 folgt nun, daß jeder von q_0 ausgehende stückweise glatte Nullbogen Γ in einer endlichen Vereinigung der Spänne $sp(l_n, m_n)$ liegen muß. Da wir jeden Punkt $q \in \mathcal{L}$ mit q_0 entlang eines solchen Bogens verbinden können, folgt $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Somit ist $\mathcal{L} \sim_0 \mathbb{D}^{2,1}$. Gilt statt (*), daß G streng monoton fällt, so ergibt die gleiche Argumentation $\mathcal{L} \sim_0 -\mathbb{D}^{2,1}$. ■

2.8.34 BEMERKUNGEN. (i) Die Rektifizierbarkeit in (i) ist notwendig, siehe das Gegenbeispiel in Figur 29 in [We96]. Für (ii), siehe Aufg. 5.5.7.

(ii) In 2.1 aus [Ku85] wird behauptet, daß alle konstruierten konformen Homöomorphismen zu konformen Äquivalenzen geglättet werden können; insbesondere gälte für Flächen der Charakteristik 2 stets $\mathcal{L} \sim_\infty \pm \mathbb{D}^{2,1}$. In [We96] wird folgendes Gegebenbeispiel gegeben: Sei $\mathcal{L} = (S, [dx dy])$, wobei S das Gebiet ist, welches durch die Gerade $y = x$ und dem Graphen $x = G(y)$ eingegrenzt wird, wobei

$$G(y) := \begin{cases} 2y + 1, & y \geq 0 \\ y + 1, & y \leq 0 \end{cases}.$$

Mit Hilfe des Breaking-Lemmas aus 2.7.10 folgt dann $\mathcal{L} \approx_1 \mathbb{D}^{2,1}$ (siehe Aufg. 5.5.8). Der durch das Zusammensetzen der einzelnen Spannkarten bedingte Verlust der Glattheit ist also nicht beweistechnisch bedingt.

(iii) Für eine Diskussion von Einbettungsfragen und die durch den idealen Rand bedingten Obstruktionen, siehe S.116 f. in [We96].

(iv) Obwohl der ideale Rand für einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen definiert wurde, sind viele Überlegungen auch auf nicht einfach zusammenhängende Lorentz-Flächen übertragbar, deren Nulllinien Einbettungen ihres Definitionsbereiches sind. Dies erweist sich z.B. dann als nützlich, falls je eine X -Linie eine Y -Linie im Unendlichen schneidet, so daß wir eine natürliche Bijektion zwischen X - und Y -Linien erhalten. So betrachten Kostant und Sternberg den einschaligen Hyperboloid H (betrachtet als $SL(2, \mathbb{R})$ -Bahn in der (ko)adjungierten Darstellung) mit der Lorentz-Metrik

g_0 , die sich durch Restriktion der Killing-Form ergibt. Dann benutzten sie die oben angeführten Überlegungen, um zu folgern, daß jede konforme Äquivalenz bereits durch die Abbildung der X -Linien bestimmt ist, und können $(H, [g_0])$, die konforme Klasse von (H, g_0) mit $\text{Diff}(S^1)$, der Gruppe der Diffeomorphismen von S^1 , identifizieren (siehe [KnSt88]).

Der ideale Rand sollte — nicht nur in Hinblick auf 2.8.34 (ii) — ohnehin mehr als topologisches Objekt betrachtet werden. Seine Konstruktion basierte ja nur indirekt auf der konformen Klasse $[h]$, nämlich auf die von ihr induzierten Nulllinien; deren Verlauf oder "Form" ist aber eher als "stetig" konforme Invariante anzusehen (vgl. 2.6.40 und die Bemerkung vor 2.7.18). Dies führt uns wiederum zu der eingangs aufgeworfenen Frage, in welchem Maße der ideale Rand konforme Information kodiert. Diese Frage können wir als (stetiges) Dirichlet-Problem auffassen: Wann läßt sich ein Homöomorphismus f zwischen $d\mathcal{L}$ und $d\tilde{\mathcal{L}}$ zu einem konformen Homöomorphismus F der Lorentz-Flächen \mathcal{L} und $\tilde{\mathcal{L}}$ fortsetzen? Denken wir von einer durch einen C^1 -Jordanbogen definierte Minkowski-Fläche als eine in einen Rahmen eingespannte Membran, so müßten wir f über die in zwei idealen Endpunkte eingespannte Nulllinie hinaus fortsetzen. In [Sm96] führte Smyth daher auf dem idealen Rand zwei weitere stetig konforme Invarianten ein (vgl. diesbezüglich Aufg. 4.4.31). Zuerst definiert er die Oppositions-Relation \leftrightarrow_X bzw. \leftrightarrow_Y : Zwei Punkte ω_0 und ω_1 aus $d\mathcal{L}$ stehen genau dann in X - bzw. Y -Opposition, falls eine X - bzw. Y -Linie existiert, die ω_0 und ω_1 als ideale Punkte induziert. Eine Abbildung $f : d\mathcal{L} \rightarrow d\tilde{\mathcal{L}}$ erhält die Opposition, wenn aus $\omega_0 \leftrightarrow_X \omega_1$ bzw. $\omega_0 \leftrightarrow_Y \omega_1$ stets $f(\omega_0) \leftrightarrow_X f(\omega_1)$ bzw. $f(\omega_0) \leftrightarrow_Y f(\omega_1)$ folgt. Die zweite Invariante, die sogenannte zyklische Ordnung, besteht darin, drei Punkten $p, q, r \in d\mathcal{L}$ eine Kette der Form $p \hookrightarrow r \hookrightarrow q \hookrightarrow p$ oder $p \hookrightarrow q \hookrightarrow r \hookrightarrow p$ zuzuweisen (siehe [We96], S.80 ff. für eine exakte Definition). Dies verallgemeinert die zyklische Ordnung dreier Randpunkte einer durch das Innere eines C^1 -Jordanbogens gegebenen Minkowski-Fläche, die durch die Benennung entgegen den Uhrzeiger-Sinn sich ergibt (vgl. Aufg. 4.4.26). Offensichtlich darf ein Homöomorphismus zwischen den Rändern die "Reihenfolge" der idealen Punkte nicht permutieren, ohne bei Fortsetzung auf die Lorentz-Fläche ein Zerreißen der Membran, um obiges Beispiel wieder aufzunehmen, nachsichzuziehen. Während jeder konforme Homöomorphismus auf den Rändern Homöomorphismen ∂F bzw. ∂F^{-1} induziert (vgl. 2.8.17), die Opposition und zyklische Ordnung erhalten (siehe Aufg. 4.4.31), gilt umgekehrt der

2.8.35 SATZ. *Smyth '96 Sei $f : d\mathcal{L} \rightarrow d\tilde{\mathcal{L}}$ ein Homöomorphismus, der Opposition und zyklische Ordnung erhält. Außerdem erhalte auch f^{-1} die Opposition. Dann kann f zu einem eindeutig bestimmten konformen Homöomorphismus $F : \mathcal{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ mit $\partial F = f$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Wir begnügen uns lediglich mit der Konstruktion von F ; für einen vollständigen Beweis

siehe [Sm96]. Sei $p \in \mathcal{L}$, und sei \tilde{l} die Nulllinie aus $\tilde{\mathcal{L}}$, welche die idealen Endpunkte $f([l_p^+])$ und $f([l_p^-])$ induziert. Genauso sei \tilde{m} die Nulllinie aus $\tilde{\mathcal{L}}$, welche die idealen Endpunkte $f([m_p^+])$ und $f([m_p^-])$ induziert. Dann definieren wir $F(p) = q$, wobei q der Schnittpunkt von \tilde{l} und \tilde{m} ist. ■

2.8.36 BEMERKUNGEN. (i) Auch wenn f Opposition und zyklische Ordnung erhält, braucht f^{-1} nicht die Opposition zu erhalten (vgl. Aufg. 4.4.32)

(ii) Es ist unnötig, f als Homöomorphismus vorrauszusetzen; dies folgt bereits aus der Erhaltung der zyklischen Ordnung (vgl. Aufg. 4.4.29).

3 Spinorielle Feldgleichungen auf Lorentz-Flächen

3.1 Spin-Strukturen

Wir geben eine kurze Einführung in die spingeometrischen Fakten, die wir später benutzen werden. Allgemeine Referenzen sind [Ba81] und [LwMi89].

3.1.1 Clifford-Algebren

3.1.1 DEFINITION. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und $f : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Ein Paar (\mathcal{C}, γ) , bestehend aus einer Algebra \mathcal{C} und einer linearen Abbildung $\gamma : V \rightarrow \mathcal{C}$, heißt Clifford-Algebra, wenn

- (i) \mathcal{C} eine assoziative Algebra mit $\mathbf{1}$ ist,
- (ii) $\gamma(x) \cdot \gamma(x) = -f(x, x)\mathbf{1}$ für alle $x \in V$ gilt und
- (iii) (sog. universelle Eigenschaft) falls (\mathcal{A}, α) ein weiteres Paar ist, welches die Voraussetzungen (i) und (ii) erfüllt, so existiert genau ein Algebrenhomomorphismus $\hat{\alpha} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ derart, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C} \\ & \searrow \alpha \quad \circlearrowleft \quad \hat{\alpha} & \swarrow \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

Die dadurch bis auf Isomorphie bestimmte Algebra schreiben wir, falls sie existiert, auch $\text{Cliff}(V, f)$.

3.1.2 SATZ.

- (i) Zu jedem Paar (V, f) existiert eine Clifford-Algebra.
- (ii) $\text{Cliff}(V, f)$ ist eine assoziative Algebra mit $\mathbf{1}$, die von den Elementen aus V unter der Relation

$$x \cdot y + y \cdot x = -2f(x, y)\mathbf{1}$$

erzeugt wird.

- (iii) Als Vektorraum ist $\text{Cliff}(V, f)$ kanonisch isomorph zu $\bigwedge^* V$, wobei wir $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$ mit $\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) \gamma(v_{\sigma(1)}) \cdot \dots \cdot \gamma(v_{\sigma(r)})$ identifizieren.

Beweis. Siehe [LwMi89], S.8 ff., insbesondere Satz 1.1 und 1.3. ■

3.1.3 SATZ. Sei $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $f^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ die komplex lineare Fortsetzung von f . Dann gilt $\text{Cliff}(V, f)^{\mathbb{C}} \cong \text{Cliff}(V^{\mathbb{C}}, f^{\mathbb{C}})$.

Beweis. Dies folgt aus der universellen Eigenschaft. ■

3.1.4 DEFINITION. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q}$ das pseudoeuklidische Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^{p,q}$, d.h. bezüglich der Standardbasis $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$ ist $\langle e_i, e_j \rangle_{p,q} = \epsilon_i \delta_{ij}$ mit $\epsilon_i = -1$ für $i \leq p$ und $= 1$ für $i > p$. (diese Bezeichnung behalten wir im gesamten Kapitel bei). Dann definieren wir $Cl_{p,q} := (\mathbb{R}^{p,q}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{p,q})$ und $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}} := Cl_{p,q} \otimes \mathbb{C}$.

3.1.5 SATZ. $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}}$ ist zu den folgenden Algebren isomorph:

$$\begin{aligned} Cl_{p,q}^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}(2^m), \text{ falls } p+q = 2m \\ Cl_{p,q}^{\mathbb{C}} &\cong \mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m), \text{ falls } p+q = 2m+1. \end{aligned}$$

Dabei kann ein expliziter Isomorphismus wie folgt konstruiert werden: Sei $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $W := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $V := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Sei $\tau(j) := \begin{cases} i, & j \leq k \\ 1, & j > k \end{cases}$ und bezeichne \otimes das Kroneckerprodukt von Matrizen. Seien (e_1, \dots, e_{p+q}) die aus der Standardbasis des $\mathbb{R}^{p,q}$ durch Komplexifizierung erhaltenen multiplikativen Generatoren von $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}}$. Dann ist durch komplex-lineare Fortsetzung von

$$\begin{aligned} \Phi_{2m,p}(e_{2j-1}) &= \tau(2j-1) W \otimes \dots \otimes W \otimes U \otimes E \dots \otimes E \\ &\quad \uparrow \\ &\quad j\text{-te Stelle} \\ \Phi_{2m,p}(e_{2j}) &= \tau(2j) W \otimes \dots \otimes W \otimes V \otimes E \dots \otimes E \\ &\quad \downarrow \end{aligned}$$

$(j = 1, \dots, m)$ ein Algebrenisomorphismus zwischen $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{C}(2^m)$ gegeben. Falls $p+q = 2m+1$, so definiert

$$\begin{aligned} \Phi_{2m+1,p}(e_j) &= (\Phi_{2m,p}(e_j), \Phi_{2m,p}(e_j)), \text{ für } 1 \leq j \leq 2m \\ \Phi_{2m+1,p}(e_{2m+1}) &= (iW \otimes \dots \otimes W, -iW \otimes \dots \otimes W) \end{aligned}$$

einen Algebrenisomorphismus zwischen $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{C}(2^m) \oplus \mathbb{C}(2^m)$.

Beweis. Siehe [Ba81], Satz 1.3. ■

3.1.6 KOROLLAR. $Cl_{1,1}^{\mathbb{C}} \cong \text{Cliff}(\mathbb{R}_{1,1}^{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{C}})$ ist isomorph zu $\mathbb{C}(2)$. Ein Isomorphismus ist durch lineare und multiplikative Fortsetzung der Zuordnung $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

3.1.7 DEFINITION. Der Raum $\Delta_{pq} := \mathbb{C}^{\lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor}$ heißt Spinormodul; seine Elemente werden (Dirac-) Spinoren genannt. In diesen Bezeichnungen besagt Satz 3.1.5, daß $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}} \cong \text{End}(\Delta_{pq})$ für $p+q = 2m$ und $Cl_{p,q}^{\mathbb{C}} \cong \text{End}(\Delta_{pq}) \oplus \text{End}(\Delta_{pq})$ für $p+q = 2m+1$.

3.1.8 BEMERKUNG UND DEFINITION. Insbesondere wirkt \mathbb{R}^n auf Δ_{pq} durch Identifikation von \mathbb{R}^n mit seinem Bild unter $\Phi_{p,q}$ in $\text{end}(\Delta_{pq})$: Die so definierte Abbildung $\mu : \mathbb{R}^n \times \Delta_{pq} \rightarrow \Delta_{pq}$, $\mu(x, v) := \Phi_{p,q}(x)v$ heißt *Clifford-Multiplikation*. Für $\mu(x, v)$ schreiben wir auch kurz $x \cdot v$.

3.1.2 Die Pin- und Spin-Gruppe und ihre Lie-Algebren

3.1.9 DEFINITION. Sei $\epsilon_{p,q} := (\epsilon_i \delta_{ij})_{ij}$. Die pseudoorthogonale Gruppe sei durch $O(p, q) := \{A \in \text{Gl}(n, \mathbb{R}^n) \mid A^{\text{tr}} \epsilon_{p,q} A = \epsilon_{p,q}\}$, und die spezielle pseudoorthogonale Gruppe durch $SO(p, q) := \{A \in O(p, q) \mid \det(A) > 0\}$ definiert.

3.1.10 BEMERKUNGEN.

(i) Für $0 < p < n$ ist $O(p, q)$ nicht mehr kompakt: Man betrachte z.B. die nicht kompakte Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & \sinh(t) \\ 0 & Id_{n-2} & 0 \\ \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Die Gruppen $K := O(p) \times O(q)$ bzw. $K_0 := SO(p) \times SO(q)$ sind in $O(p, q)$ bzw. $SO(p, q)$ maximal kompakt.

Sei $\xi^p := \text{span}\{e_1, \dots, e_p\}$ und $\eta^q := \text{span}\{e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$. Dann sind ξ^p und η^q maximal zeitartige bzw. maximal raumartige Unterräume von $\mathbb{R}^{p,q}$ mit $\xi^p \oplus \eta^q = \mathbb{R}^{p,q}$. Somit kann jeder Endomorphismus $A : \xi^p \oplus \eta^q \rightarrow \xi^p \oplus \eta^q \in O(p, q)$ in der Form $A = \begin{pmatrix} A_t & A_1 \\ A_2 & A_s \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

3.1.11 DEFINITION. Ein Endomorphismus $A \in O(p, q)$ heißt zeitartig orientierungserhaltend, falls $\det(A_t) > 0$ und raumartig orientierungserhaltend, falls $\det(A_s) > 0$ ist.

3.1.12 BEMERKUNG UND DEFINITION.

(i) Definition 3.1.11 ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung.

(ii) Die pseudoriemannsche orthogonale Gruppe besteht aus vier Zusammenhangskomponenten:

$$O_{++}(p, q) := \{A \in O(p, q) \mid \det(A_t) > 0 \text{ und } \det(A_s) > 0\}$$

$$O_{+-}(p, q) := \{A \in O(p, q) \mid \det(A_t) > 0 \text{ und } \det(A_s) < 0\}$$

$$O_{-+}(p, q) := \{A \in O(p, q) \mid \det(A_t) < 0 \text{ und } \det(A_s) > 0\}$$

$$O_{--}(p, q) := \{A \in O(p, q) \mid \det(A_t) < 0 \text{ und } \det(A_s) < 0\}.$$

Insbesondere ist dann $SO(p, q) = O_{++}(p, q) \cup O_{--}(p, q)$, d.h. $SO(p, q)$ ist im echt pseudoeuklidischen Fall ($0 < p < n$) nicht mehr zusammenhängend. Wir definieren $SO_+(p, q) := O_{++}(p, q)$, die Gruppe der zeit- und raumartig orientierungserhaltenden Isometrien, $O_t(p, q) = O_{++}(p, q) \cup O_{+-}(p, q)$, die Gruppe der zeitartig orientierungserhaltenden Isometrien und $O_s(p, q) = O_{++}(p, q) \cup O_{-+}(p, q)$, die Gruppe der raumartig orientierungserhaltenden Isometrien.

3.1.13 DEFINITION. Sei

$$H_{pq} := \{x \in \mathbb{R}^{p,q} \mid \langle x, x \rangle_{p,q} = -1\}$$

und

$$S_{pq} := \{x \in \mathbb{R}^{p,q} \mid \langle x, x \rangle_{p,q} = 1\}.$$

Wir definieren die Pin-Gruppe durch

$$Pin(p, q) := \{x_1 \cdot \dots \cdot x_l \mid x_i \in H_{pq} \cup S_{pq}, l \in \mathbb{N}\}$$

und die Spin-Gruppe durch

$$Spin(p, q) := \{x_1 \cdot \dots \cdot x_{2l} \mid x_i \in H_{pq} \cup S_{pq}, l \in \mathbb{N}\}.$$

3.1.14 BEMERKUNGEN.

(i) $Pin(p, q)$ und $Spin(p, q)$ sind Gruppen bezüglich der durch die Clifford-Multiplikation induzierten Verknüpfung. Für $x \in H_{pq} \cup S_{pq}$ ist x^{-1} durch $-\frac{1}{\langle x, x \rangle_{p,q}}x$ gegeben.

(ii) Für $x = x_1 \cdot \dots \cdot x_l \in Pin(p, q)$ definieren wir

$$\deg(x) := l \bmod 2, \text{ und}$$

$$s(x) := k \bmod 2, \text{ wobei } k = \text{Anzahl der Elemente } x_i \in S_p^{n-1}.$$

Dann kann man für $0 < p < n$ die Gruppe $Pin(p, q)$ in folgende disjunkte Teilmengen zerlegen:

$$\begin{aligned} Pin_{++}(p, q) &:= \{x \in Pin(p, q) \mid \deg(u) = 0 \text{ und } s(u) = 0\} \\ Pin_{-+}(p, q) &:= \{x \in Pin(p, q) \mid \deg(u) = 1 \text{ und } s(u) = 0\} \\ Pin_{+-}(p, q) &:= \{x \in Pin(p, q) \mid \deg(u) = 0 \text{ und } s(u) = 1\} \\ Pin_{--}(p, q) &:= \{x \in Pin(p, q) \mid \deg(u) = 1 \text{ und } s(u) = 1\} \end{aligned}$$

Für $n \geq 3$ oder $n = 2, p = 0, 2$ sind dies die Zusammenhangskomponenten von $Pin(p, q)$ (vgl. Satz 1.5 in [Ba81]). Wir setzen $Spin_+(p, q) := Pin_{++}(p, q)$.

3.1.15 SATZ. Sei $x \in S_{pq} \cup H_{pq}$. Sei $\lambda : Pin(p, q) \rightarrow O(p, q)$ definiert durch $\lambda(x) : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$, $y \mapsto -x \cdot y \cdot x^{-1}$. Dann ist λ eine zweifache Gruppenüberlagerung mit $\ker(\lambda) = \{\pm 1\}$.

Beweis. Siehe [Ba81] S.53 ff., speziell Satz 1.4. ■

3.1.16 BEMERKUNGEN.

- (i) Somit folgt, daß $Pin(p, q)$, $Spin(p, q)$ und $Spin_+(p, q)$ Liesche Gruppen sind.
- (ii) Es gilt $\lambda(Pin_{ab}(p, q)) = O_{ab}(p, q)$. Weil $O_{ab}(1, 1) \cong \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, folgt insbesondere, daß $Spin_+(1, 1)$ eine nicht zusammenhängende, eindimensionale Liegruppe ist.
- (iii) Die Überlagerung ist genau dann universell, falls $n \geq 3$ und $k \in \{0, n\}$ oder $n \geq 4$ und $k \in \{1, n-1\}$ ist (vgl. Folgerung 1.2 aus [Ba81]).

3.1.17 SATZ UND DEFINITION. Seien

$$\begin{aligned} \tilde{K} &:= \{y_1 \cdot \dots \cdot y_k \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_l \mid k, l \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} y_i \in H_{pq} \cap \text{span}(e_1, \dots, e_p) \\ x_i \in S_{pq} \cap \text{span}(e_{p+1}, \dots, e_{p+q}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 &:= \{y_1 \cdot \dots \cdot y_{2k} \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_{2l} \mid k, l \in \mathbb{N} \text{ und} \\ &\quad \left. \begin{array}{l} y_i \in H_{pq} \cap \text{span}(e_1, \dots, e_p) \\ x_i \in S_{pq} \cap \text{span}(e_{p+1}, \dots, e_{p+q}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

(d.h. $\tilde{K}_0 = \tilde{K} \cap Spin_+(p, q)$). Dann sind \tilde{K} und \tilde{K}_0 zu folgenden Gruppen isomorph:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &\cong \begin{cases} (Pin(p) \times Pin(q)) / \mathbb{Z}_2, \text{ falls } p > 1, \text{ wobei } (-1)(x, y) = (-x, -y) \\ Pin(n-1), \text{ falls } p = 1 \end{cases} \\ \tilde{K}_0 &\cong \begin{cases} (Spin(p) \times Spin(q)) / \mathbb{Z}_2, \text{ falls } p > 1 \\ Spin(n-1), p = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ferner sind \tilde{K} bzw. \tilde{K}_0 maximal kompakte Untergruppen von $Pin(p, q)$ bzw. $Spin_+(p, q)$.

Beweis. Siehe Satz 1.6 in [Ba81]. ■

Wir wollen nun die Lie-Algebra von $Pin(p, q)$ bestimmen. Dazu bemerken wir, daß $Pin(p, q)$ in der Gruppe $Cl_{p,q}^*$ aller in $Cl_{p,q}$ invertierbaren Elemente enthalten ist. Nun ist $Cl_{p,q}^*$ eine offene Untermannigfaltigkeit von $Cl_{p,q}$ (man identifiziere $Cl_{p,q}$ auf natürliche Weise mit Elementen aus $end(Cl_{p,q})$) und definiert eine Lie-Gruppe definiert, dessen Lie-Algebra $T_1 Cl_{p,q}^* \cong Cl_{p,q}$ sich als eine Lie-Unteralgebra von

$$\left(End(\mathbb{R}^{2^n}), [\cdot, \cdot] = \text{Abbildungskommutator} \right)$$

auffassen läßt. Dann gilt für die Lie-Algebra $\mathfrak{pin}(p, q)$ von $Pin(p, q)$ — als Lie-Untergruppe von $Cl_{p,q}^*$ betrachtet — der

3.1.18 SATZ.

(i) $\mathfrak{pin}(p, q) = (\wedge^2 \mathbb{R}^n, [\cdot, \cdot])$, wobei $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$ für $x, y \in \wedge^2 \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist als Vektorraum $\mathfrak{pin}(p, q) = \text{span}\{e_i \cdot e_j \mid i < j\}$.

(ii) Das Differential der Überlagerungsabbildung $\lambda : Pin(p, q) \rightarrow O(p, q)$ wird gegeben durch

$$\lambda_*(z) \cdot x = [z, x] = z \cdot x - x \cdot z.$$

$$\text{Speziell ist } \lambda_*(e_i \cdot e_j) = 2E_{ij} \text{ mit } E_{ij} = (e_{kl}), e_{kl} = \begin{cases} -\epsilon_j, & (k, l) = (i, j) \\ \epsilon_i, & (k, l) = (j, i) \end{cases}.$$

3.1.19 KOROLLAR. $\mathfrak{pin}(1, 1) \cong \mathbb{R}\omega$ mit $\omega = e_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\lambda_*(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.1.3 Spinor-Darstellungen

Da $Pin(p, q)$ eine Teilmenge von $Cl_{p,q}^C$ ist, erhalten wir eine (treue) Darstellung

$$\begin{aligned} \varkappa_{pq} &: Pin(p, q) \rightarrow Gl(\Delta_{pq}), \\ \varkappa_{pq} &: = \begin{cases} \Phi_{p,q|Pin(p,q)}, & \text{für } p+q = 2m \\ pr_1 \circ \Phi_{p,q|Pin(p,q)}, & \text{für } p+q = 2m+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\varkappa_{p,q}$ heißt *Spinor-Darstellung*, die Einschränkung $\varkappa_{p,q|Spin(p,q)}$ *Spin(p, q)-Darstellung*. Speziell gilt für die Signatur (1, 1) der

3.1.20 SATZ.

(i)

$$\varkappa_{1,1}(Spin(1,1)) = \Phi_{1,1}(Spin(1,1)) = \left\{ g_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \pm \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

(ii)

$$\varkappa_{1,1}(Spin_+(1,1)) = \Phi_{1,1}(Spin_+(1,1)) = \left\{ g_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Beweis. Die Zusammenhangskomponente der Einheit $Pin_{++}(1,1) = Spin_+(1,1)$ wird durch $\exp(\mathbb{R}\omega)$ gegeben (siehe 3.1.19). Da die Exponentialfunktion im vorliegenden Fall das übliche Matrizenexponential ist, erhalten wir (ii). Nach Definition ist $Spin(1,1) = Pin_{++}(1,1) \cup Pin_{+-}$ und $Pin_{+-}(1,1) = Pin_{++}(1,1) \cdot \omega$, woraus (i) folgt. ■

3.1.21 BEMERKUNG. Bezüglich der Standardbasis des \mathbb{C}^2 wirkt $Spin(1,1)$ auf \mathbb{C}^2 durch

$$x \cdot (z_1, z_2) := \Phi_{1,1}(x)(z_1, z_2) = \left(az_1, \frac{1}{a} z_2 \right),$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kehren wir nun zum allgemeinen Fall zurück:

3.1.22 SATZ.

(i) Für $(\varkappa_{p,q})_* : \mathfrak{pin}(p,q) \rightarrow \text{End}(\Delta_{pq})$ gilt: $(\varkappa_{p,q})_* = \varkappa_{p,q}$.

(ii) $\mu : \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \Delta_{pq} \rightarrow \Delta_{pq}$ ist ein Homomorphismus der $Spin(p,q)$ -Darstellung.

Beweis. Siehe Satz 1.9 ff. in [Ba81]. ■

3.1.23 BEMERKUNG UND DEFINITION. Sei (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte, orthonormale Basis in $(\mathbb{R}^{p,q}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{pq}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^{p,q}})$. Dann wird die *Volumenform* durch $\omega = e_1 \cdot \dots \cdot e_n$ definiert. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Basis, und falls $p+q = n = 2m$, so gilt $\omega^2 = (-1)^{m+p}$. Also hat $\varkappa_{p,q}(\omega) : \Delta_{pq} \rightarrow \Delta_{pq}$ die Eigenunterräume Δ_{pq}^{\pm} zum Eigenwert $\pm i^{m+p}$ mit $\dim_{\mathbb{C}}(\Delta_{pq}^{\pm}) = 2^{m-1}$. Die Eigenvektoren nennen wir *positive* bzw. *negative (Weyl-) Spinoren*. Weiterhin ist Δ_{pq}^{\pm} $Spin(p,q)$ -invariant und es gilt der folgende

3.1.24 SATZ. Die Darstellungen $\varkappa_{pq}^{\pm} : Spin(p,q) \rightarrow \text{Aut}(\Delta_{pq}^{\pm})$ (für $n = p+q = 2m$) und Δ_{pq} (für $p+q = 2m+1$) sind irreduzibel.

Beweis. Siehe Satz 1.8 ff. in [Ba81]. ■

3.1.25 BEMERKUNG. Sei für $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ mit $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ der Vektor $u(\varepsilon)$ aus Δ_{pq} durch $u_{\varepsilon_1} \otimes \dots \otimes u_{\varepsilon_m}$ mit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ gegeben. Dann bildet $\{u_\varepsilon \mid \Pi \varepsilon_i = \pm 1\}$ eine Basis von Δ_{pq}^\pm (über \mathbb{C}). Insbesondere gilt $\Delta_{1,1}^+ = \mathbb{C}u_1 = \text{Eigenunterraum von } \varkappa_{p,q}(\omega) \text{ zum Eigenwert } -1$ und $\Delta_{1,1}^- = \mathbb{C}u_{-1} = \text{Eigenunterraum von } \varkappa_{pq}(\omega) \text{ zum Eigenwert } +1$.

3.1.4 Skalarprodukte auf Δ_{pq}

Sei $(\cdot, \cdot)_\Delta$ das durch $(v, w)_\Delta := \sum_{j=1}^{2^m} v_j \bar{w}_j$ für $v, w \in \Delta_{pq}$ definierte positiv-definite Skalarprodukt, wobei v_j und w_j die Koordinaten von v und w bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{C}^{2^m} = \Delta_{pq}$ sind.

3.1.26 SATZ. Das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\Delta$ erfüllt auf Δ_{0n} bzw. Δ_{n0} folgende Eigenschaften:

- (i) *Spin-Invarianz:* $(x \cdot v, x \cdot w)_\Delta = (v, w)_\Delta$ für alle x aus $\text{Spin}(n, 0)$ bzw. $\text{Spin}(0, n)$ und v, w aus $\Delta_{n,0}$ bzw. $\Delta_{0,n}$.
- (ii) *Schiefsymmetrie:* $(x \cdot v, w)_\Delta = -(v, x \cdot w)_\Delta$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und v, w aus $\Delta_{n,0}$ bzw. $\Delta_{0,n}$.

Für $0 < p < n$ gilt auf Δ_{pq} :

- (i) $(\cdot, \cdot)_\Delta$ ist invariant unter der Wirkung der maximal kompakten Untergruppe \tilde{K} (s. 3.1.17), d.h. $(x \cdot v, x \cdot w)_\Delta = (v, w)_\Delta$ für alle $x \in \tilde{K}$ und $v, w \in \Delta_{pq}$.
- (ii) Sei $\theta : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$ die Spiegelung an $\text{span}(e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$. Dann gilt $(x \cdot v, w)_\Delta = -(v, \theta(x) \cdot w)_\Delta$ für alle $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ und $v, w \in \Delta_{pq}$.

Beweis. Siehe Satz 1.4.7 in [La99]. ■

3.1.27 BEMERKUNG. Im echt pseudoeuklidischen Fall ($0 < p < n$) würde man ebenfalls gerne ein Spin-invariantes, (schief-)symmetrisches Skalarprodukt auf Δ_{pq} definieren. Tatsächlich läßt sich aber zeigen: *Es existiert*

- kein $\text{Spin}(p, q)$ -invariantes Skalarprodukt.
- kein positiv-definites $\text{Spin}_+(p, q)$ -invariantes Skalarprodukt.
- kein positiv-definites und (schief-)symmetrisches Skalarprodukt.

Beweis. Siehe [Ba81] S.69. ■

Für die noch folgende Definition eines Skalarproduktes auf einem pseudoriemannschen Spin-Bündel benötigen wir jedoch zumindest ein $Spin_+(p, q)$ -invariantes Skalarprodukt. Sei $b := i^{\frac{p(p-1)}{2}} e_1 \cdot \dots \cdot e_p$. Dann definieren wir das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Delta : \Delta_{pq} \times \Delta_{pq} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\langle v, w \rangle_\Delta := (b \cdot v, w)_\Delta$.

3.1.28 SATZ.

- (i) $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Delta$ ist ein indefinites Skalarprodukt vom Index 2^{m-1} .
- (ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Delta$ ist $Spin_+(p, q)$ invariant.
- (iii) $\langle x \cdot v, w \rangle = (-1)^{p+1} \langle v, x \cdot w \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $v, w \in \Delta_{pq}$.

Beweis. Siehe Satz 1.12 aus [Ba81]. ■

3.1.29 BEMERKUNG. Für die Signatur $(1, 1)$ sind die Unterräume $\Delta_{1,1}^\pm$ isotrop bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Delta$, d.h. sind v und w aus $\Delta_{1,1}^+$ (bzw. aus $\Delta_{1,1}^-$), so ist $\langle v, w \rangle_\Delta = 0$. Wie der nachstehende Satz beweist, ist dieser Sachverhalt intrinsisch, d.h. positive und negative Spinoren sind stets “masselos”:

3.1.30 SATZ. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}_{1,1} \times \Delta_{1,1} \rightarrow \mathbb{C}$ eine $Spin_+(1, 1)$ -invariante Bilinearform. Dann sind die Unterräume $\Delta_{1,1}^+$ und $\Delta_{1,1}^-$ isotrop bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Beweis. Wir fixieren die Standardbasis $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\Delta_{1,1} = \mathbb{C}^2$. Fassen wir $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als $(0, 2)$ -Tensor auf, können wir

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = a_{11} z_1^* \otimes z_1^* + a_{12} z_1^* \otimes z_2^* + a_{21} z_2^* \otimes z_1^* + a_{22} z_2^* \otimes z_2^*$$

schreiben. Dann ist $\langle u_1, u_1 \rangle = \langle z_1, z_1 \rangle = a_{11}$. Gemäß 3.1.21 (ii) gilt $x \cdot u_1 = a u_1$ für $x = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \in Spin_+(1, 1)$. Aus der Spin-Invarianz folgt somit $a_{11} = \langle x \cdot u_1, x \cdot u_1 \rangle = a^2 a_{11}$. Wählen wir also ein x mit $a \neq \pm 1$, so folgt $a_{11} = 0$ und daher $\langle u_1, u_1 \rangle = 0$. Genauso argumentiert man für u_{-1} . ■

3.1.5 Spin-Strukturen auf pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten

3.1.31 SATZ UND DEFINITION. Sei $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, und $(P, \pi, M^{p,q}; O(p, q))$ das Bündel der pseudoorthonormalen Repère über $(M^{p,q}, g)$. Dann gilt:

- (i) $(M^{p,q}, g)$ ist orientierbar (aber weder zeit- noch raumorientierbar) genau dann, wenn $(P, \pi, M^{p,q}; O(p, q))$ zwei Zusammenhangskomponenten hat und auf ein $SO(p, q)$ -Hauptfaserbündel sich reduzieren läßt. Der Totalraum dieser Reduktion ist zusammenhängend.

- (ii) $(M^{p,q}, g)$ ist raum- und zeitorientierbar genau dann, wenn $(P, \pi, M^{p,q}; O(p, q))$ vier Zusammenhangskomponenten hat und auf ein $SO_+(p, q)$ -Hauptfaserbündel sich reduzieren läßt. Der Totalraum dieser Reduktion ist zusammenhängend.
- (iii) $(M^{p,q}, g)$ ist raum-, aber nicht zeitorientierbar genau dann, wenn $(P, \pi, M^{p,q}; O(p, q))$ zwei Zusammenhangskomponenten hat und auf ein $O_s(p, q)$ -Hauptfaserbündel sich reduzieren läßt. Der Totalraum dieser Reduktion ist zusammenhängend.
- (iv) $(M^{p,q}, g)$ ist zeit-, aber nicht raumorientierbar genau dann, wenn $(P, \pi, M^{p,q}; O(p, q))$ zwei Zusammenhangskomponenten hat und auf ein $O_t(p, q)$ -Hauptfaserbündel sich reduzieren läßt. Der Totalraum dieser Reduktion ist zusammenhängend.
- (v) $(M^{p,q}, g)$ ist auf keine Weise orientierbar genau dann, wenn $(P, \pi, M^{p,q}; O(p, q))$ zusammenhängend ist.

Das jeweilig reduzierte Bündel nennen wir das zusammenhängende Repèrebündel von $(M^{p,q}, g)$; die zugehörigen Strukturgruppen bezeichnen wir generisch mit $G(p, q)$.

Beweis. Siehe [Ba81], Satz 0.51. ■

3.1.32 DEFINITION. Sei $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit und $(P, \pi, M^{p,q}; G(p, q))$ das zusammenhängende Repèrebündel. Sei $\tilde{G}(p, q) := \lambda^{-1}(G(p, q))$. Ein Paar (Q, f) heißt Spin-Struktur von $(M^{p,q}, g)$, wenn (Q, f) eine λ -Reduktion von P ist, d.h. falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $(Q, \tilde{\pi}, M; \tilde{G}(p, q))$ ist ein glattes $\tilde{G}(p, q)$ -Hauptfaserbündel über M und $f : Q \rightarrow P$ eine glatte Abbildung.
- (ii) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 Q \times \tilde{G}(p, q) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & Q \\
 \downarrow f \times \lambda & \circlearrowleft & \downarrow f \\
 P \times G(p, q) & \xrightarrow{\Psi} & P
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \pi_Q \\
 \circlearrowleft M \\
 \nwarrow \pi_P
 \end{array}$$

kommutiert, wobei $\tilde{\Psi}$ und Ψ die Rechtswirkungen der Gruppen $\tilde{G}(p, q)$ bzw. $G(p, q)$ auf den Totalräumen Q bzw. P bezeichnen.

Zwei Spin-Strukturen (Q, f) und (\hat{Q}, \hat{f}) heißen isomorph, falls ein Isomorphismus F der $\tilde{G}(p, q)$ -Hauptfaserbündel derart existiert, daß

$$\begin{array}{ccc}
Q_1 & \xrightarrow{F} & Q_2 \\
& \searrow f_1 \circlearrowleft f_2 & \swarrow \\
& & P
\end{array}$$

kommutiert. $\text{Spin}(M^{p,q}, g)$ bezeichne die Menge aller Isomorphieklassen von Spin-Strukturen auf $(M^{p,q}, g)$. Ist $\text{Spin}(M^{p,q}, g) \neq \emptyset$, so nennen wir $(M^{p,q}, g)$ auch pseudoriemannsche Spin-Mannigfaltigkeit.

Spin-Strukturen müssen nicht immer existieren:

3.1.33 SATZ. Sei $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, M zusammenhängend und $TM = \xi^p \oplus \eta^q$ eine Zerlegung in ein maximal zeit- und ein maximal raumartiges Teilbündel. Dann gilt:

- (i) $(M^{p,q}, g)$ ist eine pseudoriemannsche Spin-Mannigfaltigkeit dann und nur dann, wenn $w_2(M) := w_2(TM) = w_1(\eta)^2$ gilt (wobei w_i die i -te Stiefel-Whitney-Klasse bezeichnet).
- (ii) Ist $\text{Spin}(M^{p,q}, g) \neq \emptyset$, so ist

$$\text{card}(\text{Spin}(M^{p,q}, g)) = \text{card}(H^1(M^{p,q}, \mathbb{Z}_2)).$$

Beweis. (i) Siehe [Ka68].

(ii) Siehe [Ba81], Abschnitt 2.2, insbesondere Satz 2.6. ■

3.1.34 BEMERKUNGEN.

(i) In der Literatur werden Spin-Strukturen in der Regel für Dimensionen ≥ 3 betrachtet. Die Resultate bleiben auch im zweidimensionalen für beliebige Signaturen richtig, aber es entstehen technische Probleme, da die Überlagerung der pseudoorthogonalen Gruppe für die Signatur $(1, 1)$ nicht mehr universell und deswegen $\text{Spin}_+(1, 1)$ nicht mehr zusammenhängend ist (vgl. 3.1.16 (ii) und (iii)).

(ii) Satz 3.1.33 ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Milnor, wonach auf einer zusammenhängenden, orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) eine Spin-Struktur genau dann existiert, wenn $w_2(M) = 0$ (siehe [Mi63]). Speziell folgt für kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten aus dem Satz von Wu, daß die Existenz von Spin-Strukturen rein *topologisch* obstruiert ist.

(iii) Für jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit M steht $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ in Bijektion zu $\text{Hom}(\pi_1(M, x), \mathbb{Z}_2)$ (vgl. [Ba81], Satz 0.22 und die dort angegebene Literatur). Insbesondere existiert also auf jeder einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit höchstens eine Spin-Struktur.

3.1.35 BEISPIELE.

(i) Sei $(M^{1,1}, g)$ eine zeitorientierbare Lorentz–Fläche. Dann gibt es mindestens eine Spin–Struktur: Da ein zeit– und raumartiges Vektorfeld ohne Nullstellen existiert (vgl. 2.6.28), ist das Repèrebündel P trivial, d.h. isomorph zu $M \times SO_+(1, 1)$. Die *triviale* Spin–Struktur ist dann durch $(Q_0, f_0) = (M \times Spin_+(1, 1), id \times \lambda)$ gegeben. Insbesondere ist dann auch das Spin–Bündel (vgl. 3.2.7) trivial: $S_0 \simeq M^{1,1} \times \Delta_{1,1}$ und wir können $\Gamma(S_0)$ mit $C^\infty(M^{1,1}, \mathbb{C}^2)$ identifizieren. Dieses Resultat finden wir mit Hilfe von 3.1.33 wie folgt wieder: Weil $(M^{1,1}, g)$ orientierbar und zeitorientierbar ist, gilt $w_1(\eta^1) = 0$ (vgl. 2.2.4 und 2.2.5). Aus dem Produktaxiom für Stiefel–Whitney–Klassen folgt unmittelbar

$$w_2(M) = w_2(\xi^1 \oplus \eta^1) = w_2(\xi^1) \cup 1 + w_1(\xi^1) \cup w_1(\eta^1) + 1 \cup w_2(\eta^1) = 0.$$

Insbesondere folgt aus 3.1.33, daß auf einfach zusammenhängenden Lorentz–Fläche genau eine Spin–Struktur existiert. Ist M kompakt, so gilt

$$H^1(M, \mathbb{Z}_2) = H^1(T^2, \mathbb{Z}_2) = H^1(S^1, \mathbb{Z}_2) \oplus H^1(S^1, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

d.h. auf jeder zeitorientierbaren, kompakten Lorentz–Fläche existieren genau vier nicht äquivalente Spin–Strukturen.

(ii) Auf jeder Fläche S existiert eine (riemannsche) Spin–Struktur: Weil S orientierbar ist, gilt zunächst $w_1(S) = 0$. Nach [StZi88], Beispiel 13.6.6 ist $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0, & \text{falls } S \text{ nicht kompakt} \\ \mathbb{Z}, & \text{falls } S \text{ kompakt} \end{cases}$ (*). Wie wir bereits in 2.1.2 bemerkt haben, können wir auf S eine konforme Struktur $[g]$ definieren, die ihrerseits wieder eine fast–komplexe Struktur $J_{[g]}$ (nämlich Rotation um $\frac{\pi}{2}$) induziert. Da der Nijenhuis–Tensor in Dimension zwei identisch verschwindet, definiert $J_{[g]}$ sogar eine komplexe Struktur (vgl. [KoNo69], Theorem IX.2.5 und Beispiel IX.2.8). Das komplexe Tangentialbündel ist dann die Komplexifizierung $T^{\mathbb{C}}S$ von TS , und daher gilt für die erste Chern–Klasse $2c_1(T^{\mathbb{C}}S) = 0$ (siehe §4 in [Hz66]). Da $H^2(S, \mathbb{Z})$ keine 2–Torsionen besitzt, muß also $c_1(T^{\mathbb{C}}S) = 0$ sein. Aus $w_2(TS) \equiv c_1(T^{\mathbb{C}}S) \pmod{2}$ folgt schließlich $w_2(TS) = w_2(S) = 0$, d.h. S ist eine Riemannsche Spin–Mannigfaltigkeit. Ist S_g kompakt vom Genus g , so gilt wegen der Universalität der Koeffizienten

$$H^1(S_g, \mathbb{Z}_2) \cong H^1(S_g, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \cong Hom(H_1(S_g, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2).$$

Da $H_1(S_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ (siehe [StZi88], Satz 9.9.9), folgt

$$card(H^1(S_g, \mathbb{Z}_2)) = 2^{2g},$$

d.h. auf einer kompakten Fläche vom Genus g existieren 2^{2g} nicht äquivalente Spin–Strukturen.

3.2 Dirac- und Twistor-Operatoren

3.2.1 Der Dirac- und Twistor-Operator eines Clifford-Bündels

Sei $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Jeder Tangentialraum erzeugt eine Clifford-Algebra $Cl_x := Cliff(T_x, g_x)$.

3.2.1 DEFINITION UND BEMERKUNG. Die Menge

$$Cliff(M^{p,q}, g) = \bigcup_{x \in M} Cl_x$$

heißt Clifford-Algebren-Bündel über $(M^{p,q}, g)$. Die Abbildung

$$\pi : Cliff(M^{p,q}, g) \rightarrow M, u \in Cl_x \mapsto x$$

ist eine lokal-triviale Faserung vom Fasertyp Cl_{pq} .

3.2.2 DEFINITION. Sei E ein komplexes oder reelles Vektorbündel über einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$, ∇^E eine kovariante Ableitung in E , und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf E . Dann heißt das Tripel $(E, \nabla^E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Clifford-Bündel, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) E ist ein Bündel von Clifford-Algebren-Moduln, d.h. es existiert eine Familie von Linkswirkungen $\{\mu_x : Cl_x \times E_x \rightarrow E_x\}_{x \in M^{p,q}}$, und die Abbildung

$$\mu : \Gamma(Cliff(M, g) \otimes E) \rightarrow \Gamma(E), a \otimes \varphi \mapsto a \cdot \varphi$$

mit

$$(a \cdot \varphi)(x) := \mu_x(a(x), \varphi(x))$$

ist glatt.

- (ii) ∇^E ist metrisch bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h. für alle $\varphi, \psi \in \Gamma(E)$ und alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ ist

$$X(\langle \varphi, \psi \rangle) = \langle \nabla_X^E \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \nabla_X^E \psi \rangle.$$

- (iii) Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $\varphi \in \Gamma(E)$ gilt

$$\nabla_Y^E(X \cdot \varphi) = (\nabla_Y^{LC} X) \cdot \varphi + X \cdot \nabla_Y^E \varphi.$$

- (iv) \pm Für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $\varphi, \psi \in \Gamma(E)$ gilt entweder

$$\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle = 0$$

oder

$$\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle = 0.$$

3.2.3 DEFINITION. Sei $(E, \nabla^E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Clifford-Bündel. Der durch

$$D : \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{g} \Gamma(TM \otimes E) \xrightarrow{\mu} \Gamma(E)$$

definierte Differentialoperator erster Ordnung heißt Dirac-Operator.

3.2.4 LEMMA. Sei (s_1, \dots, s_n) eine lokale Orthonormalbasis über U , $\epsilon_i = g(s_i, s_i)$. Dann ist $D\varphi|_U = \sum_{i=1}^n \epsilon_i s_i \cdot \nabla_{s_i}^E \varphi$ für alle $\varphi \in \Gamma(E)$.

Beweis. Siehe [Ba81], Satz 3.1. ■

3.2.5 BEMERKUNGEN.

(i) Das Hauptsymbol von D bzw. von D^2 ist durch

$$\sigma(D)_\xi(e) = X_\xi \cdot e \text{ bzw. } \sigma(D^2)_\xi(e) = -g(X_\xi, X_\xi)e$$

gegeben, wobei $e \in E_x$, $\xi \in T_x^*M$ und $X_\xi \in T_xM$ der zu ξ duale Vektor ist (siehe [Ba81], Satz 3.3). Somit ist D^2 ein *verallgemeinerter Laplace-Operator* (insbesondere stehen Weitzenböck-Formeln zur Verfügung, vgl. 3.3.2), und falls (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, ist D sogar *elliptisch*. Die Elliptizität geht allerdings auf pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten verloren (siehe z.B. [Ba81], Folgerung 3.1).

(ii) Ist $(E, \nabla^E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein positiv definites Cliffordbündel über einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit, so ist der zugehörige Dirac-Operator $D : \Gamma(E) \subset L^2(E) \rightarrow L^2(E)$ wesentlich selbstadjungiert (vgl. [Fr97], Abschnitt 4.1). Aus der Spektraltheorie elliptischer Operatoren folgt daher, daß das Restspektrum leer ist und $\text{spec}(D)$ nur aus reellen, isolierten Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. Dies gilt im pseudoriemannschen Fall nicht mehr (siehe [Ba81] Abschnitt 3.3)

Sei nun $(E, \nabla^E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Cliffordbündel derart, daß Teilbündel F_1, \dots, F_k mit $T^*M \otimes E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ existieren. Dann vereinbaren wir folgende

3.2.6 DEFINITION. Der durch

$$P_i : \Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\text{pr}_{F_i}} \Gamma(F_i)$$

definierte Differentialoperator erster Ordnung heißt i -ter Twistor-Operator.

3.2.2 Dirac- und Twistor-Operatoren auf pseudoriemannschen Spin-Mannigfaltigkeiten

3.2.7 Sei $(M^{p,q}, g)$ eine orientierte und zeitorientierte, pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit mit fixierter Spin-Struktur (Q, f) . Wir konstruieren ein Cliffordbündel $(S, \nabla^S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über (M, g) :

Zuerst definieren wir das Vektorbündel durch

$$S := Q \times_{Spin_+(p,q)} \Delta_{p,q}.$$

S heißt auch *Spinorbündel* von $(M, g, (Q, f))$ und ist ein komplexes Vektorbündel vom Rang $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ($n = p + q$) und Faser Δ_{pq} . Man beachte, daß zwei von zwei nicht äquivalenten Spin-Strukturen induzierte Spinorbündel isomorph als Vektorbündel sein können (vgl. 3.4.13 und 3.4.14). Die glatten Schnitte φ aus $\Gamma(S)$ heißen *Spinorfelder* oder kurz *Spinoren*. Wir können alternativ einen Spinor φ als $Spin_+(p, q)$ -äquivariante Funktion $\bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \Delta_{pq})^{Spin_+(p,q)}$ auffassen, d.h. $\bar{\varphi}(qg) = g^{-1}\bar{\varphi}(q)$ und $\varphi(x) = [q, \bar{\varphi}(q)]$. Häufig benutzen wir die daraus resultierende lokale Darstellung von φ als glatte Abbildung auf $U \subset M$: Ist $\tilde{s} : U \rightarrow Q$ ein lokaler Schnitt, so gilt $\varphi|_U(x) = [\tilde{s}(x), v(x)]$, wobei $v = \varphi \circ \tilde{s} \in C^\infty(U, \Delta_{pq})$ ist.

Weiterhin ist S ein Bündel von Clifford-Algebren-Moduln. Wir identifizieren

$$TM \cong Q \times_{Spin_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q} \cong P \times_{SO_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q},$$

wobei wir $[\tilde{s}, (x_1, \dots, x_n)]$ aus $(Q \times_{Spin_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q})_x$ bzw. $[s_x, (x_1, \dots, x_n)]$ mit $s = f \circ \tilde{s} = (s_1, \dots, s_n)$ aus $(P \times_{SO_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q})_x$ den Vektor $\sum_{i=1}^n x_i s_i$ aus $T_x M$ zuordnen. Dann definieren wir

$$\mu : TM \times S \rightarrow S \text{ durch } \mu([\tilde{s}, x], [\tilde{s}, v]) := [\tilde{s}, x \cdot v].$$

μ ist wegen der Spin-Äquivarianz der Clifford-Multiplikation auf den Fasern wohldefiniert und kann zu der Abbildung

$$\mu : Cliff(M, g) \times S \rightarrow S, \quad \mu([q, x_1 \cdot \dots \cdot x_l], [q, v]) := [q, x_1 \cdot \dots \cdot x_l \cdot v]$$

fortgesetzt werden.

Nun induziert der Levi-Civita-Zusammenhang ∇^{LC} auf (M, g) einen Zusammenhang im Repèrebündel $P \times_{SO_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q}$ und damit einen Zusammenhang ∇^S in der Überlagerung $Q \times_{Spin_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q}$. Um eine lokale Beschreibung von ∇^S anzugeben, wählen wir einen lokalen Schnitt $\tilde{s} : U \rightarrow Q$ und definieren $s = f \circ \tilde{s} = (s_1, \dots, s_n)$. Unter obiger Identifizierung entspricht dann $[\tilde{s}, e_i]$ bzw. $[s, e_i]$ dem lokalen Vektorfeld $s_i \in \mathfrak{X}(U)$. Dann können wir ∇^S lokal explizit angeben:

$$\nabla_X^S \varphi = X(\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{k < l} \epsilon_k \epsilon_l g(\nabla_X^{LC} s_k, s_l) s_k \cdot s_l \cdot \varphi,$$

wobei $X(\varphi)$ den Spinor $[\tilde{s}, X(v)]$ und $s_i \cdot \varphi$ den Spinor $[\tilde{s}, e_i \cdot v]$ bezüglich der lokal trivialen Darstellung v bezeichnet. Dann rechnet man die Produktregel aus 2.2 (iii) nach.

Schließlich wollen wir noch ein Skalarprodukt auf S definieren. Dabei stoßen wir auf die gleichen Schwierigkeiten wie bei der Definition von Skalarprodukten auf Δ_{pq} . Für (orientierte) riemannsche Mannigfaltigkeiten können wir das auf Δ_n definierte Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\Delta$ aufgrund der $Spin$ -Invarianz problemlos fortsetzen. Betrachten wir nun eine zeit- wie raumorientierte pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, so müssen wir ein $Spin_+$ -invariantes Skalarprodukt auf S definieren. Wir zerlegen dazu $TM = \xi^p \oplus \eta^q$. Seien \mathcal{O}_ξ und \mathcal{O}_η die fixierten Orientierungen auf ξ^p und η^q . Dann ist

$$\tilde{P}_\xi = \{(s_1, \dots, s_p, s_{p+1}, \dots, s_n) \mid [s_1, \dots, s_p] \in \mathcal{O}_\xi \text{ und } [s_{p+1}, \dots, s_n] \in \mathcal{O}_\eta\}$$

eine Reduktion auf die maximal kompakte Untergruppe $K_0 = SO(p) \times SO(q) \subset SO_+(p, q)$ und $\tilde{Q}_\xi := f^{-1}(\tilde{P}_\xi)$ eine Reduktion von Q auf die maximal kompakte Untergruppe $\tilde{K}_0 = (Spin(p) \times Spin(q)) / \mathbb{Z}_2$ (vgl. 3.1.10 bzw. 3.1.17). Es gilt

$$S = Q \times_{Spin_+(p,q)} \Delta_{pq} = \tilde{Q}_\xi \times_{\tilde{K}_0} \Delta_{pq}$$

und

$$TM = P \times_{SO_+(p,q)} \mathbb{R}^{p,q} = \tilde{P}_\xi \times_{K_0} \mathbb{R}^{p,q}.$$

Wir können dann das \tilde{K}_0 -invariante Skalarprodukt (\cdot, \cdot) auf Δ_{pq} (siehe 3.1.26) auf jeder Faser S_x definieren und zu einem positiv-definiten Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\xi$ auf $S \times S$ fortsetzen. Wie die Schreibweise bereits suggeriert, ist dieses Skalarprodukt aber von der gewählten Zerlegung von TM abhängig. Wie im ersten Abschnitt definieren wir ausgehend von $(\cdot, \cdot)_\xi$ ein zweites, von der Zerlegung unabhängiges, indefinites, aber $Spin_+(p, q)$ -invariantes Skalarprodukt. Wir setzen

$$J_\xi : S \rightarrow S, J_\xi([\tilde{q}, v]) = [\tilde{q}, b \cdot v] \text{ für } \tilde{q} \in \tilde{Q}_\xi$$

und

$$\langle \varphi, \psi \rangle := (J_\xi \varphi, \psi).$$

Die Definition von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hängt nicht mehr von ξ ab, und ∇^S ist metrisch bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiterhin gilt die Identität

$$\langle X \cdot \varphi, \psi \rangle = (-1)^{p+1} \langle \varphi, X \cdot \psi \rangle.$$

Zusammenfassend erhalten wir also den

3.2.8 SATZ. *Ist (M^{p+q}, g) eine raum- und zeitorientierte, pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist $(S, \nabla^S, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein (indefinites) Clifford-Bündel. Ist $p = 0$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit.*

Falls $p + q$ gerade ist, spaltet die Volumenform ω den Spinormodul Δ_{pq} in die Summe der Eigenunterräume $\Delta_{pq}^+ \oplus \Delta_{pq}^-$ auf (vgl. 3.1.23). Wir können dann $S = Q \times_{[Spin_+(p,q), \varkappa]} \Delta_{pq}$ in die Summe der Teilbündel $S^\pm = Q \times_{[Spin_+(p,q), \varkappa^\pm]} \Delta_{p,q}^\pm$ zerlegen.

3.2.9 DEFINITION. Die glatten Schnitte aus $\Gamma(S^\pm)$ heißen positive bzw. negative Spinoren.

3.2.10 BEMERKUNG. Die Clifford-Multiplikation vertauscht $\Gamma(S^\pm)$ mit $\Gamma(S^\mp)$, wie man durch eine faserweise Betrachtung feststellt. Insbesondere gilt für die Einschränkungen D^\pm von D auf $\Gamma(S^\pm)$: $D^\pm : \Gamma(S^\pm) \rightarrow \Gamma(S^\mp)$.

Jeder Spin-Struktur einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit können wir also einen Dirac-Operator zuordnen. Außerdem kann $T^*M \otimes S$ kanonisch in zwei Teilbündel zerlegt und somit ein Twistor-Operator definiert werden:

3.2.11 SATZ. $T^*M \otimes S$ zerlegt sich in zwei orthogonale Teilbündel $T^*M \otimes S = W_1 \oplus W_2$. Dabei gilt:

- (i) W_1 ist isomorph zu S und unter dieser Identifikation entspricht $pr_{W_1} : T^*M \otimes S \rightarrow W_1$ der Clifford-Multiplikation $\mu : T^*M \otimes S \rightarrow S$.
- (ii) $W_2 = \ker(\mu)$.

Beweis. Sei $p : T^*M \otimes S \rightarrow T^*M \otimes S$ definiert durch

$$p(\psi) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma^i \otimes (s_i \cdot \mu(\psi)),$$

wobei (s_1, \dots, s_n) eine lokale orthonormale Basis und $(\sigma^1, \dots, \sigma^n)$ die entsprechende duale Basis ist. Die Unterbündel

$$W_1 := \{p(\psi) \mid \psi \in T^*M \otimes S\} \text{ und } W_2 := \ker(\mu)$$

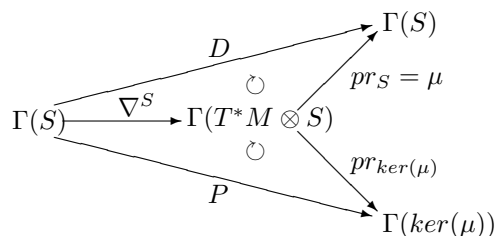
leisten das Gewünschte. ■

3.2.12 DEFINITION. Der durch

$$P = pr_{\ker(\mu)} \circ \nabla^S : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(\ker(\mu))$$

definierte Differentialoperator erster Ordnung wird der zum Spin-Bündel gehörige Twistor-Operator oder Penrose-Operator genannt.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Diagramm:



3.2.3 Verhalten des Dirac- und Twistor-Operators bei konformer Änderung der Metrik

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten des Dirac- und Twistor-Operators unter konformer Änderung der Metrik studieren und den Zusammenhang zur konformen Geometrie aufzeigen. Untersuchungen dieser Art wurden für den Dirac-Operator z.B. in [Hi74], [Ba81] (wo u.a. auch die Abhängigkeit des Dirac-Operators von der Spin-Struktur und vom Zusammenhang analysiert wird) und [BiPf83] angestellt, deren Resultate wir zusammenfaßen und mit analogen Ergebnissen für Twistor-Operatoren ergänzen.

3.2.13 DEFINITION. Seien E und F zwei \mathbb{K} -Vektorbündel über einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$, und $A_g : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ ein von der Metrik g abhängiger Differentialoperator. Man nennt A_g konform invariant vom Bigrad (a, b) ($a, b \in \mathbb{R}$), falls $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R}^+)$ für jeden konformen Faktor $A_{\lambda g} = \lambda^{-b} A_g \lambda^a$ gilt.

3.2.14 SATZ. Sei $A_g : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ konform invariant vom Bigrad (a, b) . Dann ist

$$\varphi \in \ker(A_g) \longmapsto \varphi_\lambda = \lambda^{-a} \varphi \in \ker(A_{\lambda g})$$

ein Isomorphismus.

3.2.15 KOROLLAR. Sei $A_g : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ konform invariant vom Bigrad (a, b) . Dann gilt:

- (i) $\dim(\ker(A_g))$ ist eine konforme Invariante.
- (ii) Für alle $\varphi \in \ker(A_g)$ ist die Menge $\text{zero}(\varphi)$ eine konforme Invariante, d.h. $\text{zero}(\varphi_\lambda)$ hängt nicht von λ ab.

Wir wenden uns jetzt speziell dem Dirac- bzw. Twistor-Operator einer Spin-Mannigfaltigkeit zu. Wir stellen zunächst fest, daß wir jeder Spin-Struktur (Q, f) auf $(M^{p,q}, g)$ kanonisch eine Spin-Struktur (Q_λ, f_λ) auf $(M^{p,q}, \lambda g)$ zuordnen können: Wir betrachten dazu den Isomorphismus Φ_λ zwischen den zusammenhängenden Repèrebündeln P_g und $P_{\tilde{g}}$, der $s = (s_1, \dots, s_n)$ auf $\tilde{s} = \left(\frac{s_1}{\sqrt{\lambda}}, \dots, \frac{s_n}{\sqrt{\lambda}}\right)$ abbildet. Ist H die durch die zweifache Überlagerung $f : Q \rightarrow P$ ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2 in $\pi_1(P_g, s)$, so definiert $\tilde{H} := (\Phi_\lambda)_\# H \subset \pi_1(P_{\tilde{g}}, \Phi_\lambda(s))$ eine Spin-Struktur (\tilde{Q}, \tilde{f}) über $(M^{p,q}, \lambda g)$, die zu (Q, f) im Sinne von Hauptfaserbündeln isomorph ist. Dann gilt:

3.2.16 SATZ.

- (i) Der Dirac-Operator einer Spin-Mannigfaltigkeit ist konform invariant vom Bigrad $\left(\frac{n-1}{4}, \frac{n+1}{4}\right)$.

(ii) *Der Twistor-Operator einer Spin-Mannigfaltigkeit ist konform invariant vom Bigrad $(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$.*

Inbesondere sind $\dim(\ker(D))$ und $\dim(\ker(P))$ konforme Invarianten.

Beweis. Für (i) siehe [Ba81], Satz 3.14. (ii) wird analog zu (i) bewiesen. ■

3.3 Harmonische Spinoren und Twistor-Spinoren

Von nun an sei $(M^{p,q}, g)$ eine (pseudo-) Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit fixierter Spin-Struktur (Q, f) , D und P der zugehörige Dirac- bzw. Twistor-Operator.

Für kompakte Mannigfaltigkeiten besagt das Theorem von Hodge-de Rham, daß die Dimension aller harmonischen n -Formen (d.h. Lösungen der Laplace-Gleichung) gerade die n -te Bettizahl der Mannigfaltigkeit und somit eine topologische Invariante ist. Allgemeiner kann man nun sich fragen, wieviel topologische Information die Dimension des Kernes eines gegebenen Differentialoperators kodiert. Wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, stehen uns auf Spin-Mannigfaltigkeiten zwei kanonische Differentialoperatoren zur Verfügung, deren Kerne man studieren kann:

3.3.1 DEFINITION.

(i) *Die Gleichung $D\varphi = 0$ heißt harmonische Gleichung, eine Lösung φ harmonischer Spinor. Weiter definieren wir die Vektorräume*

$$\mathfrak{H} := \ker(D), \mathfrak{H}_+ := \ker(D) \cap \Gamma(S^+) \text{ und } \mathfrak{H}_- := \ker(D) \cap \Gamma(S^-),$$

sowie

$$\delta := \dim(\mathfrak{H}) \text{ und } \delta_{\pm} := \dim(\mathfrak{H}_{\pm}).$$

(ii) *Die Gleichung $P\psi = 0$ heißt Twistor-Gleichung, eine Lösung ψ Twistor-Spinor. Weiter definieren wir die Vektorräume*

$$\mathfrak{T} := \ker(P), \mathfrak{T}_+ := \ker(P) \cap \Gamma(S^+) \text{ und } \mathfrak{T}_- := \ker(P) \cap \Gamma(S^-),$$

sowie

$$\tau := \dim(\mathfrak{T}) \text{ und } \tau_{\pm} := \dim(\mathfrak{T}_{\pm}).$$

(iii) *Wir nennen den Kern von D bzw. P degeneriert, falls er unendlich dimensional ist.*

Inwieweit ist nun die Existenz von harmonischen Spinoren bzw. von Twistor-Spinoren topologisch oder geometrisch obstruiert, und welche Rückschlüsse impliziert umgekehrt die Kenntnis von δ und

τ ? Wir betrachten zuerst die harmonische Gleichung. Dann können wir die Tatsache benutzen, daß D^2 ein verallgemeinerter Laplace-Operator ist (vgl. 3.2.5 (ii)) und für diese Weitzenböck-Formeln zur Verfügung stehen, die die Abhängigkeit von D^2 von der Krümmung ausdrücken. Für den Dirac-Operator gilt speziell die folgende Darstellung:

3.3.2 SATZ (Lichnerowicz '63/Friedrich '80). *Für den Dirac-Operator D gilt:*

$$D^2 = \Delta^{\nabla^S} + \frac{1}{4}R \text{ und } (D - \lambda)^2 = \Delta^{\nabla^\lambda} + \frac{1}{4}R - (n-1)\lambda,$$

wobei R die in 2.4.8 definierte Skalar­krümmung und Δ^∇ der Bochner-Laplace-Operator bezüglich der kovarianten Ableitung ∇^S bzw. ∇^λ mit

$$\nabla^\lambda \varphi := \nabla_X^S \varphi + \lambda X(\varphi)$$

ist (in einer lokalen orthonormalen Basis (s_1, \dots, s_n) wird Δ^∇ durch

$$\Delta^\nabla = - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\nabla_{s_i} \nabla_{s_i} + \operatorname{div}(s_i) \nabla_{s_i})$$

gegeben).

Beweis. Siehe [Li63] und [Fr80]. ■

Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit mit $R \geq 0$ und $R(x) > 0$ in einem Punkt x können also keine harmonischen Spinoren existieren, d.h. die Existenz harmonischer Spinoren ist in diesem Fall geometrisch obstruiert. Tatsächlich gilt sogar das

3.3.3 KOROLLAR (Friedrich '80). *Sei (M^n, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension ≥ 2 mit strikt positiver Skalar­krümmung R .*

(i) *Sei $R_0 := \min_{x \in M} (R(x))$. Dann gilt für alle Eigenwerte λ von D die Ungleichung*

$$\lambda^2 \geq \frac{1}{4} \frac{n}{n-1} R_0.$$

Insbesondere existieren keine harmonische Spinoren.

(ii) *Wird diese Schranke angenommen, d.h. existiert der Eigenwert $\lambda_\pm = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1} R_0}$, so erfüllt der zugehörige Eigenspinor ψ_\pm die Gleichung*

$$\nabla_X^S \psi_\pm = \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1} R_0} X \cdot \psi,$$

d.h. ψ_\pm ist ein sogenannter (reeller) Killing-Spinor zur Killingzahl $\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1} R_0}$.

Beweis. Siehe [Fr80]. ■

3.3.4 BEMERKUNGEN.

- (i) Killing–Spinoren müssen nicht immer existieren (tatsächlich hängt ihre Existenz stark von der Geometrie der Mannigfaltigkeit ab, siehe z.B. [BaFrGrKa91] oder [Bo98]).
- (ii) Im allgemeinen hängt δ sowohl von der Metrik als auch von der Spin–Struktur ab (siehe [Hi74] Theorem 4.5 und Abschnitt 3.3.2), d.h. δ kodiert weniger topologische Information als die Dimension harmonischer Differentialformen.
- (iii) Es existieren zahlreiche Abschätzungen für den ersten Eigenwert auf kompakten Riemannschen Spin–Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension, siehe z.B. [Fr97] Abschnitt 5.1.

Wir wenden uns nun der Untersuchung der Twistor–Gleichung zu. Dabei spielt der folgende Tensor eine wichtige Rolle:

3.3.5 DEFINITION. Sei $(M^{p,q}, g)$ eine (pseudo–) Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n = p + q \geq 3$, und sei $R \in C^\infty(M)$ die Skalarkrümmung. Der Tensor $K : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definiert durch

$$K(X) := \frac{1}{n-2} \left(\frac{1}{2(n-1)} RX - Ric(X) \right)$$

heißt Schouten–Tensor (dabei wird die Ricci–Krümmung Ric als Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ aufgefaßt, d.h. $Ric(X) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i Ric(X, s_i) s_i$).

Es folgen nun einige Resultate über Twistor–Spinoren. Sofern dabei der Schouten–Tensor benutzt wird, gelten die Aussagen nur ab Dimension ≥ 3 . Im Abschnitt 3.4.2 ff. diskutieren wir die Dimension 2 eingehender. Für Beweise der Behauptungen 3.3.5–3.3.8 im Riemannschen Fall, die sich aber problemlos auf den pseudoriemannschen Fall übertragen lassen, siehe [BaFrGrKa91] oder [Bo98], Abschnitt 3.2.

3.3.6 SATZ. Folgende Bedingungen sind für einen Spinor $\varphi \in \Gamma(S)$ äquivalent:

- (i) φ ist ein Twistor–Spinor, d.h. $P\varphi = 0$.
- (ii) $\nabla_V^S \varphi = -\frac{1}{p+q} V \cdot D\varphi$ für alle $V \in \mathfrak{X}(M^{p,q})$
- (iii) $V \cdot \nabla_W^S \varphi + W \cdot \nabla_V^S \varphi = \frac{2}{n} g(V, W) D\varphi$ für alle $V, W \in \mathfrak{X}(M^{p,q})$
- (iv) $g(V, V) V \cdot \nabla_V^S \varphi \in \Gamma(S)$ ist unabhängig von $V \in \mathfrak{X}(M^{p,q})$ mit $|g(V, V)| = 1$.

3.3.7 SATZ. Sei $\varphi \in \Gamma(S)$ ein Twistor–Spinor. Dann gilt:

(i) $D^2\varphi = \frac{1}{4} \frac{n}{n-1} R\varphi$, wobei $R \in C^\infty(M^{p,q})$ die Skalar­krümmung ist.

(ii) Sei $n = p + q \geq 3$. Dann ist $\nabla_X^S(D\varphi) = \frac{n}{2} K(X) \cdot \varphi$.

Man kann Twistor-Spinoren auch als parallele Schnitte in einem geeignet modifiziertem Vektorbündel (E, ∇^E) auffassen: Sei $E = S \oplus S$ und

$$\nabla_X^E \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \nabla_X^S \varphi + \frac{1}{n} X \cdot \psi \\ -\frac{n}{2} K(X) \cdot \varphi + \nabla_X^S \psi \end{pmatrix}.$$

3.3.8 SATZ.

(i) Ist $\varphi \in \Gamma(S)$ ein Twistor-Spinor, dann ist $\begin{pmatrix} \varphi \\ D\varphi \end{pmatrix} \nabla^E$ -parallel.

(ii) Ist umgekehrt $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ ein ∇^E -paralleler Schnitt, dann ist φ ein Twistor-Spinor und $\psi = D\varphi$.

Da die Dimension der ∇^E -parallelen Schnitte kleiner oder gleich dem Rang des Vektorbündels E sein muß, und ein parallelverschobener Schnitt, der eine Nullstelle hat, identisch null ist, folgt als Korollar:

3.3.9 KOROLLAR. Sei $(M^{p,q}, g)$ eine zusammenhängende (pseudo-) Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n = p + q \geq 3$. Dann gilt:

(i) $\tau \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

(ii) Ist für einen Twistor-Spinor $\varphi(x_0) = D\varphi(x_0) = 0$, so folgt $\varphi = 0$.

Ein weiteres, wichtiges Korollar ist der

3.3.10 SATZ. Sei $\varphi \in \Gamma(S)$ ein nicht trivialer Twistor-Spinor. Ist $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n = p + q \geq 3$, so ist $\text{zero}(\varphi) \subset M^{p,q}$ isotrop (d.h.: Ist $\gamma : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(I) \subset \text{zero}(\varphi)$, so ist γ' lichtartig).

Beweis. Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(I) \subset \text{zero}(\varphi)$. Dann ist $D\varphi(\gamma(t)) \neq 0$ wegen 3.3.8 (ii) (*) und es gilt

$$\nabla_{\gamma'(t)}^S \varphi = \frac{d}{ds} \mathcal{P}_{\gamma(t+s) \rightarrow \gamma(t)}^{\nabla^S} \underbrace{\varphi(\gamma(t+s))}_{=0} \Big|_{s=0} = 0.$$

Somit folgt aus 3.3.6 (ii) die Gleichung $\gamma'(t) \cdot D\varphi(\gamma(t)) = 0$. Multiplizieren mit $\gamma'(t)$ ergibt

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t)) \cdot D\varphi(\gamma(t)) = 0,$$

woraus wegen (*) die Behauptung folgt. ■

Abschließend wollen wir noch auf die Beziehung zwischen Twistor-Spinoren und global konformer Flachheit eingehen:

3.3.11 SATZ. *Sei $(M^{p,q}, g)$ eine pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$. Dann gilt:*

(i) *Ist $(M^{p,q}, g)$ einfach zusammenhängend und konform-flach, so ist $\dim(P)$ maximal, d.h. $\tau = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.*

(ii) *Ist umgekehrt $\tau = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$ maximal, so ist $(M^{p,q}, g)$ konform flach.*

Beweis. Siehe [Bo98] Korollar 15, S.31. ■

3.3.12 SATZ. *Ist (M^3, g) eine dreidimensionale, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und ψ ein nichttrivialer Twistor-Spinor, so ist (M^3, g) konform flach.*

Beweis. Siehe [BaFrGrKa91], Kap. 2, Theorem 6 (ii). ■

Die Beweise beruhen auf einer Charakterisierung der konformen Flachheit durch den Weyl- bzw. Schouten-Weyl-Tensor, die jedoch erst für Dimension ≥ 3 definiert werden können. Man kann also die verwendeten Techniken nicht direkt auf den zweidimensionalen Fall übertragen. Weitere Kriterien für konforme Flachheit ergeben sich aber aus der Betrachtung gewisser, von Spinoren kanonisch induzierter Vektorfelder.

3.3.13 DEFINITION. *Sei $\psi \in \Gamma(S)$ ein Spinor über $(M^{p,q}, g)$. Dann definieren wir das Vektorfeld V_ψ durch die Gleichung*

$$g(V_\psi, Z) = i^{p+1} \langle Z \cdot \psi, \psi \rangle$$

für $Z \in \mathfrak{X}(M)$, d.h. bezüglich einer lokalen ON-Basis (s_1, \dots, s_n) gilt $V_\psi = i^{p+1} \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(V_\psi, s_i) s_i$.

3.3.14 BEMERKUNG. V_ψ ist ein reelles Vektorfeld:

$$\begin{aligned} \overline{i^{p+1} \langle Z \cdot \psi, \psi \rangle} &= (-i)^{p+1} \langle \psi, Z \cdot \psi \rangle \\ &= (-1)^{p+1} (-i)^{p+1} \langle Z \cdot \psi, \psi \rangle \\ &= i^{p+1} \langle Z \cdot \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

3.3.15 SATZ. Sei $\varphi \in \Gamma(S)$ ein Twistor-Spinor auf einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit $(M^{p,q}, g)$. Dann ist V_ψ ein konformes Vektorfeld. Genauer gesagt gilt $L_{V_\psi} g = \frac{4}{n} \operatorname{Re}(i^{p+1} \langle D\varphi, \varphi \rangle) g$.
Beweis. Sei ∇ der von g induzierte Levi-Civita-Zusammenhang und $V = V_\psi$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}
L_V g(T, U) &= g(\nabla_T V, U) + g(T, \nabla_U V) \\
&= T(g(V, U)) - g(V, \nabla_T U) + U(g(T, V)) - g(\nabla_W T, V) \\
&= i^{p+1} [T(\langle U \cdot \psi, \psi \rangle) - \langle (\nabla_T U + \nabla_W T) \cdot \psi, \psi \rangle + U(\langle T \cdot \psi, \psi \rangle)] \\
&= i^{p+1} [\langle (\nabla_T U) \cdot \psi + U \cdot \nabla_T^S \psi, \psi \rangle + \langle U \cdot \psi, \nabla_T^S \psi \rangle - \langle (\nabla_T U + \nabla_U T) \cdot \psi, \psi \rangle \\
&\quad + \langle (\nabla_U T) \cdot \psi + T \cdot \nabla_U^S \psi, \psi \rangle + \langle T \cdot \psi, \nabla_U^S \psi \rangle] \\
&= i^{p+1} [\langle U \cdot \nabla_T^S \psi, \psi \rangle + \langle U \cdot \psi, \nabla_T^S \psi \rangle + \langle T \cdot \nabla_U^S \psi, \psi \rangle + \langle T \cdot \psi, \nabla_U^S \psi \rangle].
\end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Twistor-Gleichung 3.3.6 (ii): $\nabla_Z^S \psi = -\frac{1}{n} Z \cdot D\psi$. Dann ist:

$$\begin{aligned}
L_V g(T, U) &= -\frac{i^{p+1}}{n} [\langle U \cdot T \cdot D\psi, \psi \rangle + \langle U \cdot \psi, T \cdot D\psi \rangle + \langle T \cdot U \cdot D\psi, \psi \rangle + \langle T \cdot \psi, U \cdot D\psi \rangle] \\
&= -\frac{i^{p+1}}{n} [\langle U \cdot T \cdot D\psi, \psi \rangle + (-1)^{p+1} \langle \psi, U \cdot T \cdot D\psi \rangle + \langle T \cdot U \cdot D\psi, \psi \rangle \\
&\quad + (-1)^{p+1} \langle \psi, T \cdot U \cdot D\psi \rangle] \\
&= -\frac{i^{p+1}}{n} [\langle (U \cdot T + T \cdot U) \cdot D\psi, \psi \rangle + (-1)^{p+1} \langle \psi, (U \cdot T + T \cdot U) \cdot D\psi \rangle] \\
&= \frac{2i^{p+1}}{n} [\langle D\psi, \psi \rangle + (-1)^{p+1} \overline{\langle D\psi, \psi \rangle}] g(T, U) \\
&= \frac{4}{n} \operatorname{Re}(i^{p+1} \langle D\psi, \psi \rangle),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Dann gilt z.B. der folgende Satz:

3.3.16 SATZ (Rademacher/Kühnel '97). Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\varphi \in \Gamma(S)$ ein Twistor-Spinor mit $\operatorname{zero}(\psi) \neq \emptyset$. Gilt $V_\psi \neq 0$, so ist (M, g) konform flach.

Beweis. Siehe [KüRa94], Theorem A. (Für die Umkehrung, d.h. eine Beschreibung der global konform flachen Mannigfaltigkeiten, die einen Twistor-Spinor mit Nullstelle und nicht trivialem konformen Vektorfeld besitzen, siehe [KüRa97].) ■

Für Lorentz-Flächen können wir nun konforme Flachheit durch das Kriterium 2.4.26 mittels konformer Vektorfelder an die Existenz von Twistor-Spinoren mit gewissen Eigenschaften knüpfen. Wir beweisen zuerst das

3.3.17 LEMMA. Sei (M^{1+1}, g) zeitorientierbar und $\psi \in \Gamma(S)$. Sei $s = (s_1, s_2) : U \rightarrow P$ eine orthonormale Basis mit Lift \tilde{s} nach \tilde{Q}_ξ , so daß $\psi_{\tilde{s}} = \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1} \in C^\infty(U, \Delta_{1+1})$ eine lokale Trivialisierung von ψ bezüglich \tilde{s} ist. Dann gilt

$$V_\psi = |\psi_{\tilde{s}}^+|^2 X_0 - |\psi_{\tilde{s}}^-|^2 Y_0,$$

wobei $X_0 := s_1 + s_2$ und $Y_0 := -s_1 + s_2$. Insbesondere definiert V_ψ ein kausales Vektorfeld. Dieses ist zeitartig, falls die lokalen Komponenten $\psi_{\tilde{s}}^+$ und $\psi_{\tilde{s}}^-$ keine Nullstellen haben, und lichtartig im Falle eines nullstellenfreien Halb-Spinors.

Beweis. Sei $T \in \mathfrak{X}(M)$ mit lokalen Komponenten t_1 und t_2 bezüglich s , d.h. $T = t_1 s_1 + t_2 s_2 = [s, t_1 e_1 + t_2 e_2]$. Zuerst berechnen wir:

$$\begin{aligned} -\langle T \cdot \psi, \psi \rangle &= -\langle [\tilde{s}, (t_1 e_1 + t_2 e_2) \cdot (\psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1})], [\tilde{s}, \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1}] \rangle \\ &= -([\tilde{s}, e_1 \cdot (t_1 e_1 + t_2 e_2) \cdot (\psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1})], [\tilde{s}, \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1}])_\xi \\ &= -([\tilde{s}, (t_1 - t_2) \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + (t_1 + t_2) \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1}], [\tilde{s}, \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1}])_\xi \\ &= -((t_1 - t_2) \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + (t_1 + t_2) \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1}, \psi_{\tilde{s}}^+ u_1 + \psi_{\tilde{s}}^- u_{-1})_{\Delta_{1+1}} \\ &= -(|\psi_{\tilde{s}}^-|^2 + |\psi_{\tilde{s}}^+|^2) t_1 + (|\psi_{\tilde{s}}^+|^2 - |\psi_{\tilde{s}}^-|^2) t_2. \end{aligned}$$

Andererseits wird $V_\psi = V_{\psi 1} s_1 + V_{\psi 2} s_2$ durch die Gleichung

$$g(T, V_\psi) = (-t_1 V_{\psi 1} + t_2 V_{\psi 2})$$

bestimmt. Vergleichen der Koeffizienten ergibt

$$V_{\psi 1} = (|\psi_{\tilde{s}}^+|^2 + |\psi_{\tilde{s}}^-|^2) \quad \text{und} \quad V_{\psi 2} = (|\psi_{\tilde{s}}^+|^2 - |\psi_{\tilde{s}}^-|^2),$$

woraus die erste Gleichung folgt. Weil $\lambda = g(X_s, Y_s) > 0$ und

$$g(V_\psi, V_\psi) = -2\lambda |\psi_{\tilde{s}}^+|^2 |\psi_{\tilde{s}}^-|^2,$$

ist das Vektorfeld V_ψ kausal. ■

Es folgt nachstehendes Kriterium für (global) konforme Flachheit und Vollständigkeit von Lorentz-Flächen:

3.3.18 SATZ. Sei $\mathcal{L} = (M^{1,1}, g)$ eine Lorentz-Fläche. Existiert ein Twistor-Spinor $\psi \in \Gamma(S)$ derart, daß die Spinoren $\psi^+ = pr_{S^+} \psi$ und $\psi^- = pr_{S^-} \psi$ keine Nullstelle besitzen, so ist $M^{1,1}$ global konform flach (und somit insbesondere vollständig, falls M kompakt ist).

Beweis. Nach Voraussetzung sind ψ^+ und ψ^- niemals null. Daher gilt für jede lokale Darstellung $v_+u_1 + v_-u_{-1}$, daß $v_+ \neq 0$ und $v_- \neq 0$. Nach Lemma 3.3.17 definiert V_ψ also ein zeitartiges konformes Vektorfeld. Aus den Sätzen 2.4.25 und 2.4.23 folgt schließlich die Behauptung. ■

3.3.19 BEMERKUNG. Wie wir weiter unten sehen werden, gilt z.B. für kompakte Lorentz-Flächen bezüglich der trivialen Spin-Struktur auch die Umkehrung.

Wir untersuchen nun das Vektorfeld V_φ für einen harmonischen Spinor φ .

3.3.20 SATZ. *Ist $\varphi \in \Gamma(S)$ harmonisch, so ist V_φ divergenzfrei, d.h. $\operatorname{div}(V_\varphi) = 0$*

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V_\varphi) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(\nabla_{s_i}^{LC} V, s_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i (s_i g(V_\varphi, s_i) - g(V_\varphi, \nabla_{s_i}^{LC} s_i)) \\ &= i^{p+1} \sum_{i=1}^n (\epsilon_i s_i \langle s_i \cdot \varphi, \varphi \rangle - \langle \nabla_{s_i}^{LC} s_i \cdot \varphi, \varphi \rangle) \\ &= i^{p+1} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle s_i \cdot \nabla_{s_i}^S \varphi, \varphi \rangle \\ &= i^{p+1} \langle D\varphi, \varphi \rangle = 0, \end{aligned}$$

da der Spinor harmonisch ist. ■

3.3.21 KOROLLAR. *Ist $\varphi \in \Gamma(S^+)$ harmonisch, so gilt in der Schreibweise von 3.3.17:*

$$X_0(|\varphi|^2) + |\varphi|^2 \operatorname{div}(X_0) = 0.$$

3.3.22 SATZ. *Sei X ein \mathcal{X} -Vektorfeld und φ ein positiver harmonischer Spinor. Dann gilt*

$$X \cdot \varphi = 0.$$

Insbesondere ist $V_\varphi \cdot \varphi = 0$.

Beweis. Wir haben

$$e_1 \cdot u_{\pm 1} = \begin{cases} -u_{-1} \\ -u_{+1} \end{cases} \quad \text{und} \quad e_2 \cdot u_{\pm 1} = \begin{cases} u_{-1} \\ -u_{+1} \end{cases}$$

Ist $s = (s_1, s_2) : U \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt mit \tilde{s} nach Q , dann $X = \lambda X_0$, $\varphi = [\tilde{s}, f_{\tilde{s}} u_{+1}]$ und

$$\lambda X_0 \cdot \varphi = \lambda [\tilde{s}, f_{\tilde{s}} (e_1 \cdot u_{+1} + e_2 \cdot u_{+1})] = 0,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

3.4 Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf Flächen

3.4.1 Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf kompakten Riemannschen Flächen

Sei $\mathcal{R} = (M^2, h)$ eine (kompakte) Riemannsche Fläche vom Genus g . Dann ist M wegen $w_2(M) = 0$ eine Spin-Mannigfaltigkeit und es existieren $\text{card}(H^1(M, \mathbb{Z}_2)) = 2^{2g}$ verschiedene Spin-Strukturen (vgl. 3.1.35). Erste umfangreichere Untersuchungen über harmonische Spinoren auf Riemannschen Flächen wurden von Hitchin in [Hi74] veröffentlicht. Demnach hängt δ auf Riemannschen Flächen entscheidend vom Genus g der Fläche M ab.

3.4.1 BEMERKUNG. Im Fall einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit gerader Dimension können wir die in 3.2.10 erwähnten Dirac-Operatoren $D^\pm : \Gamma(S^\pm) \rightarrow \Gamma(S^\mp)$ betrachten, welche elliptisch und damit insbesondere fredholmsch sind. Weil D^+ ein selbstadjungierter Operator ist, gilt

$$\text{Index}(D^+) = \dim(\ker(D^+)) - \dim(\ker(D^-)) = \delta_+ - \delta_-$$

(siehe [Fr97], S.118). Da auf kompakten Riemannschen Flächen das \hat{A} -Geschlecht 0 ist, folgt $\text{Index}(D^+) = 0$ (siehe [LwMi89] Theorem III.13.10) und somit $\delta_+ = \delta_-$ (siehe auch [Bä97], Abschnitt 4); es reicht also, lediglich D^+ bzw. δ_+ zu studieren.

3.4.2 DEFINITION. Eine kompakte Riemannsche Fläche heißt hyperelliptisch genau dann, wenn ein Integrалdivisor D auf M^2 mit $\deg(D) = 2$ und $r(D^{-1}) \geq 2$ existiert (Für eine Definition dieser Begriffe sowie für weitere Eigenschaften hyperelliptischer Flächen, siehe [FaKr91] Abschnitt III.7). Dies ist äquivalent zur Existenz einer nicht konstanten, meromorphen Funktion mit genau zwei Polen.

3.4.3 THEOREM (Hitchin '74).

- (i) Es gilt die Abschätzung $\delta_+ \leq \lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor$. Insbesondere ist δ_+ endlich.
- (ii) Sei M hyperelliptisch. Dann ist $\delta_+ = \lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor$ für eine Spin-Struktur über M . Ist g zudem gerade, so existieren mindestens $2(g+1)$ solcher Spin-Strukturen. Insbesondere hängt δ_+ für $g \geq 3$ im allgemeinen von der Metrik h ab.

Beweis. Siehe [Hi74], Abschnitte 2.1 und 2.2. ■

3.4.4 BEMERKUNG. Man kann zeigen, daß $\delta_+ = \lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor$ nur für hyperelliptische Flächen oder Flächen vom Genus 4 oder 6 gelten kann (siehe [Mr68], Theorem 3.1). Für $g = 4$ oder 6 sind nicht hyperelliptische Beispiele mit $\delta_+ = \lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor$ bekannt (siehe [BäSc92], Abschnitt 3 und 4).

Das Ergebnis von Hitchin kann noch verschärft werden:

3.4.5 THEOREM (Bär/Schmutz '92). *Sei M eine hyperelliptische Riemannsche Fläche vom Genus $g \geq 2$. Dann gilt:*

- (i) *Es existieren stets Spin-Strukturen mit $\delta_+ = 0$ und $\delta_+ = 1$.*
- (ii) *Ist g gerade, so gilt $\delta_+ = \lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor$ für genau $2(g+1)$ Spin-Strukturen.*
- (iii) *Ist g ungerade, so gilt $\delta_+ = \lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor$ für genau eine Spin-Struktur.*

Beweis. Siehe [BäSc92], Theorem 3 und 4. ■

3.4.6 BEMERKUNG. Eine kompakte Riemannsche Fläche vom Genus 1 ist diffeomorph zu einem Torus, und, wie in 2.4.25 (i) bemerkt, global konform flach. Da δ eine konforme Invariante ist, genügt es somit, den flachen Torus zu betrachten. In [Fr84] zeigte Friedrich, daß

$$\delta(T^2, g, (Q, f)) = \begin{cases} 2, & \text{falls } (Q, f) \text{ die triviale Spin-Struktur ist} \\ 0, & \text{für alle übrigen Spin-Strukturen} \end{cases}.$$

Für einfach zusammenhängende Riemannsche Flächen kennt man folgendes Resultat:

3.4.7 SATZ. *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Fläche vom Genus 0. Dann gilt für den ersten Eigenwert des Dirac-Operators die Ungleichung*

$$\lambda^2 \geq \frac{4\pi}{\text{area}(M)}.$$

Insbesondere existieren keine harmonische Spinoren auf M .

Beweis. Siehe [Bä92]. ■

3.4.2 Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf Lorentz-Flächen I: Minkowski-Flächen

Wir wollen nun die harmonische Gleichung und die Twistor-Gleichung auf Lorentz-Flächen untersuchen. Dabei sollen konforme Fragestellungen im Vordergrund stehen: Wieviel konforme Information kodieren die spingeometrischen Invarianten δ und τ , d.h. in welchem Maße können diese konforme Klassen unterscheiden? Welcher Zusammenhang besteht zwischen konformen Invarianten des ersten Kapitels wie Nulllinien oder lichtartige Vollständigkeit einerseits und δ bzw. τ andererseits? Welche geometrischen Konsequenzen ergeben sich aus der Kenntnis von δ und τ ? Bevor wir dazu einige allgemeinere Resultate beweisen, wollen wir zunächst einige einfache Beispiele diskutieren. Dabei stehen wir vor dem Problem, mit welchen Techniken man diese Fragen angehen sollte. Was die Methoden

für Riemannsche Flächen angeht, so gilt einmal mehr, daß eine direkte Übertragung in die Lorentz-Geometrie im allgemeinen nicht möglich ist. So benutzt z.B. die Untersuchung des Riemannschen Torus seine konforme Flachheit, eine Eigenschaft, die sein Lorentz-Analogon (vgl. 2.4.26 und die Tori aus 2.4.14 und 2.4.24) aufgrund des Verlusts der Elliptizität nicht mehr teilt. Die meisten Methoden für pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten funktionieren hingegen im wesentlichen erst ab Dimension ≥ 3 . Wir beginnen zunächst mit der Untersuchung von Minkowski-Flächen, um die Übertragbarkeit auf den zweidimensionalen Fall zu studieren.

VORBEMERKUNG. Sei $(M^{1,1}, g)$ eine Minkowski-Fläche. Es bezeichne (Q_0, f_0) die triviale Spin-Struktur und S_0 das hieraus resultierende, triviale Spin-Bündel (vgl. 3.1.35 und 3.2.7). Wir identifizieren dann $\Gamma(S_0) \cong C^\infty(M^{1,1}, \mathbb{C}^2)$ mit $C^\infty(M^{1,1}, \mathbb{C}^2)$, wobei $\varphi \in \Gamma(S_0)$, dargestellt als $Spin_+(1,1)$ -äquivalente Funktion $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}^+ u_1 + \bar{\varphi}^- u_{-1}$ für $\bar{\varphi}^+, \bar{\varphi}^- \in C^\infty(Q, \mathbb{C})$, auf $\begin{pmatrix} \bar{\varphi}^+ \\ \bar{\varphi}^- \end{pmatrix}$ abgebildet wird (die Wahl der Basis (u_1, u_{-1}) wird im folgenden wichtig werden). $\mathfrak{H}^0, \mathfrak{H}_\pm^0$ bzw. $\mathfrak{T}^0, \mathfrak{T}_\pm^0$ bezeichnen die Vektorräume der harmonischen Spinoren bzw. Twistor-Spinoren bezüglich der trivialen Spin-Struktur, und δ^0, δ_\pm^0 bzw. τ^0, τ_\pm^0 ihre respektive Dimension.

Ziel ist es, δ^0 und τ^0 für $\mathbb{E}^{2,1} = (\mathbb{R}^2, [dx dy])$ zu berechnen. Dazu bestimmen wir zuerst explizit die zu lösende harmonische Gleichung bzw. Twistor-Gleichung.

3.4.8 SATZ.

- (i) $\varphi \in \mathfrak{H}^0$ genau dann, wenn für jede lokale Orthonormalbasis (s_1, s_2) die Gleichung $s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$ gilt.
- (ii) $\varphi \in \mathfrak{T}^0$ genau dann, wenn für jede lokale Orthonormalbasis (s_1, s_2) die Gleichung $s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = -s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$ gilt.

Beweis. (i) Aus 3.2.4 folgt für D die lokale Darstellung $D\varphi = -s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi + s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$ (*). Also ist $D\varphi = 0$ genau dann, falls $s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$ gilt.

(ii) Nach Satz 3.3.6 ist $\varphi \in \mathfrak{T}^0$ genau dann, wenn $\nabla_{s_i}^S \varphi = -\frac{1}{2} s_i \cdot D\varphi$ gilt, woraus wiederum aus der lokalen Darstellung (*) die Behauptung folgt. ■

3.4.9 LEMMA. Für alle $Z \in \mathfrak{X}(M^{1,1})$ und $\varphi \in \Gamma(S)$ gilt lokal

$$\nabla_Z^S \varphi = Z(\varphi) + \frac{1}{2} g(Z, [s_1, s_2]) s_1 \cdot s_2 \cdot \varphi = Z(\varphi) + \frac{1}{2} g(Z, [s_1, s_2]) \omega \cdot \varphi$$

Beweis. Nach 3.2.7 müssen wir für $Z = Z_1 s_1 + Z_2 s_2$ lediglich

$$g(\nabla_Z^{LC} s_1, s_2) = Z_1 g(\nabla_{s_1}^{LC} s_1, s_2) + Z_2 g(\nabla_{s_2}^{LC} s_1, s_2)$$

berechnen:

$$\begin{aligned} g(\nabla_{s_1}^{LC} s_1, s_2) &= \frac{1}{2} [s_1(g(s_1, s_2)) + s_1(g(s_2, s_1)) - s_2(g(s_1, s_1)) - \\ &\quad - g(s_1, [s_1, s_2]) + g(s_1, [s_2, s_1]) + g(s_2, [s_1, s_1])] = g(s_1, [s_2, s_1]). \end{aligned}$$

Genauso finden wir

$$g(\nabla_{s_2}^{LC} s_1, s_2) = g(s_2, [s_2, s_1]).$$

Also ist

$$g(\nabla_Z^{LC} s_1, s_2) = Z_1 g(s_1, [s_2, s_1]) + Z_2 g(s_2, [s_2, s_1]) = g(Z, [s_2, s_1]).$$

■

3.4.10 SATZ. Sei $(M^{1,1}, dx dy)$ eine Lorentz-Fläche mit globalen Nullkoordinaten (x, y) . Dann gilt bezüglich der trivialen Spin-Struktur:

(i)

$$\mathfrak{H}_+^0 = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in C^\infty(M, \mathbb{C}^2) \mid \partial_x f = 0 \right\}$$

und

$$\mathfrak{H}_-^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in C^\infty(M, \mathbb{C}^2) \mid \partial_y g = 0 \right\}.$$

(ii)

$$\mathfrak{T}_+^0 = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in C^\infty(M, \mathbb{C}^2) \mid \partial_y f = 0 \right\}$$

und

$$\mathfrak{T}_-^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in C^\infty(M, \mathbb{C}^2) \mid \partial_x g = 0 \right\}.$$

Beweis. Weil (x, y) globale Nullkoordinaten sind, ist $(s_1, s_2) = \left(\frac{\partial_x - \partial_y}{\sqrt{2}}, \frac{\partial_x + \partial_y}{\sqrt{2}} \right)$ ein (globales) Orthonormalsystem mit $[s_1, s_2] = 0$. Also gilt

$$\nabla_Z^{S_0} \varphi = Z(\varphi) = \begin{pmatrix} Z(f) \\ Z(g) \end{pmatrix}$$

für $\varphi = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in C^\infty(M, \mathbb{C}^2)$. Realisieren wir die Clifford-Multiplikation gemäß 3.1.5, so folgt

$$s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial_x - \partial_y) f \\ i(\partial_x - \partial_y) g \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\partial_x - \partial_y) g \\ i(\partial_x - \partial_y) f \end{pmatrix},$$

und

$$s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\partial_x + \partial_y) f \\ i(\partial_x + \partial_y) g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -(\partial_x + \partial_y) g \\ i(\partial_x + \partial_y) f \end{pmatrix}.$$

(Man beachte, daß die Matrixdarstellung von e_i bezüglich der Basis $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ definiert ist,

und wegen $u_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ ein i in die zweite Komponente des Spinors aufgrund unserer in der Vorbemerkung gewählten Identifizierung hinzugefügt werden muß). Aus einem Koeffizientenvergleich ergibt 3.4.8 die Behauptung. ■

3.4.11 KOROLLAR. Für jede Minkowski-Fläche gilt $\delta_\pm^0 = +\infty$ und $\tau_\pm^0 = +\infty$.

Insbesondere kann der Satz 3.3.8 nicht für Lorentz-Flächen verallgemeinert werden, da 3.4.11 dem Korollar 3.3.9 (i) widerspricht. Auch für 3.3.9 (ii) und 3.3.10 läßt sich leicht ein Gegenbeispiel finden:

3.4.12 BEISPIEL. Wir betrachten die Minkowskiebene $\mathbb{E}^{2,1}$. Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ eine Funktion, die durch glatte Fortsetzung von

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } |x| \geq 1 + \varepsilon \\ 0, & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases}$$

definiert wird. Sei

$$\psi^+(x, y) = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist ψ^+ gemäß Satz 3.4.10 ein Twistor-Spinor, aber auf $U := (-1, 1) \times \mathbb{R}$ gilt $\psi|_U^+ \equiv 0$.

Die Methoden und Resultate für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten lassen also im allgemeinen sich nicht auf Lorentz-Flächen übertragen. Ein erster Ansatz wird aber in 3.4.10 dennoch sichtbar, nämlich das Verhalten der Spinoren entlang der Nulllinien zu studieren (vgl. 3.4.66 bzw. 3.4.73).

3.4.3 Die Dirac- und die Twistor-Gleichung auf Lorentz-Flächen II: Der Lorentz-Torus

Wie die Minkowski-Flächen zeigen, weicht die höherdimensionale Spingeometrie vom zweidimensionalen Fall erheblich ab. Wir wollen daher uns der Frage zuwenden, ob die spingeometrischen Aussagen über den Riemannschen Torus, trotz der bereits erwähnten Schwierigkeiten, auf den Lorentz-Torus sich übertragen lassen. Anders gesagt wollen wir klären, ob in Dimension zwei die Kompaktheit einer Fläche die Endlichdimensionalität von \mathfrak{H} impliziert und die Degeneriertheit somit topologisch obstruiert wäre. Allerdings gibt es noch einen weiteren, gewichtigeren Grund, den Torus zu studieren. Im Abschnitt 1.5 sahen wir, daß das Verhalten der Nulllinien auf dem Torus vielfältiger als auf einfach zusammenhängenden Lorentz-Flächen ist. Eine mögliche Abhängigkeit zwischen Existenz und Eigenschaften von harmonischen Spinoren bzw. Twistor-Spinoren und denen von Nulllinien sollte auf dem Torus leichter zu erkennen sein.

Der flache Torus In diesem Abschnitt betrachten wir den Standard-Torus T^2 als kompakte Lie-Gruppe mit linksinvarianter pseudoriemannscher Metrik. Dann können wir die harmonische bzw. Twistor-Gleichung bezüglich der vier Spin-Strukturen mit Hilfe darstellungstheoretischer Methoden, wie sie von H.Baum in [Ba81] eingeführt wurden, untersuchen. Wir stellen die hier verwendete Methode kurz vor; für eine eingehendere Betrachtung siehe die Abschnitte 2.4, 2.5.1, 3.2.1 und 3.2.2 in [Ba81]. Das Grundproblem besteht darin, die zu zwei nicht-äquivalenten Spin-Strukturen (Q_1, f_1) und (Q_2, f_2) über $(M^{p,q}, g)$ gehörigen Dirac-Operatoren D_1 und D_2 miteinander zu vergleichen. Dazu führt man den Begriff der *Deformation* zweier Spin-Strukturen ein. Sei $pr_1 : G(p, q) \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow G(p, q)$ die Projektion auf die erste Komponente. Man ordnet den Spin-Strukturen (Q_1, f_1) und (Q_2, f_2) auf kanonische Weise eine pr_1 -Reduktion des Repèrebündels P zu: Wir betrachten

$$R' = \{(y_1, y_2) \in Q_1 \times Q_2 \mid f_1(y_1) = f_2(y_2)\}$$

mit der \mathbb{Z}_2 -Wirkung $(y_1, y_2) \cdot (-1) := (y_1 \cdot (-1), y_2 \cdot (-1))$. Das Paar (R, μ) definiert durch

$$R := R'/\mathbb{Z}_2$$

und

$$\mu : R \rightarrow P, [y_1, y_2] \mapsto f_1(y_1) = f_2(y_2)$$

heißt *Deformation von (Q_1, f_1) und (Q_2, f_2)* . $G(p, q) \times \mathbb{Z}_2$ wirkt auf R durch $[y_1, y_2] \cdot (a, z) := [y_1 \tilde{a}, y_2 \tilde{a}z]$ (wobei $\lambda(\tilde{a}) = a$), und man kann R als $G(p, q) \times \mathbb{Z}_2$ Hauptfaserbündel über M auffassen. Wir betrachten ferner die zweifache Überlagerung $\hat{\mu} : R/G(p, q) \rightarrow P/G(p, q) \cong M$ und das komplexe Linienbündel

$$E^{\mathbb{C}} := R/G(p, q) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{C}$$

über M . Seien $\tilde{s}_i : U \rightarrow Q_i$ zwei lokale Schnitte mit $f \circ \tilde{s}_i = s$, und sei $[\tilde{s}] := [(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)] : u \rightarrow R$, wobei $[\]$ die Äquivalenzklasse in R bezeichnet. Ist $e \in E^{\mathbb{C}}$, so können wir $e = [(\tilde{s}, z)]$ schreiben (hier bezeichnet $\{ \}$ die Äquivalenzklasse in $R/G(p, q)$). Dann gilt der

3.4.13 SATZ. Die Abbildung $\beta : S_1 \otimes E^{\mathbb{C}} \rightarrow S_2$ definiert durch

$$\beta([\tilde{s}_1, v]_x \otimes [(\tilde{s}, z)]_x) = [\tilde{s}_2, zv]_x$$

ist ein Vektorbündel-Isomorphismus. Insbesondere sind S_1 und S_2 isomorph, falls $E^{\mathbb{C}}$ trivial ist.

Beweis. Siehe [Ba81], Satz 3.5. ■

3.4.14 KOROLLAR. Alle Spin-Bündel einer zeitorientierten Lorentz-Fläche sind isomorph.

Beweis. $H^2(M, \mathbb{Z})$ besitzt keine 2-Torsionen und daher ist $E^{\mathbb{C}}$ trivial (vgl. Satz 3.7 aus [Ba81] oder die Argumentation aus 3.1.35 (ii)). ■

Den Levi-Civita-Zusammenhang auf P können wir zu einem Zusammenhang auf R liften, der wiederum eine kovariante Ableitung $\nabla^{E^{\mathbb{C}}}$ auf $E^{\mathbb{C}}$ induziert. Man kann zeigen, daß $\nabla^{E^{\mathbb{C}}}$ flach ist, woraus für $\eta = [(\tilde{s}, z)] \in \Gamma(E^{\mathbb{C}}|_U)$ mit $z : U \rightarrow \mathbb{C}$ die Ableitung $\nabla_X^{E^{\mathbb{C}}} \eta = [(\tilde{s}, X(\eta))]$ folgt. Dann können wir die Spinor-Ableitungen ∇^{S_1} und ∇^{S_2} wie folgt vergleichen:

3.4.15 SATZ. Seien ∇^{S_1} und ∇^{S_2} die Spinor-Ableitungen bezüglich der Spin-Strukturen S_1 und S_2 . Dann kommutiert für alle $Z \in \mathfrak{X}(M^{p+q})$:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(S_1 \otimes E^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(S_2) \\ \nabla_Z^{S_1} \otimes \nabla_Z^{E^{\mathbb{C}}} 1 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \nabla_Z^{S_2} \\ \Gamma(S_1 \otimes E^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(S_2) \end{array}$$

wobei $\nabla_Z^{S_1} \otimes \nabla_Z^{E^{\mathbb{C}}} 1(\varphi \otimes \eta) = \nabla_Z^{S_1} \varphi \otimes \eta + \varphi \otimes \nabla_Z^{E^{\mathbb{C}}} \eta$.

Beweis. Sei $\varphi \otimes e \in \Gamma(S_1 \otimes E^{\mathbb{C}})$. Sei lokal $\varphi \otimes e|_U = [\tilde{s}_1, \bar{\varphi}] \otimes [\tilde{s}, z]$ wobei $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla_Z^{S_2} \beta([\tilde{s}_1, \bar{\varphi}] \otimes [(\tilde{s}, z)]) &= \nabla_Z^{S_2}([\tilde{s}_2, z\bar{\varphi}]) \\ &= [\tilde{s}_2, Z(z)\bar{\varphi} + zZ(\bar{\varphi})] + \frac{1}{2}z \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j g(\nabla_Z^{LC} s_i, s_j) s_i \cdot s_j \cdot \bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
\beta \circ \nabla_Z^{S_1} \otimes_{\nabla_Z^{E^{\mathbb{C}}}} 1([\tilde{s}_1, \bar{\varphi}] \otimes [\{\tilde{s}\}, z]) &= \beta([\tilde{s}_1, Z(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j g(\nabla_Z^{LC} s_i, s_j) s_i \cdot s_j \cdot \bar{\varphi}] \\
&\quad \otimes [\{\tilde{s}\}, z] + [\tilde{s}_1, \bar{\varphi}] \otimes [\{\tilde{s}\}, Z(z)]) \\
&= [\tilde{s}_2, Z(z)\bar{\varphi} + zZ(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2} z \sum_{i < j} \epsilon_i \epsilon_j g(\nabla_Z^{LC} s_i, s_j) s_i \cdot s_j \cdot \bar{\varphi}].
\end{aligned}$$

Dies ergibt die Behauptung. ■

3.4.16 Falls $E^{\mathbb{C}}$ trivial ist, können wir einen nirgends verschwindenden Schnitt $e : M^{p+q} \rightarrow E^{\mathbb{C}}$ wählen. Wir definieren die komplexwertige Form ω_e durch die Gleichung $\nabla_Z^{E^{\mathbb{C}}} e = \omega_e(Z)e$ und $\alpha_e : \Gamma(S_1) \rightarrow \Gamma(S_1 \otimes E^{\mathbb{C}})$ durch $\alpha_e(\varphi)(x) = \varphi_x \otimes e_x$. Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma(S_1) & \xrightarrow{\alpha_e} & \Gamma(S_1 \otimes E^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(S_2) \\
\downarrow \nabla_Z^{S_1} + \omega_e(Z) & & \downarrow \circ \nabla_Z^S \otimes_{\nabla_Z^{E^{\mathbb{C}}}} 1 & & \downarrow \nabla_Z^{S_2} \\
\Gamma(S_1) & \xrightarrow{\alpha_e} & \Gamma(S_1 \otimes E^{\mathbb{C}}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(S_2)
\end{array}$$

Wir betrachten nun den uns interessierenden Fall einer zusammenhängenden Lie-Gruppen mit linksinvarianter Metrik (G, g) . Wir beschreiben zuerst die auftretenden Spin-Strukturen: Sei (\tilde{G}, \tilde{g}) die universelle Überlagerung von (G, g) mit der Überlagerungsabbildung $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$. Dann wirkt $\pi_1(G) = \pi_1(G, e)$ als Gruppe von Decktransformationen auf \tilde{G} . Aufgrund der Linksinvarianz der Metrik ist das Repèrebündel trivial, d.h. $P \cong G \times SO_+(p, q)$. Wir fixieren ein $\chi \in \text{Hom}(\pi_1(G), \mathbb{Z}_2)$ und definieren eine Wirkung von $\pi_1(G)$ auf $\tilde{G} \times Spin_+(p, q)$ durch

$$[\alpha] \cdot (\tilde{x}, a) := ([\alpha] \cdot \tilde{x}, \chi([\alpha]) a)$$

für $[\alpha] \in \pi_1(G)$, $\tilde{x} \in \tilde{G}$, und $a \in Spin_+(p, q)$. Sei $\tilde{G} \times_{\chi} Spin_+(p, q) := \tilde{G} \times Spin_+(p, q) / \chi$ der Quotient aus $\tilde{G} \times Spin_+(p, q)$ über der durch χ definierten Wirkung. Sei

$$Q_{\chi} := (\tilde{G} \times_{\chi} Spin_+(p, q), \pi \circ pr_1, G)$$

und

$$f_{\chi} := (\pi, \lambda) : Q_{\chi} \rightarrow P.$$

Dann gilt der

3.4.17 SATZ (Baum '81). Für eine zusammenhängende Lie-Gruppe G mit linksinvarianter Metrik g sind die Spin-Strukturen durch

$$\text{Spin}(G, g) = \{(Q_\chi, f_\chi) \mid \chi \in \text{Hom}(\pi_1(G, e), \mathbb{Z}_2)\}$$

gegeben. Weiterhin gilt: Fixieren wir auf (G, g) die triviale Spin-Struktur, so entspricht die durch (Q_χ, f_χ) ausgezeichnete Kohomologiekategorie in $H^1(G, \mathbb{Z}_2)$ unter der Identifikation mit $\text{Hom}(\pi_1(G), \mathbb{Z}_2)$ dem Homomorphismus χ .

Beweis. Siehe [Ba81], Satz 2.9. ■

Sei nun ein nirgendsverschwindender Schnitt $e_\chi \in \Gamma(E^\mathbb{C})$ gegeben. Ein solcher Schnitt wird durch eine nullstellenfreie Funktion $\epsilon_\chi : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert, welche $\epsilon(\omega \cdot \tilde{g}) = \chi(\omega)\epsilon(\tilde{g})$ erfüllt. Falls $\epsilon_1 \equiv 1$ für $\chi \equiv 1$ gilt, so können wir S_1 mit der trivialen Spin-Struktur identifizieren und $\Gamma(S_1)$ mit $C^\infty(G, \Delta_{p+q})$. Sei (g, Id) ein globaler Schnitt in $P \cong G \times SO_+(p, q)$ und sei $[\tilde{g}, \mathbf{1}] : U \rightarrow Q_\chi$ ein lokaler Lift dieses Schnittes. Dann entspricht $\gamma(x) = [\{\tilde{g}(x)\}, \mathbf{1}] \in \Gamma(E_{|U}^\mathbb{C})$ diesem Schnitt und $e_\chi(x) = [\{\tilde{g}(x)\}, \epsilon_\chi(\tilde{g}(x))] = \epsilon_\chi(\tilde{g}(x))\gamma(x)$. Wegen $\nabla^{E^\mathbb{C}}\gamma = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla_{Z^*}^{E^\mathbb{C}} e_\chi &= (d\epsilon_\chi)(Z^*)\gamma \\ &= \epsilon_\chi^{-1}(d\epsilon_\chi)(Z^*)e_\chi, \end{aligned}$$

und somit

$$\omega_\chi(Z) = \epsilon_\chi^{-1}Z^*(\epsilon_\chi),$$

wobei Z^* die Hebung von $Z \in \mathfrak{X}(G)$ nach Q_χ bezeichnet.

Identifizieren von $\Gamma(S_\chi)$ mit $\Gamma(S_1) = C^\infty(G, \Delta_{p+q})$ ergibt schließlich:

3.4.18 SATZ. Sei G eine Liesche Gruppe derart, daß $\pi_1(G)$ keine 2-Torsionen besitzt. Ist $\chi \in \text{Hom}(\pi_1(G), \mathbb{Z}_2)$ und $\epsilon_\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nirgends verschwindende Abbildung mit $\epsilon_\chi([\alpha]g) = \chi([\alpha])\epsilon_\chi(g)$ für $[\alpha] \in \pi_1(G)$, so gilt unter obigen Identifikationen

$$\nabla_{Z^*}^{S_\chi}\varphi = \nabla_{Z^*}^{S_1}\varphi + \epsilon_\chi^{-1}Z^*(\epsilon_\chi)\varphi$$

für $\varphi \in C^\infty(G, \Delta_{p+q})$.

3.4.19 Wir betrachten den Lorentz-Torus (T^{1+1}, g_λ) . Die universelle Überlagerung wird durch $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^{1+1}$, $p(x_1, x_2) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2})$ gegeben. $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ wirkt auf \mathbb{R}^2 durch $(z_1, z_2) \cdot (x_1, x_2) = (x_1 + z_1, x_2 + z_2)$. Andererseits kann $\text{Hom}(\pi_1(T), \mathbb{Z}_2)$ mit $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in \{\pm 1\}\}$ durch $\chi_1 = \chi(1 \oplus 0) = e^{\frac{i\pi}{2}(1-a_1)}$ und $\chi_2 = \chi(0 \oplus 1) = e^{\frac{i\pi}{2}(1-a_2)}$ identifiziert werden. Wir definieren

$$\epsilon_a(x_1, x_2) = e^{\frac{i\pi}{2}(x_1(1-a_1) + x_2(1-a_2))}.$$

Dann ist $\epsilon_{(1,1)} \equiv 1$ und $\epsilon_\chi((z_1, z_2) \cdot (x_1, x_2)) = \chi_1^{z_1} \chi_2^{z_2} \epsilon_\chi(x_1, x_2) = \chi(z_1, z_2) \epsilon_\chi(x_1, x_2)$. Nun $\omega_\chi(X_s)(x) = \epsilon_\chi^{-1}((s_1 + s_2)^*)(\epsilon_\chi)(\tilde{x})$, also

$$\omega_\chi(X_s)(x) = \frac{i\pi}{2} \left(\frac{1-a_1}{\lambda_1} + \frac{1-a_2}{\lambda_2} \right).$$

Somit ist ein Spinor $\tilde{f}u_1 \in \Gamma(S_{(a_1, a_2)}^+) \cong C^\infty(T^{1+1}, \mathbb{C}u_1)$ genau dann harmonisch, falls folgende Gleichung erfüllt wird:

$$\nabla_X^{S_1} \tilde{f} + \omega(X)\tilde{f} = \frac{1}{\lambda_1} \partial_{x_1} \tilde{f} + \frac{1}{\lambda_2} \partial_{x_2} \tilde{f} + \frac{i\pi}{2} \left(\frac{1-a_1}{\lambda_1} + \frac{1-a_2}{\lambda_2} \right) \tilde{f} = 0.$$

Sei die Fourier-Entwicklung von \tilde{f} durch $\tilde{f}(x_1, x_2) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{kl} e^{2\pi i(kx_1 + lx_2)}$ gegeben. Dann erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \tilde{f}_{kl} \left(\frac{4k - a_1 + 1}{\lambda_1} + \frac{4l - a_2 + 1}{\lambda_2} \right) e^{2\pi i(kx_1 + lx_2)} = 0.$$

Also definiert $\tilde{f} \in C^\infty(T^{1+1}, \mathbb{C})$ einen harmonischen Spinor dann und nur dann, wenn

$$\tilde{f}_{kl} = 0 \text{ or } 4k - a_1 + 1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} (4l - a_2 + 1).$$

Da $4k - a_1 + 1$ und $4l - a_2 + 1$ aus \mathbb{Z} sind, und konstante Funktionen stets Lösungen für die triviale Spin-Struktur sind, erhalten wir folgenden

3.4.20 SATZ. Sei $\sigma_\lambda := \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Dann gilt:

| $S_{(a_1, a_2)}$ | δ_+ for | $\sigma_\lambda \in \mathbb{Q}$ | $\sigma_\lambda \notin \mathbb{Q}$ |
|------------------|----------------|---------------------------------|------------------------------------|
| (+1, +1) | | $+\infty$ | 1 |
| (+1, -1) | | $+\infty$ | 0 |
| (-1, +1) | | $+\infty$ | 0 |
| (-1, -1) | | $+\infty$ | 0 |

Analoge Resultate gelten für δ_-, τ_+ und τ_- .

Nun wird ein \mathcal{X} -Vektorfeld durch $X = \partial_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \partial_2$ gegeben (man betrachte das isotrope Vektorfeld $\partial_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \partial_2$ und wende 2.3.8 an). Der Fluß von X auf T^2 durch $a = (a_1, a_2)$ ist die Projektion der Geraden $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} t + a$. Wie in 2.7.5 dargelegt, ist das Bild der Projektion geschlossen bzw. dicht genau dann, wenn σ_λ aus \mathbb{Q} bzw. nicht aus \mathbb{Q} ist. Da die Wahl eines anderen \mathcal{X} -Vektorfeldes lediglich die Parametrisierung des Flußes ändert, erhalten wir abschliessend als

3.4.21 KOROLLAR.

(i) $\delta_+ = +\infty$ genau dann, falls alle \mathcal{X} -Linien geschlossen sind.

(ii) $\delta_+ \leq 1$ genau dann, falls alle \mathcal{X} -Linien dicht liegen.

Analytische Methoden Die darstellungstheoretischen Methoden aus dem ersten Abschnitt geben bereits einen ersten Anhaltspunkt für die Beziehung zwischen Nulllinien und der Dimension der harmonischen Spinoren. Jetzt wollen wir eine allgemeinere Familie von Metriken bezüglich der trivialen Spin-Struktur untersuchen, in dem wir — wie bei den Minkowski-Flächen — die Spinorableitung nach der Wahl geeigneter Koordinaten berechnen und die harmonische Gleichung auf eine partielle Differentialgleichung zurückführen. Analoge Betrachtungen können wir auch für die Twistor-Gleichung anstellen. Dabei werden wir versuchen, diese Gleichungen mit den Lösungen der isotropen Flußgleichungen, also den Nulllinien, in Verbindung zu bringen.

Wie bereits bemerkt stellt der Torus — modulo Diffeomorphismus — die einzige kompakte Lorentz-Fläche dar. Wir können uns daher auf die Betrachtung des Standard-Torus $T^2 = \mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2)$ (wobei (e_1, e_2) die kanonische Basis des \mathbb{R}^2 ist) mit zurückgezogener Metrik beschränken. Dazu heben wir die Untersuchung in den \mathbb{R}^2 und arbeiten mit doppelt-periodischen Funktionen, d.h. wir betrachten \mathbb{R}^2 mit einer Lorentz-Metrik

$$h = \begin{pmatrix} a(x_1, x_2) & b(x_1, x_2) \\ b(x_1, x_2) & c(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

wobei a, b und c Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}^2} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \mid f(x_1 + n, x_2 + m) = f(x_1, x_2) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z}\}$ sind. Modulo konformer Änderung dürfen wir sogar $b(x_1, x_2) \equiv 1$ annehmen, da wir ja lediglich an konformen Invarianten interessiert sind. In gleichem Sinne interpretieren wir $C^\infty(T^2, \mathbb{C}^2)$ als $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}^2}$. Dann können wir $\Gamma(S) \cong C^\infty(T^2, \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}^2}$ mit $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}^2}$ gleichsetzen, wobei wir den Spinor $\varphi = \varphi^+ u_1 + \varphi^- u_{-1}$ wieder auf $\begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}$ abbilden. Wir betrachten nun Metriken, die bezüglich der globalen Standardbasis $(e_1, e_2) = (\partial_1, \partial_2)$ durch

$$g_\lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1^2(x_1, x_2) & 0 \\ 0 & \lambda_2^2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\infty(T^2, \mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})^{\mathbb{Z}^2}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ gegeben werden. Die Wahl dieser Familie ist durch zwei Gesichtspunkte motiviert: Erstens induziert das Koordinatensystem (e_1, e_2) die globale Orthonormalbasis

$$s_1 := \frac{e_1}{\lambda_1} \text{ und } s_2 := \frac{e_2}{\lambda_2};$$

somit erhalten wir in Hinblick auf 3.4.8 eine globale Charakterisierung von harmonischen Spinoren und Twistor-Spinoren durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Zweitens ist diese Beispielfamilie umfangreich genug, um auch nicht global konform flache Metriken zu enthalten:

3.4.22 BEISPIEL. In [RoSá93] betrachten die Autoren die Metriken

$$g_{0(x_1, x_2)} = dx_1^2 - e^{2(1-\cos(x_1-x_2))} dx_2^2$$

und

$$g_{1(x_1, x_2)} = dx_1^2 - e^{2\sin(x_1-x_2)} dx_2^2$$

auf dem Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$, und zeigen deren Unvollständigkeit. Also ist nach 2.4.23 weder (T^2, g_0) noch (T^2, g_1) konform flach. Hingegen wäre die Wahl der Beispielklasse

$$g_\lambda = -\lambda_1^2(x_i) dx_1^2 + \lambda_2^2(x_i) dx_2^2$$

für $i \in \{1, 2\}$ zu restriktiv, denn ∂_j für $i \neq j \in \{1, 2\}$ wäre ein nullstellenfreies, nicht isotropes Killing-Vektorfeld, woraus die konforme Flachheit von g_λ wegen 2.4.26 folgte.

Sei auf T^2 die triviale Spin-Struktur (Q_0, f_0) fixiert. Wir betrachten unter den genannten Identifizierungen den Dirac- bzw. Twistoperator

$$D \text{ bzw. } P : C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}^2}.$$

Dann gilt der

3.4.23 SATZ. *Unter obigen Trivialisierungen gilt:*

(i) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}$ ist ein harmonischer Spinor genau dann, wenn

$$-\lambda_2 \partial_1 \varphi^+ = \lambda_1 \partial_2 \varphi^+ + \frac{1}{2} \varphi^+ (\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2)$$

$$\lambda_2 \partial_1 \varphi^- = \lambda_1 \partial_2 \varphi^- + \frac{1}{2} \varphi^- (\partial_2 \lambda_1 - \partial_1 \lambda_2)$$

(ii) $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}$ ist ein Twistor-Spinor genau dann, wenn

$$\lambda_2 \partial_1 \varphi^+ = \lambda_1 \partial_2 \varphi^+ + \frac{1}{2} \varphi^+ (-\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2)$$

$$\lambda_2 \partial_1 \varphi^- = -\lambda_1 \partial_2 \varphi^- + \frac{1}{2} \varphi^- (\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2)$$

Beweis. Zuerst berechnen wir die Spinorableitung gemäß 3.4.9 und wenden dann 3.4.8 an. Nach Definition ist $s_j \cdot \varphi = s_j \cdot (\varphi^+ u_1 + \varphi^- u_{-1})$ für $\varphi \in \Gamma(S)$; also folgt aus den obigen Realisierungen

$$s_1 \cdot s_2 \cdot \varphi = \omega \cdot \varphi = -\varphi^+ u_1 + \varphi^- u_{-1}.$$

Für die Komponenten der Zusammenhangsform gilt nach 3.4.9:

$$G_1 := g(\nabla_{s_1}^{LC} s_1, s_2) = g(s_1, [s_2, s_1])$$

und

$$G_2 := g(\nabla_{s_2}^{LC} s_1, s_2) = g(s_2, [s_2, s_1]).$$

Einsetzen von $s_i := \frac{e_i}{\lambda_i}$ ergibt

$$G_i = g(s_i, [s_2, s_1]) = g\left(\frac{e_i}{\lambda_i}, \left[\frac{e_2}{\lambda_2}, \frac{e_1}{\lambda_1}\right]\right) = g\left(\frac{e_i}{\lambda_i}, \frac{1}{\lambda_2} \partial_2 \left(\frac{1}{\lambda_1}\right) e_1 - \frac{1}{\lambda_1} \partial_1 \left(\frac{1}{\lambda_2}\right) e_2\right),$$

d.h.

$$G_1 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \partial_2 \lambda_1 \quad \text{und} \quad G_2 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \partial_1 \lambda_2 \quad (*).$$

Also haben wir

$$\nabla_{s_i}^S \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_i} \begin{pmatrix} \partial_i \varphi^+ \\ \partial_i \varphi^- \end{pmatrix} - \frac{1}{2} G_i \begin{pmatrix} -\varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}.$$

Der Spinor $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} \in C^\infty(T^2, \mathbb{C})$ erfüllt also nach 3.4.8 die Dirac- bzw. Twistor-Gleichung genau dann, falls

$$s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = \pm s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$$

bzw.

$$\nabla_{s_1}^S \varphi = \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$$

gilt. Damit erhalten wir für harmonische Spinoren die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} \partial_1 \varphi^+ + \frac{1}{2} G_1 \varphi^+ &= -\frac{1}{\lambda_2} \partial_2 \varphi^+ - \frac{1}{2} G_2 \varphi^+ \\ \frac{1}{\lambda_1} \partial_1 \varphi^- - \frac{1}{2} G_1 \varphi^- &= \frac{1}{\lambda_2} \partial_2 \varphi^- - \frac{1}{2} G_2 \varphi^- \end{aligned}$$

und für Twistor-Spinoren

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1} \partial_1 \varphi^+ + \frac{1}{2} G_1 \varphi^+ &= \frac{1}{\lambda_2} \partial_2 \varphi^+ + \frac{1}{2} G_2 \varphi^+ \\ \frac{1}{\lambda_1} \partial_1 \varphi^- - \frac{1}{2} G_1 \varphi^- &= -\frac{1}{\lambda_2} \partial_2 \varphi^- + \frac{1}{2} G_2 \varphi^-. \end{aligned}$$

Schließlich ergibt Einsetzen von (*) für harmonische Spinoren

$$\begin{aligned} -\lambda_2 \partial_1 \varphi^+ &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^+ + \frac{1}{2} \varphi^+ (\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2) \\ \lambda_2 \partial_1 \varphi^- &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^- + \frac{1}{2} \varphi^- (\partial_2 \lambda_1 - \partial_1 \lambda_2) \end{aligned}$$

und für Twistor-Spinoren

$$\begin{aligned} \lambda_2 \partial_1 \varphi^+ &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^+ + \frac{1}{2} \varphi^+ (-\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2) \\ \lambda_2 \partial_1 \varphi^- &= -\lambda_1 \partial_2 \varphi^- + \frac{1}{2} \varphi^- (\partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2). \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. ■

Wir haben also die Frage, ob 0 aus $\text{spec}_P(D)$ bzw. $\text{spec}_P(P)$ ist, in ein analytisches Problem in Form einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit periodischen Koeffizienten übersetzt. Der indefinite Charakter der Lorentz-Metrik drückt sich in der Hyperbolizität der Gleichung aus. Um die Gleichungen aus 3.4.23 zu vereinfachen, machen wir folgende, *zusätzliche* ad-hoc-Annahme:

$$(\partial_+) \quad \partial_2 \lambda_1 + \partial_1 \lambda_2 = 0 \iff \begin{aligned} -\lambda_1(x_1, x_2) + \lambda_1(x_1, 0) &= \int_0^{x_2} \partial_1 \lambda_2(x_1, t) dt \\ -\lambda_2(x_1, x_2) + \lambda_2(0, x_2) &= \int_0^{x_1} \partial_2 \lambda_1(s, x_2) ds \end{aligned}$$

bzw.

$$(\partial_-) \quad \partial_2 \lambda_1 - \partial_1 \lambda_2 = 0 \iff \begin{aligned} \lambda_1(x_1, x_2) - \lambda_1(x_1, 0) &= \int_0^{x_2} \partial_1 \lambda_2(x_1, t) dt \\ \lambda_2(x_1, x_2) - \lambda_2(0, x_2) &= \int_0^{x_1} \partial_2 \lambda_1(s, x_2) ds \end{aligned}$$

Die Differentialform

$$\lambda_{\pm} := \lambda_1 dx_1 \mp \lambda_2 dx_2$$

ist also unter der Voraussetzung (∂_{\pm}) geschlossen. Eine Diagonalmetrik g_{λ} , für die (∂_+) bzw. (∂_-) gilt, nennen wir folglich *positiv* bzw. *negativ geschlossene Diagonalmetrik*. Zwei natürliche Fragen drängen sich auf:

- Existieren nicht global konform flache Beispiele innerhalb dieser kleineren Familie von Metriken?
- Läßt sich eine geometrische Interpretation dieser Annahme geben?

Die erste Frage werden wir in 3.4.32 positiv beantworten. Die Diskussion des zweiten Punktes stellen wir bis 3.4.53 (i) zurück.

3.4.24 BEMERKUNG. Wir erinnern daran, daß man jede doppelt periodische Funktion nach der Fourierbasis $\{e^{2\pi i(kx_1+lx_2)} \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$ entwickeln kann (siehe z.B. [Ta96], Abschnitt 3.1). Da im folgenden alle Summen uniform konvergieren bzw. die Ableitungen der λ_i wieder integrierbar sind (da diese stetig sind und der Torus kompakt ist), vertauschen \int , ∂ und \sum .

Für geschlossene Metriken gilt insbesondere folgendes

3.4.25 LEMMA. *Ist h eine positiv bzw. negativ geschlossene Diagonalmetrik, und sind $\lambda_{1_{kl}}$ bzw. $\lambda_{2_{kl}}$ die Fourierkoeffizienten von λ_1 bzw. λ_2 , so folgt*

$$l\lambda_{1_{kl}} = \mp k\lambda_{2_{kl}} \text{ und } \lambda_{1_{0l}} = 0 = \lambda_{2_{k0}}$$

für $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, wobei \mp unter der Voraussetzung (∂_{\pm}) gilt.

Beweis. Es gilt

$$\partial_2 \lambda_1 = 2\pi i \left(\sum_{k, l \neq 0} l \lambda_{1_{kl}} e^{2\pi i(kx_1+lx_2)} + \sum_{l \neq 0} l \lambda_{1_{0l}} e^{2\pi i l x_2} \right)$$

und

$$\partial_1 \lambda_2 = 2\pi i \left(\sum_{k, l \neq 0} k \lambda_{2_{kl}} e^{2\pi i(kx_1+lx_2)} + \sum_{k \neq 0} k \lambda_{2_{k0}} e^{2\pi i k x_1} \right).$$

Unter der Voraussetzung (∂_{\pm}) ist $\partial_2 \lambda_1 \pm \partial_1 \lambda_2 = 0$, woraus

$$\sum_{k, l \neq 0} (l \lambda_{1_{kl}} \pm k \lambda_{2_{kl}}) e^{2\pi i(kx_1+lx_2)} + \sum_{l \neq 0} l \lambda_{1_{0l}} e^{2\pi i l x_2} \pm \sum_{k \neq 0} k \lambda_{2_{k0}} e^{2\pi i k x_1} = 0$$

folgt. Ein Koeffizientenvergleich ergibt die Behauptung. ■

3.4.23 legt nahe, wie in 3.4.10, die positiven und negativen Spinoren getrennt zu behandeln, um statt zweier Gleichungen nur eine Gleichung zu untersuchen (die zweite Gleichung wird dann durch $\varphi^- \equiv 0$ bzw. $\varphi^+ \equiv 0$ gelöst). Dabei betrachten wir stets eine geschlossene Diagonalmetrik derart, daß der Zusatzterm wegfällt, d.h. im Falle von positiven harmonischen Spinoren und negativen Twistor-Spinoren betrachten wir positive, und für negative harmonische Spinoren und positive Twistor-Spinoren negative geschlossene Diagonalmetriken. Unter dieser jeweiligen Voraussetzung ist dann die harmonische Gleichung äquivalent zu

$$(HG) \quad \begin{aligned} -\lambda_2 \partial_1 \varphi^+ &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^+ \text{ für } \varphi^+ \in \Gamma(S^+) \cong C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}^2} \text{ und } (\partial_+) \\ \lambda_2 \partial_1 \varphi^- &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^- \text{ für } \varphi^- \in \Gamma(S^-) \cong C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}^2} \text{ und } (\partial_-) \end{aligned}$$

und die Twistor-Gleichung zu

$$(TG) \quad \begin{aligned} -\lambda_2 \partial_1 \varphi^- &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^- \text{ für } \varphi^- \in \Gamma(S^-) \cong C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}^2} \text{ und } (\partial_-) \\ \lambda_2 \partial_1 \varphi^+ &= \lambda_1 \partial_2 \varphi^+ \text{ für } \varphi^+ \in \Gamma(S^+) \cong C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}^2} \text{ und } (\partial_+) \end{aligned}$$

Wegen dem

3.4.26 SATZ. Sei h_λ eine negative bzw. positive geschlossene Diagonalmetrik. Dann sind \mathfrak{H}_+ und \mathfrak{T}_- bzw. \mathfrak{H}_- und \mathfrak{T}_+ isomorph.

Beweis. Die Abbildungen

$$T_{+-} : \mathfrak{H}_+ \rightarrow \mathfrak{T}_-, \varphi^+ u_1 \mapsto \varphi^+ u_{-1}$$

und

$$T_{-+} : \mathfrak{H}_- \rightarrow \mathfrak{T}_+, \varphi^- u_{-1} \mapsto \varphi^- u_1$$

sind offensichtlich zueinander inverse Vektorraum-Isomorphismen. ■

können wir uns auf die Untersuchung der harmonischen Gleichung –unter der jeweiligen Voraussetzung (∂_\pm) – beschränken.

3.4.27 DEFINITION. Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\varphi_\alpha^+(x_1, x_2) := e^{\pi i \alpha \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds - \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)}$$

und

$$\varphi_\alpha^-(x_1, x_2) := e^{\pi i \alpha \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds + \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)}.$$

Sei

$$l_i := \lambda_{i00} = \iint_{T^2} \lambda_i dT^2$$

der nullte Fourierkoeffizient von λ_i , $i = 1, 2$. Da $\lambda_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R} \setminus \{0\})^{\mathbb{Z}^2}$, gilt $l_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.4.28 LEMMA. $\varphi_\alpha^\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}^2}$ genau dann, wenn $\alpha l_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2$ ist.

Beweis. Wir müssen zeigen: φ_α^\pm ist periodisch, d.h. $\varphi_\alpha^\pm(x_1 + n, x_2 + m) = \varphi_\alpha^\pm(x_1, x_2)$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $\alpha l_i \in \mathbb{Z}$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^\pm(x_1 + n, x_2 + m) &= e^{\pi i \alpha \left(\int_0^{x_1+n} (\lambda_1(s, x_2+m) + \lambda_1(s, 0)) ds \mp \int_0^{x_2+m} (\lambda_2(x_1+n, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)} \\ &= e^{\pi i \alpha \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds \mp \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)} \\ &\quad \cdot e^{\pi i \alpha \left(n \int_0^1 (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds \mp m \int_0^1 (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)} \\ &= \varphi_\alpha^\pm(x_1, x_2) \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$(*) \quad \alpha \left(n \int_0^1 (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds \mp m \int_0^1 (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right) \in 2\mathbb{Z}$$

ist. Weil der Ausdruck in den Klammern stetig ist, hängt er nicht von x_1 und x_2 ab und $(*)$ ist äquivalent zu

$$2\alpha \left(n \int_0^1 \lambda_1(s, 0) ds \mp m \int_0^1 \lambda_2(0, t) dt \right) = \text{const}(n, m) \in 2\mathbb{Z}.$$

Wegen $\lambda_j(s, t) = \sum_{k,l} \lambda_{jkl} e^{2\pi i(ks+lt)}$ gilt

$$\int_0^1 \lambda_1(s, 0) ds = \int_0^1 \sum_{k,l} \lambda_{1kl} e^{2\pi iks} ds = \sum_l \lambda_{10l} \stackrel{3.4.25}{=} \lambda_{100} = l_1$$

und

$$\int_0^1 \lambda_2(0, t) dt = \int_0^1 \sum_{k,l} \lambda_{2kl} e^{2\pi ilt} dt = \sum_k \lambda_{2k0} \stackrel{3.4.25}{=} \lambda_{200} = l_2.$$

Also ist $\varphi_\alpha^\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^{\mathbb{Z}^2}$ genau dann, wenn $\alpha(nl_1 + ml_2) \in \mathbb{Z}$ für alle n und m ist. Dies ist offenbar äquivalent zu $\alpha l_i \in \mathbb{Z}$ (man betrachte die Spezialfälle $n = 0$ und $m = 0$). ■

3.4.29 SATZ. Gilt $\alpha l_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2$ $(*)$, so ist der Spinor $\overline{\varphi_{l\alpha}^+} = \varphi_{l\alpha}^+ u_1$ bzw. $\underline{\varphi_{l\alpha}^-} = \varphi_{l\alpha}^- u_{-1}$ für $l \in \mathbb{Z}$ und eine geschlossene Diagonal-Metrik mit (∂_+) bzw. (∂_-) harmonisch.

Beweis. Wegen $(*)$ sind $\overline{\varphi_{l\alpha}^+}$ und $\underline{\varphi_{l\alpha}^-}$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)^{\mathbb{Z}^2}$. Berechnen der inneren Ableitung ergibt:

$$\begin{aligned} & \partial_1 \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds \mp \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right) \\ &= \lambda_1(x_1, x_2) + \lambda_1(x_1, 0) \mp \int_0^{x_2} (\partial_1 \lambda_2)(x_1, t) dt \\ &\stackrel{(\partial_\pm)}{=} \lambda_1(x_1, x_2) + \lambda_1(x_1, 0) + \int_0^{x_2} (\partial_2 \lambda_1)(x_1, t) dt \\ &= \lambda_1(x_1, x_2) + \lambda_1(x_1, 0) + \lambda_1(x_1, x_2) - \lambda_1(x_1, 0) = 2\lambda_1(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Genauso findet man

$$\begin{aligned}
& \partial_2 \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds \mp \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right) \\
&= \int_0^{x_1} \partial_2 \lambda_1(s, x_2) ds \mp \lambda_2(x_1, x_2) \mp \lambda_2(0, x_2) \\
&= \mp \int_0^{x_1} \partial_1 \lambda_2(s, x_2) ds \mp \lambda_2(x_1, x_2) \mp \lambda_2(0, x_2) \\
&= \mp \lambda_2(x_1, x_2) \pm \lambda_2(0, x_2) \mp \lambda_2(x_1, x_2) \mp \lambda_2(0, x_2) = \mp 2\lambda_2(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

woraus schließlich

$$\lambda_1(x_1, x_2) \partial_2 \varphi^\pm(x_1, x_2) = \mp 2\pi i \alpha \lambda_1(x_1, x_2) \lambda_2(x_1, x_2) \varphi^\pm(x_1, x_2) = \mp \lambda_2(x_1, x_2) \partial_1 \varphi^\pm(x_1, x_2)$$

folgt. ■

3.4.30 SATZ. *Ist der Spinor $\overline{\varphi_\alpha^\pm}$ harmonisch, so ist die Menge*

$$H := \{\overline{\varphi_{l\alpha}^\pm} \mid l \in \mathbb{Z}\}$$

linear unabhängig. Für $\alpha \neq 0$ gilt daher $\delta_\pm^0 = +\infty$.

Beweis. Wir zeigen den Fall (+) durch Induktion; der Fall (−) wird analog bewiesen. Der einzelne Spinor $\overline{\varphi_\alpha^+}$ ist linear unabhängig, da er überall nicht null ist. Sei die Annahme für Teilmengen der Mächtigkeit $k - 1$ bewiesen. Wir betrachten die Gleichung

$$(*) \quad \sum_{j=1}^k a_j \overline{\varphi_{l_j \alpha}^+} = 0$$

wobei die $a_j \in \mathbb{C}$ und die $l_j \in \mathbb{Z}$ paarweise verschieden sind.

Aus (*) folgt durch Betrachtung der ersten Komponente

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{k-1} a_j \left(e^{\pi i(l_j - l_k) \alpha \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds - \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)} \right) = -a_k$$

Wir differenzieren nach x_1 und erhalten

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_j 2\pi i (l_j - l_k) \alpha \lambda_1 e^{\pi i(l_j - l_k) \alpha \left(\int_0^{x_1} (\lambda_1(s, x_2) + \lambda_1(s, 0)) ds - \int_0^{x_2} (\lambda_2(x_1, t) + \lambda_2(0, t)) dt \right)} = 0,$$

weshalb

$$\sum_{j=1}^{k-1} (2\pi i (l_j - l_k) \alpha \lambda_1(x_1, x_2) a_j) \overline{\varphi_{(l_j - l_k) \alpha}^+} = 0$$

gilt. Aus der Induktionsannahme folgt

$$2\pi i(l_j - l_k)\alpha\lambda_1(x_1, x_2)a_j = 0 \text{ für } j = 1, \dots, k-1$$

Da $l_j - l_k \neq 0$ und $\lambda_1 \neq 0$ nach Voraussetzung sind, ist $a_j = 0$ für $j = 1, \dots, k-1$, und somit $a_k = 0$ wegen (**). ■

Wir definieren $\sigma_\lambda := \frac{l_2}{l_1}$ (offensichtlich finden wir für linksinvariante Diagonalmetriken das σ_λ aus 3.4.21 wieder). Aus 3.4.30 erhalten wir als hinreichende Bedingungen für die Degeneriertheit der Kerne das

3.4.31 KOROLLAR. *Sei g_λ negativ bzw. positiv geschlossen. Ist $\sigma_\lambda \in \mathbb{Q}$, so folgt $\delta_\pm^0 = +\infty$*

Beweis. Ist $\frac{l_1}{l_2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $ggT(p, q) = 1$, so ist nach 3.4.28 der Spinor $\overline{\varphi_\alpha^\pm}$ für $\alpha = \frac{q}{l_2}$ periodisch, da $\alpha l_1 = p$ und $\alpha l_2 = q$ aus \mathbb{Z} sind. Also ist $\delta_\pm^0 = +\infty$ nach 3.4.29. ■

3.4.32 BEISPIELE.

(i) Alle flachen Metriken auf dem Torus sind positive und negative geschlossene Diagonalmetriken. Insbesondere finden wir das Ergebniss von 3.4.20 für die triviale Spin-Struktur wieder.

(ii) Seien $c, d \in \mathbb{R}$ mit $|c|, |d| > 1$ und definiere

$$\lambda_1(x_1, x_2) := \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) + c$$

und

$$\lambda_2(x_1, x_2) := \sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) + d.$$

Dann sind λ_1 und λ_2 niemals null und periodisch, d.h. $g_\lambda = -\lambda_1^2(x_1, x_2)dx_1^2 + \lambda_2^2(x_1, x_2)dx_2^2$ definiert eine Lorentzmetrik auf dem Torus, die außerdem positiv geschlossen ist. Weiterhin gilt:

$$\int_0^1 \lambda_1(s, 0) ds = c$$

und

$$\int_0^1 \lambda_2(0, t) dt = d,$$

Ist also $\frac{l_1}{l_2} = \frac{c}{d} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, so folgt $\delta_+^0 = +\infty$. Ein System linear unabhängiger harmonischer Spinoren ist durch

$$\left\{ e^{\frac{\pi i q l}{d}} \left(\frac{1}{\pi} \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) + 2cx_1 + 2dx_2 \right) u_1 \mid l \in \mathbb{Z} \right\}$$

gegeben.

(iii) $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ wirke kanonisch auf den Komponenten des Torus. Die geschlossenen Diagonalmetriken umfassen dann alle S^1 -invarianten Diagonalmetriken: Sei z.B. g_λ eine Diagonalmetrik der Form

$$g_\lambda = -\lambda_1^2(x_2)dx_1^2 + \lambda_2^2(x_2)dx_2^2.$$

Diese ist konform äquivalent zur Metrik

$$\tilde{g} = \lambda_1^2(x_2)g_\lambda = -dx_1^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_2)\right)^2 dx_2^2,$$

welche offensichtlich positiv und negativ geschlossen ist.

(iv) Alle Metriken der Form

$$g_{\lambda\mu} = -dx_1^2 + \lambda(x_1)\mu(x_2)dx_2^2$$

sind positive und negative geschlossen Diagonalmetriken, denn diese sind konform äquivalent zu

$$-\frac{1}{\lambda(x_1)}dx_1^2 + \mu(x_2)dx_2^2.$$

(v) Wir betrachten die Diagonalmetrik g_λ , die durch

$$\lambda_1(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$$

und

$$\lambda_2(x_1, x_2) = -f(x_1 - x_2) - c$$

gegeben wird. Dabei ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine noch zu bestimmende nullstellenfreie und periodische Funktion und c eine Konstante ungleich 0 so, daß auch λ_2 keine Nullstelle aufweist. Dann ist g_λ geschlossen, denn

$$\partial_2 \lambda_1(x_1, x_2) = -f'(x_1 - x_2) = \partial_1 \lambda_2(x_1, x_2).$$

Weiterhin ist g_λ konform äquivalent zur Metrik

$$g_0 = -dx_1^2 + \left(\frac{-f(x_1 - x_2) - c}{f(x_1 - x_2)}\right)^2 dx_2^2 = -dx_1^2 + \left(1 + \frac{c}{f(x_1 - x_2)}\right)^2 dx_2^2.$$

Wir führen die Koordinatentransformation

$$x = \frac{x_1 - x_2}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

durch, d.h. $x_1 = x + y$ und $x_2 = y - x$. In diesen neuen Koordinaten schreibt sich

$$\begin{aligned} g_0 &= -dx^2 - 2dxdy - dy^2 + \left(1 + \frac{c}{f(2x)}\right)^2 (dy^2 - 2dxdy + dx^2) \\ &= \left(-1 + \left(1 + \frac{c}{f(2x)}\right)^2\right) dx^2 - 2\left(1 + \left(1 + \frac{c}{f(2x)}\right)^2\right) dxdy + \left(-1 + \left(1 + \frac{c}{f(2x)}\right)^2\right) dy^2. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine Metrik aus der in 2.4.14 betrachteten Familie, wobei $-\delta(x) = (-1 + (1 + \frac{c}{f(2x)})^2)$. Besitzt δ keine Nullstellen, so ist g_0 geodätisch vollständig, aber falls δ isolierte Nullstellen aufweist, so ist g_0 raum-, zeit- und lichtartig unvollständig. $\delta(x) = 0$ gilt aber genau dann, falls $1 + \frac{c}{f(2x)} = \pm 1$ gilt, also genau dann, wenn $\frac{c}{f(2x)} = 0$ oder -2 ist (*). Da c ungleich 0 sein soll, kann nur die letzte Möglichkeit in Betracht gezogen werden. Sei z.B.

$$f(x) := \sin(2\pi(x+d)) + c,$$

wobei wir jetzt zusätzlich $c > 1$ fordern (dann hat weder λ_1 noch λ_2 eine Nullstelle, g_λ definiert also eine Lorentz-Metrik). Dann gilt (*) dann und nur dann, wenn $\sin(2\pi(2x+d)) = -\frac{c}{2}$ ist, was für $1 < c < 2$ viermal pro Periode erfüllt wird. Dabei fixieren wir $d = d_0$ so, daß $f(0) = -\frac{c}{2}$ gilt (d.h. $\delta(0) = 0$). Wir folgern, daß g_0 unvollständig ist. Da die Koeffizienten periodisch sind, kann g_0 auf den Torus induziert werden und definiert dort ebenfalls eine unvollständig Metrik. Insbesondere folgt aus 2.4.23, daß (T^2, g_0) nicht global konform flach ist. Weil g_λ konform äquivalent zu g_0 ist, ist also auch g_λ nicht konform flach. Ferner ist $l_1 = c$ und $l_2 = -2c$, d.h. $\frac{l_1}{l_2} = -\frac{1}{2}$. Also existieren für alle $2 > c > 1$ unendlich viele linear unabhängige Lösungen.

Wir wollen nun, wie beim flachen Torus, den Zusammenhang zwischen δ_\pm und dem Verhalten der Nulllinien untersuchen.

3.4.33 SATZ. *Sei g_λ eine positive (bzw. negative) geschlossene Diagonalmetrik. Dann existiert eine geschlossene X - (bzw. Y -) Linie genau dann, wenn $\sigma_\lambda \in \mathbb{Q}$ ist.*

Beweis. Weil es nicht auf die Parametrisierung, sondern lediglich auf die "Form" der Nulllinien ankommt (siehe auch 3.4.21), können wir zur Berechnung der isotropen Flüsse beliebige \mathcal{X} - bzw. \mathcal{Y} -Vektorfelder heranziehen. Nach 2.3.7 ist $Z = Z_1\partial_1 + Z_2\partial_2$ genau dann isotrop, wenn

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

gilt. Nehmen wir o.B.d.A. $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ an, so definieren

$$X := \partial_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\partial_2 \text{ und } Y := \partial_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\partial_2$$

ein \mathcal{X} - bzw. \mathcal{Y} -Vektorfeld. Wir wenden 2.5.28 an; die Annahme aus Abschnitt 2.5.3 ist offensichtlich erfüllt. Aus der Flußgleichung

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \end{pmatrix},$$

wobei + für eine positive und – für eine negative Metrik gelten soll, folgt die *exakte* Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx_1} x_2 = \pm \frac{\lambda_1(x_1, x_2)}{\lambda_2(x_1, x_2)},$$

bzw. die Gleichung

$$\lambda_1(x_1, x_2)dx_1 \mp \lambda_2(x_1, x_2)dx_2 = 0.$$

Ziel ist es, x_2 in Abhängigkeit von x_1 zu bestimmen, um die Rotationszahl auszurechnen. Da diese von der Anfangsbedingung unabhängig ist, können wir z.B. $x_2(0) = 0$ wählen. Gemäß dem Standardverfahren zur Lösung exakter Differentialgleichungen müssen wir eine Stammfunktion F mit $\partial_1 F = \lambda_1(x_1, x_2)$ und $\partial_2 F = \mp \lambda_2(x_1, x_2)$ finden. Integrieren ergibt:

$$F(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \lambda_1(s, x_2) ds + f(x_2),$$

wobei für

$$f'(x_2) = \mp \lambda_2(x_1, x_2) - \partial_2 \int_0^{x_1} \lambda_1(s, x_2) ds \stackrel{(\partial_\pm)}{=} \mp \lambda_2(x_1, x_2) \pm \int_0^{x_1} (\partial_1 \lambda_2)(s, x_2) ds = \mp \lambda_2(0, x_2)$$

gilt. Somit folgt $f(x_2) = \mp \int_0^{x_2} \lambda_2(0, t) dt$, und daraus

$$F(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \lambda_1(s, x_2) ds \mp \int_0^{x_2} \lambda_2(0, t) dt.$$

Um x_2 in Abhängigkeit von x_1 zu erhalten, müssen wir nun die Gleichung

$$F(x_1, x_2) = F(0, x_2(0)) = F(0, 0)$$

nach x_2 auflösen. Wir setzen die Fourierreentwicklung von λ_1 und λ_2 ein und erhalten

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \sum_{k \neq 0, l} \lambda_{1_{kl}} e^{2\pi i l x_2} \left[\frac{e^{2\pi i k x_1} - 1}{2\pi i k} \right] + \left(\sum_l \lambda_{1_{0l}} e^{2\pi i l x_2} \right) x_1 \\ &\mp \sum_{l \neq 0, k} \lambda_{2_{kl}} \left[\frac{e^{2\pi i l x_2} - 1}{2\pi i k} \right] \mp \left(\sum_k \lambda_{2_{k0}} \right) x_2 \\ &\stackrel{3.4.25}{=} \sum_{k \neq 0, l} \lambda_{1_{kl}} e^{2\pi i l x_2} \left[\frac{e^{2\pi i k x_1} - 1}{2\pi i k} \right] \mp \sum_{l \neq 0, k} \lambda_{2_{kl}} \left[\frac{e^{2\pi i l x_2} - 1}{2\pi i k} \right] + l_1 x_1 \mp l_2 x_2 = 0. \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_1 = n$ ergibt die Gleichung

$$l_2 x_2(n) = \pm l_1 n - \sum_{l \neq 0, k} \lambda_{2_{kl}} \left[\frac{e^{2\pi i l x_2} - 1}{2\pi i k} \right],$$

so daß

$$\frac{x_2(n)}{n} = \pm \frac{l_1}{l_2} - \frac{1}{nl_2} \sum_{l \neq 0, k} \lambda_{2kl} \left[\frac{e^{2\pi i x_2} - 1}{2\pi i k} \right].$$

Nun ist die Fourier-Reihe jeder glatten Funktion absolut konvergent (siehe z.B. [Ta96] 3.Kapitel Satz 1.3), so daß die Summe auf der rechten Seite bei Grenzübergang $n \rightarrow +\infty$ gegen 0 konvergiert. Als Rotationszahl erhalten wir somit $\rho = \pm \frac{l_1}{l_2}$, woraus die Behauptung mit 2.5.28 folgt. ■

3.4.34 KOROLLAR. *Sei g_λ eine positive (bzw. negative) geschlossene Diagonalmetrik. Existiert eine geschlossene $X-$ (bzw. $Y-$) Kurve, so ist $\delta_\pm^0 = +\infty$.*

Die Frage liegt nahe, ob auch die Umkehrung gilt. Dies ist nach 2.5.28 wiederum äquivalent zur Frage, ob die Existenz einer dichten Nulllinie eine Obstruktion für die Degeneriertheit der Kerne darstellt. Schon beim flachen Torussahen wir, daß eine dichte Linie $\delta_\pm \leq 1$ impliziert.

3.4.35 SATZ. *Sei g_λ eine positive (bzw. negative) geschlossene Diagonalmetrik. Existiert eine dichte $X-$ (bzw. $Y-$) Kurve, so ist $\delta_\pm^0 = 1$.*

Beweis. Existiert eine dichte $X-$ (bzw. $Y-$) Linie, so ist die Rotationszahl nicht aus \mathbb{Q} , und daher sind alle $X-$ (bzw. $Y-$) Linien dicht. Wir definieren das Vektorfeld

$$\Lambda := \mp \lambda_2 \partial_1 - \lambda_1 \partial_2.$$

Dann ist Λ ein $X-$ (bzw. $Y-$) Vektorfeld, und die erzeugten Flußlinien sind dicht. Die Gleichung (HG) schreibt sich dann gerade

$$\Lambda(\varphi^+) = 0 \text{ bzw. } \Lambda(\varphi^-) = 0,$$

d.h. jede Lösung φ^+ bzw. φ^- ist entlang jeder Nulllinie konstant, und da diese dicht liegen, überhaupt konstant. cu_1 bzw. cu_{-1} sind dann offensichtlich die einzigen nicht trivialen Lösungen, woraus $\delta_\pm^0 = 1$ folgt. ■

Abschliessend erhalten wir den

3.4.36 SATZ. *Sei h konform äquivalent zu einer positiven (bzw. negativen) geschlossenen Diagonalmetrik. Dann gilt:*

Als mögliche Dimensionen δ_\pm^0 treten nur 1 und $+\infty$ auf. Diese Fälle sind charakterisiert durch:

- (i) $\delta_\pm^0 = 1 \iff \sigma_\lambda \notin \mathbb{Q} \iff$ alle Nulllinien liegen dicht

- (ii) $\delta_{\pm}^0 = +\infty \iff \sigma_{\lambda} \in \mathbb{Q} \iff$ es existiert eine geschlossene $X-$ ($Y-$)Kurve und alle Nulllinien sind entweder geschlossen oder Asymptote einer geschlossenen Linie.

Wir motivierten die Wahl unserer Beispielklasse mit der Existenz einer globalen Orthonormalbasis, die gestattet, die lokale Charakterisierung durch die Spinorableitung in eine (globale) partielle Differentialgleichung umzuschreiben. Um weitere Aussagen über harmonische Spinoren und Twistor-Spinoren zu machen, beweisen wir "Lokalisierungsprinzipien", d.h. Sätze, die uns erlauben, von lokalen Eigenschaften der Spinoren (die einer analytischen Untersuchung zugänglich sind) auf globale zu schließen. Die folgenden Resultate werden wir im nächsten Abschnitt durch geometrische Methoden elementarer beweisen können; um die Fruchtbarkeit analytischer Techniken unter Ausnutzung konformer Eigenschaften zu demonstrieren, seien hier alternative Beweise vorgestellt. Zuvor möchten wir an unsere Vereinbarung aus 2.5.3 uns erinnern, wonach l_x bzw. m_x die durch $x \in M$ verlaufende $X-$ bzw. $Y-$ Linie bezeichnet.

3.4.37 SATZ (Nullstellensatz). Sei $(M^{1,1}, h)$ eine Lorentz-Fläche und $\varphi \in \mathfrak{H}_+$. Existiert ein $x_0 \in M^{1,1}$ mit $\varphi(x_0) = 0$, so ist $\varphi|_{l_{x_0}} = 0$.

Beweis. Da $M^{1,1}$ separabel ist, existiert nach 2.3.16 eine abzählbare Überdeckung aus Karten $\{(U_n, \chi_n = (u_n, v_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ und Metriken $h_n \in [h]$ mit

$$h_n|_{U_n} = -du_n^2 + dv_n^2.$$

Es bezeichne λ_n den zugehörigen konformen Faktor (d.h. $h_n = \lambda_n h$), \mathfrak{H}_+^n den Raum der positiven harmonischen Spinoren bezüglich der Metrik h_n und $\varphi_n = \lambda_n^{\frac{1}{4}} \varphi \in \mathfrak{H}_+^n$ dem $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ entsprechenden Spinor (vgl. 3.2.16 (i)). Nach Satz 3.2.15 (ii) ist dann $zero(\varphi_n) = zero(\varphi)$, insbesondere gilt $\varphi_n(x_0) = 0$ für alle n . Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß $x_0 \in U_0$ ist. Nach Satz 3.2.16 (i) ist $\varphi_0 \in \mathfrak{H}_+^0$ und daher gilt

$$\nabla_{l_{x_0}}^{S_{h_0}} \varphi_0|_{U_0} = \partial_{x_0} \varphi_0 = 0$$

nach 3.4.10, d.h.

$$\varphi_0|_{l_{x_0} \cap U_0} \equiv const. \quad (*).$$

Wegen $x_0 \in l_{x_0} \cap U_0$ folgt $\varphi_0|_{l_{x_0} \cap U_0} \equiv 0$ und daher

$$\varphi_n|_{l_{x_0} \cap U_0} \equiv 0 \text{ für alle } n \quad (**).$$

Sei nun $x \in l_{x_0}$ beliebig; wir müssen zeigen, daß $\varphi_n(x) = 0$ für ein und damit alle n ist. Nun existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k$. Da der Nullbogen $l_{x_0 x}$ von x_0 nach x kompakt ist, existieren endlich viele

$j_i \in \mathbb{N}$ mit $l_{x_0x} \subset \bigcup_{i=0}^l U_{j_i}$. O.B.d.A sei $j_0 = 0$ und $j_l = k$. Sei j_i für ein $i = 1, \dots, l-1$ so gewählt, daß $U_{j_i} \cap U_0 \neq \emptyset$. Wegen (*) ist $\varphi_{j_i|l_{x_0} \cap U_{j_i}} \equiv \text{const.}$ und wegen (***) ist $\varphi_{j_i|l_{x_0} \cap U_{j_i} \cap U_0} \equiv 0$, also folgt $\varphi_{j_i|l_{x_0} \cap U_{j_i}} \equiv 0$. Nach spätestens $l-1$ weiteren Schritten ist $j_l = k$, und es folgt die Behauptung. ■

3.4.38 BEMERKUNG. Mutatis mutandis gilt 3.4.37 auch für negative harmonische Spinoren und positive/negative Twistor-Spinoren.

Mit Hilfe von 3.4.37 können wir nun die Nullstellenmenge von harmonischen Spinoren bzw. von Twistor-Spinoren näher untersuchen:

3.4.39 KOROLLAR. Sei φ aus \mathfrak{H}_\pm oder \mathfrak{T}_\pm . Dann gilt:

- (i) $\text{zero}(\varphi)$ ist entweder leer oder nicht diskret.
- (ii) Ist $\text{zero}(\varphi)$ Umgebung einer seiner Punkte, und existiert eine dichte Nulllinie, so ist $\varphi = 0$.

Daraus erhalten wir als weiteres Korollar das

3.4.40 "LOKALISIERUNGSPRINZIP". Sei $(M^{1,1}, [h])$ eine Lorentz-Fläche mit einer dichten X -Linie l . Seien φ_1 und φ_2 zwei positive harmonische Spinoren. Existiert eine Umgebung U in M mit $\varphi_1|_U \equiv \varphi_2|_U$, so folgt $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Analoges gilt für harmonische Spinoren aus $\Gamma(S^-)$ und Twistor-Spinoren aus $\Gamma(S^\pm)$.

Beweis. $\varphi_1 - \varphi_2$ ist offensichtlich ein harmonischer Spinor aus $\Gamma(S^+)$, der auf U verschwindet. Wegen $U \cap l \neq \emptyset$ gilt auch $(\varphi_1 - \varphi_2)|_l \equiv 0$ und daher $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ aus Stetigkeitsgründen. ■

Damit können wir nun folgende Obstruktion für degenerierte Kerne beweisen:

3.4.41 SATZ. Sei $(M^{1,1}, g)$ eine Lorentz-Fläche, auf der eine dichte X -Nulllinie existiert. Dann ist $\delta_+ \leq 1$.

Beweis. Seien φ und ψ zwei positive harmonische Spinoren, und φ nicht identisch null. Wir müssen zeigen, daß $c \in \mathbb{C}$ mit $\psi = c\varphi$ existiert. Sei x ein Punkt aus der dichten X -Nulllinie l , und sei $q \in Q_x$ beliebig. Dann können wir $\varphi(x) = [q, v]$ und $\psi(x) = [q, w]$ mit v und w aus $\Delta_{1,1}^+$ schreiben. Weil φ nicht trivial ist, folgt $v \neq 0$, sonst wäre $\varphi \equiv 0$ auf einer dichten Menge von $M^{1,1}$ und somit überhaupt null. Da $\Delta_{1,1}^+$ eindimensional ist, existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $w = cv$. Wir definieren einen neuen positiven harmonischen Spinor durch $\phi = \psi - c\varphi$. Dann ist

$$\phi(x) = [q, w - cv] = [q, 0] = 0,$$

also $\phi_l \equiv 0$ gemäß dem Nullstellensatz. Weil l dicht in M ist, folgt $\phi \equiv 0$ und daher $\psi = c\varphi$, woraus die Behauptung folgt. ■

Geometrische Methoden Anhand der lokalen Darstellung als partielle Differentialgleichung erkannten wir in der Existenz dicht liegender Nulllinien eine erste Obstruktion für die Degeneriertheit. Dabei benutzten wir im wesentlichen – genau wie bei den Minkowski-Flächen – die (konforme) Flachheit, um zu sehen, daß die Ableitung positiver bzw. negativer Spinoren entlang der X - bzw. Y -Linien verschwinden muß, um harmonisch bzw. Twistor zu sein. Um diesen Sachverhalt allgemein zu diskutieren, betrachten wir nun nicht mehr die Mannigfaltigkeit $(M^{1,1}, g)$, sondern ein fixiertes $Spin_+(1, 1)$ -Hauptfaserbündel Q mit der Spinorableitung ∇^S :

3.4.42 SATZ.

(i) Sei φ aus $\Gamma(S^+)$ bzw. $\Gamma(S^-)$. Dann ist φ ein harmonischer Spinor genau dann, wenn

$$\nabla_X^S \varphi \equiv 0 \text{ bzw. } \nabla_Y^S \varphi \equiv 0$$

für alle \mathcal{X} -Vektorfelder X bzw. \mathcal{Y} -Vektorfelder Y gilt.

(ii) Sei φ aus $\Gamma(S^+)$ bzw. $\Gamma(S^-)$. Dann ist φ ein Twistor-Spinor genau dann, wenn

$$\nabla_Y^S \varphi \equiv 0 \text{ bzw. } \nabla_X^S \varphi \equiv 0$$

für alle \mathcal{Y} -Vektorfelder Y bzw. \mathcal{X} -Vektorfelder X gilt.

Beweis. Sei $\varphi \in \Gamma(S^+)$; wir beweisen jeweils nur den ersten Teil der Aussage, den zweiten zeigt man analog.

(i) \implies) Sei also $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ und $X \in \mathfrak{X}(U)$ ein \mathcal{X} -Vektorfeld. O.B.d.A. dürfen wir nach eventueller Verkleinerung von U annehmen, daß ein isothermales Koordinatensystem $s = (s_1, s_2)$ auf U definiert ist. Dann schreibt sich

$$X = \lambda(s_1 + s_2)$$

für $\lambda \in C^\infty(U)$. Nach 3.4.8 gilt $s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$, d.h.

$$\nabla_{s_1}^S \varphi = \omega \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi = -\nabla_{s_2}^S \varphi,$$

weil $\nabla_Z^S \varphi(\Gamma(S^\pm)) \subset \Gamma(S^\pm)$ und $\Delta_{1,1}^+$ der Eigenunterraum von ω zum Eigenwert -1 ist. Daraus folgt aber $\nabla_{s_1+s_2}^S \varphi = 0$, und nach multiplizieren mit λ erhalten wir $\nabla_X^S \varphi = 0$.

\Leftarrow) Umgekehrt folgt aus $\nabla_X^S \varphi = 0$ die Gleichung $\nabla_{s_1+s_2}^S \varphi = 0$ für jedes isothermale Koordinatensystem, woraus

$$\nabla_{s_1}^S \varphi = -\nabla_{s_2}^S \varphi = \omega \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$$

und somit sich

$$s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$$

ergibt.

(ii) \Rightarrow) Sei also $\varphi \in \mathfrak{T}_+$ und $Y \in \mathfrak{X}(U)$ ein \mathcal{Y} -Vektorfeld. O.B.d.A. dürfen wir nach eventueller Verkleinerung von U annehmen, daß ein isothermales Koordinatensystem $s = (s_1, s_2)$ auf U definiert ist. Dann schreibt sich

$$Y = \lambda(s_1 - s_2)$$

für $\lambda \in C^\infty(U)$. Nach 3.4.8 gilt $s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = -s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$, d.h.

$$\nabla_{s_1}^S \varphi = -\omega \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi = \nabla_{s_2}^S \varphi,$$

weil $\nabla_Z^S \varphi(\Gamma(S^\pm)) \subset \Gamma(S^\pm)$ und $\Delta_{1,1}^+$ der Eigenunterraum von ω zum Eigenwert -1 ist. Daraus folgt aber $\nabla_{s_1-s_2}^S \varphi = 0$, und nach Multiplizieren mit λ erhalten wir $\nabla_{Y|U}^S \varphi = 0$.

\Leftarrow) Umgekehrt folgt aus $\nabla_Y^S \varphi = 0$ die Gleichung $\nabla_{s_1-s_2}^S \varphi = 0$ für jedes isothermale Koordinatensystem, woraus $\nabla_{s_1}^S \varphi = \nabla_{s_2}^S \varphi = -\omega \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$ und somit sich $s_1 \cdot \nabla_{s_1}^S \varphi = -s_2 \cdot \nabla_{s_2}^S \varphi$ ergibt. \blacksquare

3.4.43 KOROLLAR.

(i)

$$\mathfrak{H}_+ = \{\varphi \in \Gamma(S^+) \mid \nabla_X^S \varphi = 0 \text{ für jedes } \mathcal{X} \text{-Vektorfeld } X\}$$

und

$$\mathfrak{H}_- = \{\varphi \in \Gamma(S^-) \mid \nabla_Y^S \varphi = 0 \text{ für jedes } \mathcal{Y} \text{-Vektorfeld } Y\}.$$

(ii)

$$\mathfrak{T}_+ = \{\varphi \in \Gamma(S^+) \mid \nabla_Y^S \varphi = 0 \text{ für jedes } \mathcal{Y} \text{-Vektorfeld } Y\}$$

und

$$\mathfrak{T}_- = \{\varphi \in \Gamma(S^-) \mid \nabla_X^S \varphi = 0 \text{ für jedes } \mathcal{X} \text{-Vektorfeld } X\}.$$

3.4.44 BEMERKUNGEN.

(i) Insbesondere sehen wir, daß *lokal* die harmonische Gleichung bzw. die Twistor-Gleichung immer unendlich viele linear unabhängige Lösungen bezüglich einer beliebigen Spin-Struktur besitzt: Dazu

reicht es, die Gleichungen aus 3.4.42 für ein lokal flaches $\tilde{g} \in [g]$ (vgl. 2.3.16) hinzuschreiben. Dies ist nicht weiter überraschend, denn wir benutzen dabei ja die Tatsache, daß auf einer Lorentz–Fläche keine lokalen konformen Invarianten existieren und das lokale Verhalten der Nulllinien modulo konformer Änderung immer uniform ist. Wie wir im folgenden noch sehen werden, ist die Endlichdimensionalität der Kerne ein Maß für das ”pathologische” Verhalten der Nulllinien.

(ii) Wir wollen im folgenden einige Umformulierungen von 3.4.42 angeben. Dazu machen wir zuerst eine allgemeine Bemerkung: In jedem Vektorbündel E (assoziiert zum Hauptfaserbündel $P \times_G V$) mit kovarianter Ableitung ∇^E gilt

$$\nabla_Z^E \varphi = \nabla_Z^E [q, \bar{\varphi}] = [q, Z^* (\bar{\varphi})]$$

für $\varphi \in \Gamma(E)$ bzw. $\bar{\varphi} \in C^\infty(P, V)^G$, wobei Z^* der horizontale Lift von Z ist (siehe Lemma auf S.115 in [KoNo63]). Fassen wir in unserem speziellen Fall eines Spin–Bündels die Spinoren $\varphi \in \Gamma(S^\pm)$ als $Spin_+$ –invariante Funktionen $\bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \Delta_{1,1}^\pm)$ auf, so besagt 3.4.42, daß $\nabla_X^S \varphi = [q, X^* (\bar{\varphi})] = 0$ bzw. $\nabla_Y^S \varphi = [q, Y^* (\bar{\varphi})] = 0$ ist.

3.4.45 KOROLLAR 1 (“Orthoformität” von harmonischen Spinoren und Twistor–Spinoren). *Für die isotropen Vektorfelder X und Y seien X^* und Y^* die nach Q gelifteten horizontalen Vektorfelder. Dann gilt:*

(i)

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_+ &\cong \{ \bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \underset{\mp}{\gtrsim}_{1,1}^+)^{Spin_+(1,1)} \mid X^* (\bar{\varphi}) = 0 \} \\ &= \{ \bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \underset{\mp}{\gtrsim}_{1,1}^+)^{Spin_+(1,1)} \mid \bar{\varphi} \text{ ist konstant entlang horizontalen} \\ &\quad \text{Lifts von } \mathcal{X} \text{ – Wegen} \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_- &\cong \{ \bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \underset{\mp}{\gtrsim}_{1,1}^-)^{Spin_+(1,1)} \mid Y^* (\bar{\varphi}) = 0 \} \\ &= \{ \bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \underset{\mp}{\gtrsim}_{1,1}^-)^{Spin_+(1,1)} \mid \bar{\varphi} \text{ ist konstant entlang horizontalen} \\ &\quad \text{Lifts von } \mathcal{Y} \text{ – Wegen} \}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_+ &\cong \{ \bar{\psi} \in C^\infty(Q, \underset{\mp}{\gtrsim}_{1,1}^+)^{Spin_+(1,1)} \mid Y^* (\bar{\psi}) = 0 \} \\ &= \{ \bar{\psi} \in C^\infty(Q, \underset{\mp}{\gtrsim}_{1,1}^+)^{Spin_+(1,1)} \mid \bar{\psi} \text{ ist konstant entlang horizontalen} \\ &\quad \text{Lifts von } \mathcal{Y} \text{ – Wegen} \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_- &\cong \{\bar{\psi} \in C^\infty(Q, \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^-)^{Spin_+(1,1)} \mid X^*(\bar{\psi}) = 0\} \\ &= \{\bar{\psi} \in C^\infty(Q, \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^-)^{Spin_+(1,1)} \mid \bar{\psi} \text{ ist konstant entlang horizontalen} \\ &\quad \text{Lifts von } \mathcal{X}\text{-Wegen}\}.\end{aligned}$$

Bezeichne $\mathfrak{H}_{+,\neq}$ usw. die Menge der positiven, nullstellenfreien harmonische Spinoren. Dann existiert eine Bijektion zwischen $\mathfrak{H}_{+,\neq}$ und $\mathfrak{T}_{-,\neq}$ und $\mathfrak{H}_{-,\neq}$ und $\mathfrak{T}_{+,\neq}$. Diese wird durch faserweise Fortsetzung der Abbildungen

$$T_{+-} : \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^- \setminus \{0\}, T_{+-}(zu_1) = \frac{1}{z}u_{-1}$$

bzw.

$$T_{-+} : \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^- \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^+ \setminus \{0\}, T_{-+}(zu_{-1}) = \frac{1}{z}u_1$$

definiert.

Beweis. Fassen wir Spinoren $\varphi \in \Gamma(S^\pm)$ als $Spin_+$ -invariante Funktionen $\bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \Delta_{1,1}^\pm)$ auf, so besagt 3.4.42 gemäß 3.4.44, daß

$$\nabla_X^S \varphi = [q, X^*(\bar{\varphi})] = 0 \text{ bzw. } \nabla_Y^S \varphi = [q, Y^*(\bar{\varphi})] = 0,$$

woraus der erste Teil der Behauptung folgt. Die Abbildungen T_{+-} bzw. T_{-+} sind insbesondere \mathbb{R} -linear und somit $Spin_+(1,1)$ -invariant (vgl. 3.1.21). Wir fassen nun $\bar{\varphi} \in C^\infty(Q, \mathbb{Z}_{\neq 1,1}^+)^{Spin_+(1,1)}$ als Abbildung mit Werten in \mathbb{C} auf und schreiben $\varphi = [q, \bar{\varphi}u_1]$. Betrachten wir die durch faserweise Fortsetzung erhaltene Abbildung $\tilde{T}_{+-} : \Gamma(S^+) \rightarrow \Gamma(S^-)$, so ist

$$\tilde{T}_{+-}\varphi = [q, T_{+-}\bar{\varphi}u_1] = \left[q, \frac{1}{\bar{\varphi}}u_{-1} \right].$$

Nun folgt (siehe 3.1.20 für die Definition von g_a) $T_{+-}(\bar{\varphi}g_a u_1) = \frac{1}{\bar{\varphi}a}u_{-1} = g_a T_{+-}(\bar{\varphi}u_1)$, d.h. T_{+-} ist $Spin_+(1,1)$ -äquivariant und daher tatsächlich eine Abbildung von $\mathfrak{H}_{+,\neq}$ nach $\mathfrak{T}_{-,\neq}$. Gleiches gilt für T_{-+} . Beide Abbildung sind invers zueinander, woraus die Behauptung folgt. \blacksquare

3.4.46 BEMERKUNG. 3.4.45 entspricht der Charakterisierung von harmonischen Spinoren als holomorphe Schnitte im Spinorbündel über Riemannschen Flächen (siehe [Ne89] Satz 3, Seite 11).

3.4.47 KOROLLAR 2 (\mathcal{X} - und \mathcal{Y} -Parallelität von harmonischen Spinoren und Twistor-Spinoren). Sei $\varphi \in \Gamma(S^+)$. Dann ist φ ein positiver harmonischer Spinor bzw. ein negativer Twistor-Spinor genau dann, wenn für alle $x \in M^{1,1}$ und alle \mathcal{X} -Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt: Ist l_x die X -Linie durch x und

$$\varphi(x) = [q, v],$$

so ist

$$\varphi(y) = [\mathcal{P}_{(l_x)_q^*}:x \rightarrow y q, v]$$

für alle $y \in l_x$, wobei $\mathcal{P}_{(l_x)_q^*}:x \rightarrow y q$ die Parallelverschiebung von $q \in Q_x$ nach Q_y entlang des horizontalen Liftes $(l_x)_q^*$ von l_x mit Anfangspunkt in q ist. Eine analoge Aussage ergibt sich für negative harmonische Spinoren und positive Twistor-Spinoren, wenn man \mathcal{Y} - statt \mathcal{X} -Vektorfelder betrachtet.

Beweis. Sei zuerst ein $q_0 \in Q$ fixiert, so daß wir $S = Q \times_{Spin_+(1,1)} \Delta_{1,1}$ auf das Holonomiebündel

$$Q^{\bar{A}}(q_0) \times_{Hol^{\bar{A}}(q_0)} \Delta_{1,1}$$

reduzieren können. Wir identifizieren

$$\Gamma(S^+) \cong C^\infty(Q, \Delta_{1,1}^+)^{Spin_+(1,1)} \cong C^\infty(Q^{\bar{A}}(q_0), \Delta_{1,1}^+)^{Hol^{\bar{A}}(q_0)}.$$

Nach Satz 3.4.42 bzw. Bemerkung 3.4.44 ist $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ genau dann, wenn $\nabla_X^S \varphi(y) = [q, X^*(\bar{\varphi})(q)] = 0$, also genau dann, falls $\bar{\varphi}$ konstant entlang jedem horizontalem Lift l_x^* einer X -Linie l_x in $Q^{\bar{A}}(q_0)$ ist. Dies bedeutet aber gerade

$$\bar{\varphi}(\mathcal{P}_{(l_x)_q^*}:x \rightarrow y q_x) = \bar{\varphi}(q_x) = v$$

für alle y . Daraus folgt die Gleichung

$$\varphi(y) = [q_y, \bar{\varphi}(q_y)] = [\mathcal{P}_{(l_x)_q^*}:x \rightarrow y q_x, \bar{\varphi}(\mathcal{P}_{(l_x)_q^*}:x \rightarrow y q_x)] \stackrel{(*)}{=} [\mathcal{P}_{(l_x)_q^*}:x \rightarrow y q_x, v].$$

■

3.4.48 BEMERKUNGEN.

(i) Da die Parallelverschiebung unabhängig von der Parametrisierung von l_x ist, spielt es keine Rolle, welches \mathcal{X} -Vektorfeld die Nulllinie als Integralkurve erzeugt, da diese nur deren Parametrisierung beeinflussen.

(ii) Sofern wir 3.4.42 oder ein darauf basierendes Korollar benutzen, können wir die Untersuchung auf positive harmonische Spinoren beschränken. Alle Ergebnisse gelten dann, eventuell unter Vertauschung von \mathcal{X}/\mathcal{Y} bzw. $+/-$, auch für Spinoren aus \mathfrak{H}_- bzw. \mathfrak{T}_\pm .

(iii) Die fixierte Spin-Struktur (Q, f) geht in den Zusammenhang ∇^S bzw. in die Parallelverschiebung ein, so daß \mathfrak{H} bzw. \mathfrak{T} , wie wir auch bereits an Beispielen gesehen haben, in der Regel von der Spin-Struktur abhängen wird.

(iv) Die Sätze 3.4.10 und 3.4.37 beruhen auf einer Beschreibung harmonischer Spinoren als Funktionen, die konstant entlang einer der beiden Familien isotroper Linien sind. Dabei war die Mannigfaltigkeit entweder flach, oder wir konnten uns lokal, modulo konformer Änderung, auf den flachen

Fall zurückziehen. Für eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist aber die Flachheit eines Zusammenhangs zur Existenz paralleler Schnitte äquivalent, so daß eine Betrachtung der Nulllinien auf der Fläche selbst äquivalent zur Betrachtung der Hebungen in die Spin-Struktur sich herausstellt.

3.4.49 KOROLLAR 3.

(i) Sei $\varphi \in \Gamma(S)$ ein harmonischer Spinor. Dann sind

$$\varphi^+ = pr_{S^+}(\varphi) \text{ und } \varphi^- = pr_{S^-}(\varphi)$$

harmonische Spinoren. Insbesondere ist jeder harmonische Spinor von der Form $\varphi = \varphi^+ \oplus \varphi^-$ mit $\varphi^+ \in \mathfrak{H}_+$ und $\varphi^- \in \mathfrak{H}_-$.

(ii) Sei $\psi \in \Gamma(S)$ ein Twistor-Spinor. Dann sind

$$\psi^+ = pr_{S^+}(\psi) \text{ und } \psi^- = pr_{S^-}(\psi)$$

Twistor-Spinoren. Insbesondere ist jeder Twistor-Spinor von der Form $\psi = \psi^+ \oplus \psi^-$ mit $\psi^+ \in \mathfrak{T}_+$ und $\psi^- \in \mathfrak{T}_-$.

Beweis. (i) Sei $\varphi = \varphi^+ \oplus \varphi^-$ die eindeutige Zerlegung in einen positiven und einen negativen Spinor. Wegen $D : \Gamma(S^\pm) \rightarrow \Gamma(S^\mp)$ und $D\varphi = D\varphi^+ \oplus D\varphi^- = 0$ sind $D\varphi^\pm \in \Gamma(S^+) \cap \Gamma(S^-)$ und damit identisch null, d.h. harmonisch. (ii) beweist man analog. ■

Aus 3.3.18 folgt dann als

3.4.50 KOROLLAR. Sei $\mathcal{L} = (M^{1,1}, g)$ eine Lorentz-Fläche. Existieren φ^+ und φ^- aus \mathfrak{H}_\pm bzw. aus \mathfrak{T}_\pm ohne Nullstelle, so ist $M^{1,1}$ global konform flach (und somit insbesondere vollständig, falls M kompakt ist).

Mit Hilfe der \mathcal{X} -Parallelität erhalten wir ohne technischen Aufwand den Nullstellensatz 3.4.37 wieder:

3.4.51 KOROLLAR (Nullstellensatz). Ist $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ und $x \in M^{1,1}$ mit $\varphi(x) = 0$, so gilt $\varphi|_{\iota_x} \equiv 0$.

Insbesondere folgt wieder, daß für Metriken mit dichter \mathcal{X} -Nulllinie es höchstens einen linear unabhängigen positiven harmonischen Spinor geben kann, da eine Nullstelle entlang einer dichten Nulllinie sich auf die ganze Fläche vererbt. Wir wollen uns daher der Untersuchung jener Metriken zuwenden, deren zugehörige Nulllinien entweder geschlossen oder Asymptoten geschlossener Nulllinien sind. Hier ist zunächst unklar, wie dieses Verhalten die Dimension von \mathfrak{H}_+ beeinflußt, bzw. wie die Nullstellen

entlang einer Nulllinie sich weitervererben. Augenscheinlich gibt jede Asymptote mit einer Nullstelle diese an die sie angrenzenden geschlossenen Nulllinien weiter. Umgekehrt vererbte sich die Nullstelle eines harmonischen Spinors auf einer geschlossenen Nulllinie an ihre Asymptoten weiter, falls die \mathcal{X} -Parallelität — wie im flachen Fall —, die Konstanz des Spinors oder zumindest einer dem Spinor zugeordneten und noch zu definierenden Größe bewirkte.

Wir beschränken uns im folgenden wieder auf die Untersuchung positiver harmonischer Spinoren; die restlichen Fälle behandelt man analog.

3.4.52 DEFINITION.

(i) Sei φ ein positiver harmonischer Spinor. Eine glatte Funktion $\mu_\varphi : M^{1,1} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Punktmasse von φ , falls gilt:

(a) $\mu_\varphi(x) = 0$ genau dann, wenn $\varphi(x) = 0$

(b) μ_φ ist konstant entlang jeder X -Nulllinie, d.h. es gilt $X(\mu_\varphi) = 0$ für ein (und damit alle) \mathcal{X} -Vektorfeld(er) X .

(ii) Eine Lorentz-Fläche $(M^{1,1}, g)$, auf der für jeden positiven harmonischen Spinor φ eine Punktmasse μ_φ existiert, heißt μ -Fläche.

3.4.53 BEISPIELE. Wir wollen nun die Frage nach der Existenz von μ -Flächen anhand einiger Beispielklassen positiv beantworten. Sei dazu $(M^{1,1}, g)$ eine zeitorientierbare Lorentz-Fläche.

Bereits in 3.1.29 wiesen wir auf die Tatsache hin, daß die durch das $Spin_+$ -invariante Skalarprodukt definierte "Länge" $\langle \varphi, \varphi \rangle$ für positive Spinoren verschwindet. Durch Clifford-Multiplikation mit einem Vektorfeld Z erhalten wir aber einen negativen Spinor $Z \cdot \varphi$. Wir definieren als Kandidat für eine Punktmasse

$$\mu_\varphi(x) := \langle Z \cdot \varphi, \varphi \rangle.$$

Um μ_φ zu berechnen, fixieren wir zuerst eine globale Orthonormalbasis $s = (s_1, s_2)$ und schreiben $Z = as_1 + bs_2 \in \mathfrak{X}(M)$ für zwei glatte Funktionen $a, b : M^{1,1} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $x \in M$ und U eine einfach zusammenhängende Umgebung von x , so bezeichne $\tilde{s} : U \rightarrow Q$ eine Hebung des durch die Basis s induzierten Schnittes im Repère-Bündel in das $Spin_+$ -Hauptfaserbündel Q (an dieser Stelle geht die Spin-Struktur ein). Dann können wir lokal $\varphi = [\tilde{s}, \varphi^+ u_1]$ schreiben. Dabei ist $\varphi^+ \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ durch die Gleichung $\varphi^+ u_1 = \tilde{\varphi}(\tilde{s})$ charakterisiert; hier ist $\tilde{\varphi}$ die $Spin_+$ -äquivariante Funktion, die den Spinor φ darstellt. Daraus folgt $(\cdot, \cdot)_{s_1}$ bezeichnet das in 3.2.7 positiv-definite Skalarprodukt auf

$S \times S$):

$$\begin{aligned}
\mu_\varphi(x) &= \langle Z \cdot \varphi, \varphi \rangle(x) \\
&= \langle [s, ae_1 + be_2] \cdot [\tilde{s}, \varphi^+ u_1], \varphi \rangle(x) \\
&= \langle [\tilde{s}, \varphi^+(-au_{-1} + bu_{-1})], \varphi \rangle(x) \\
&= ([\tilde{s}, \varphi^+(b-a)e_1 \cdot u_{-1}], \varphi)_{s_1} \\
&= ([\tilde{s}, \varphi^+(a-b)u_1], [\tilde{s}, \varphi^+ u_1])_{s_1} \\
&= (a-b)(\varphi^+ u_1, \varphi^+ u_1)_\Delta(x) \\
&= (a-b)|\varphi^+(x)|^2
\end{aligned}$$

Für dieses derart definierte μ_φ gilt also (ia) der Definition 3.4.52, falls Z geeignet gewählt wird, d.h. für $a \neq b$. Leiten wir entlang des \mathcal{X} -Vektorfeldes $X_0 := s_1 + s_2$ ab, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
X_0(\mu_\varphi) &= X_0 \langle Z \cdot \varphi, \varphi \rangle \\
&= \langle \nabla_{X_0}^{LC} Z \cdot \varphi + Z \cdot \nabla_{X_0}^S \varphi, \varphi \rangle + \langle Z \cdot \varphi, \nabla_{X_0}^S \varphi \rangle \\
&= \langle \nabla_{X_0}^{LC} Z \cdot \varphi, \varphi \rangle \\
&= |\varphi^+(x)|^2 X_0(a-b) + (a-b)X_0(|\varphi^+(x)|^2)
\end{aligned}$$

Aus 3.3.21 folgt

$$X_0(|\varphi^+(x)|^2) = -|\varphi^+(x)|^2 \operatorname{div}(X_0).$$

Daraus leitet sich die Gleichung

$$X_0(\mu_\varphi) = |\varphi^+(x)|^2 (X_0(a-b) - (a-b)\operatorname{div}(X_0))$$

ab. Weil $a-b \neq 0$ sein soll, erhalten wir schließlich als hinreichende Bedingung für die Konstanz von μ_φ die Gleichung $X_0(\ln(|a-b|)) = -\operatorname{div}(X_0)$ bzw.

$$X_0(f) = -\operatorname{div}(X_0) \text{ für ein } f \in C^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$$

(für ein solches f wähle man $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{T}^2)$ mit $a-b = e^f$). Diese ist z.B. im Fall $\operatorname{div}(X_0) = 0$ erfüllt.

Kommen wir nun zu konkreten Beispielen:

(i) Diagonalmetriken:

Wir fixierten im vorangehenden Abschnitt die Orthonormalbasis $s = (\frac{e_1}{\lambda_1}, \frac{e_2}{\lambda_2})$. Sei $X_0 = s_1 + s_2$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X_0) &= -g(\nabla_{s_1}^{LC}(s_1 + s_2), s_1) + g(\nabla_{s_2}^{LC}(s_1 + s_2), s_2) \\
&= -g(\nabla_{s_1}^{LC}s_2, s_1) + g(\nabla_{s_2}^{LC}s_1, s_2) \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} (\partial_1\lambda_2 - \partial_2\lambda_1)
\end{aligned}$$

Unsere ad-hoc-Annahme zur Vereinfachung der Dirac- bzw. Twistor-Gleichung besagt also gerade, daß X_0 divergenzfrei ist!

(ii) Lorentz-Flächen mit nullstellenfreien positiven harmonischen Spinor φ :

Aufgrund der Divergenzformel 3.3.21 gilt $X_0(\ln|\varphi^+|^2) = -\operatorname{div}(X_0)$. Das Auffinden nullstellenfreier harmonischer Spinoren in der Klasse der Diagonalmetriken ergibt wiederum — nach geeigneter Wahl einer Orthonormalbasis s (siehe Bemerkung 3.4.51) die Existenz divergenzfreier \mathcal{X} -Vektorfelder.

Um weitere Beispielklassen zu gewinnen, schreiben wir zunächst $X = k(x_1, x_2)\partial_1 + l(x_1, x_2)\partial_2$ in den Standardkoordinaten (x_1, x_2) und berechnen die Divergenz mit Hilfe der Formel

$$d(i_X\omega) = \operatorname{div}(X)\omega,$$

wobei ω die Volumenform und i_X das innere Produkt bezeichnet. ω wird durch $\omega = \sqrt{|\det(g)|}dx_1 \wedge dx_2$ gegeben. Also ist $i_X\omega = \sqrt{|\det(g)|}(k(x_1, x_2)dx_2 - l(x_1, x_2)dx_1)$ und daher

$$\begin{aligned}
d(i_X\omega) &= \partial_1 \left(\sqrt{|\det(g)|}k \right) dx_1 \wedge dx_2 + \partial_2 \left(\sqrt{|\det(g)|}l \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \left(\partial_1 k + \frac{1}{2}k\partial_1(\ln|\det(g)|) + \partial_2 l + \frac{1}{2}l\partial_2(\ln|\det(g)|) \right) \omega
\end{aligned}$$

Also ist

$$\operatorname{div}(X) = \partial_1 k + \partial_2 l + \frac{1}{2}X(\ln|\det(g)|)$$

Modulo konformer Änderung mit dem konformen Faktor $\frac{1}{\sqrt{(b^2-ac)}}$ dürfen wir sogar $|\det(g)| \equiv 1$ annehmen, und wir erhalten die Gleichung

$$\operatorname{div}(X) = \partial_1 k + \partial_2 l.$$

Somit erhalten wir als Korollar (vgl. 2.4.14):

3.4.54 KOROLLAR. *Jeder Lorentz-Torus $(T^{1,1}, g)$ mit $g \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ definiert eine μ -Fläche.*

Beweis. Gemäß 2.4.14 ist das isotrope Vektorfeld X_2 von der Form $X_2 = \partial_1 + l(x_1)\partial_2$. Ist X_2 ein \mathcal{X} -Vektorfeld, so sind wir fertig. Ansonsten kehren wir die Orientierung um, was äquivalent zum Vertauschen der \mathcal{X} - und \mathcal{Y} -Distribution ist. ■

3.4.55 THEOREM. *Sei (M, g) eine μ -Fläche. Seien $\varphi \in \mathfrak{H}_+$, $x \in M$ und l eine Nulllinie. Ist $(x_n) \subset l$ eine Folge mit $x_n \rightarrow x$ und $\varphi(x) = 0$, so gilt auch $\varphi|_l = 0$. Anders ausgedrückt: Die Nullstellen von φ entlang geschlossener X -Nulllinien vererben sich an alle angrenzenden Asymptoten.*

Beweis. Da μ_φ stetig ist, gilt

$$\lim_n \mu_\varphi(x_n) = \mu_\varphi(x) \stackrel{3.4.52(i)}{=} 0$$

Wegen 3.4.52 (ii) ist der Limes aber gleich $\mu_\varphi(x_0)$, und die Behauptung folgt aus 3.4.52 (i). ■

3.4.56 KOROLLAR 1. *Sei $(M^{1,1}, g)$ eine μ -Fläche mit einer dichten Nulllinie, und $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}_+$. Existiert ein $x \in M$ mit $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, so ist $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Mit anderen Worten: Positive harmonische Spinoren sind auf Lorentz-Flächen mit einer dichten Nulllinie bereits durch die Vorgabe in einem Punkt eindeutig bestimmt. Insbesondere ist jeder Spinor $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ mit einer Nullstelle trivial.*

3.4.57 KOROLLAR. *Sei $(M^{1,1}, g)$ eine μ -Lorentz-Fläche mit einer dichten Nulllinie. Gilt dann $\delta_+ = \delta_- = 1$ bzw. $\tau_+ = \tau_- = 1$, so ist $(M^{1,1}, g)$ konform flach.*

Beweis. Sind $\varphi^\pm \in \mathfrak{H}_\pm$ harmonische Spinoren, so besitzen sie nach 3.4.56 keine Nullstellen, und die Behauptung folgt aus 3.4.50. ■

3.4.58 BEMERKUNG. Wie wir bereits in 3.4.20 gesehen haben, gilt die Umkehrung i.all. nicht.

3.4.59 KOROLLAR 2. *Sei $\varphi \in \Gamma(S^+)$ ein harmonischer Spinor, l_∞ eine geschlossene X -Linie und $x \in l_\infty$ mit $\varphi(x) = 0$. Dann ist φ identisch 0 auf jeder Asymptoten von l_∞ .*

In Hinblick auf 3.4.56 können wir von nun an stets davon ausgehen, daß auf allen zu untersuchenden kompakten Lorentz-Flächen keine dichte Nulllinie existiert. Für die folgende Diskussion führen wir einige Bezeichnungen ein. Sei zunächst $x \in M^{1,1}$ beliebig, und l_1 und l_2 zwei geschlossene Nulllinien. Weil $M^{1,1}$ homöomorph zu einem Torus ist, sind die Zusammenhangskomponenten von $M^{1,1} \setminus (l_1 \cup l_2)$ offen in $M^{1,1}$ und homöomorph zu einem Zylinder (ohne Rand). Wir benennen $C_{l_1 l_2}(x)$ denjenigen Zylinder, der x enthält. Sein Abschluß wird offensichtlich durch

$$\overline{C_{l_1 l_2}(x)} = C_{l_1 l_2}(x) \cup l_1 \cup l_2$$

gegeben. Gilt speziell $l_1 = l_2$, so ist $\overline{C_{l_1 l_1}(x)} = M$, d.h. der Torus selbst ist ein abgeschlossener Zylinder. Sei nun ein $x \in M$ fixiert, für das die Nulllinie l_x eine Asymptote zweier geschlossener Nulllinien l_1 und l_2 ist, d.h. $l_1 = A(x)$, $l_2 = \Omega(x)$. Wir betrachten dann den speziellen Zylinder

$$A_{l_1 l_2}(x) = C_{l_1 l_2}(x),$$

den wir *asymptotisch* nennen. In $A_{l_1 l_2}(x)$ kann keine weitere geschlossene Linie l mehr liegen, denn weil l nicht homotop zu einem Punkt sein darf (vgl. 2.5.26), müßte l die Asymptote l_x schneiden — Widerspruch. Ist also $x' \in A_{l_1 l_2}(x)$, so muß $l_{x'}$ eine Asymptote sein. Im folgenden bezeichnen wir mit $A_{l_1 l_2}(x)$ einen asymptotischen Zylinder, der den Punkt x enthält.

3.4.60 LEMMA 1. *Sei $\varphi \in \mathfrak{H}_+$. Dann seine Punktmasse μ_φ auf $\overline{A_{l_1 l_2}(x)}$ konstant:*

$$\mu_{\varphi|_{\overline{A_{l_1 l_2}(x)}}} \equiv \mu_\varphi(x).$$

Insbesondere folgt

$$d\mu_{\varphi|_{A_{l_1 l_2}(x)}} \equiv 0.$$

Beweis. Aus Stetigkeitsgründen gilt

$$\mu_{\varphi|_{l_x}} \equiv \mu_\varphi(x) \stackrel{3.4.54}{\equiv} \mu_{\varphi|_{l_1}} \equiv \mu_{\varphi|_{l_2}}.$$

Für $x' \in A_{l_1 l_2}(x)$ ist $l_{x'}$ ebenfalls eine Asymptote, die für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen l_1 bzw. l_2 strebt. Wegen 3.4.54 ist aber

$$\mu_{\varphi|_{l_1}} \equiv \mu_{\varphi|_{l_{x'}}} \equiv \mu_{\varphi|_{l_2}}$$

und daher

$$\mu_\varphi(x') = \mu_\varphi(x),$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Für die Formulierung eines weiteren “Lokalisierungsprinzips” betrachten wir nun Zylinder $C_{l_1 l_2}$ mit folgender Eigenschaft:

(NR) *Ein Zylinder $C_{l_1 l_2}$ erfüllt (NR), falls zwischen je zwei geschlossenen Nulllinien eine Asymptote liegt.*

Anschaulich besagt die Eigenschaft (NR), daß auf \mathcal{L} keine “Bänder” geschlossener Linien wie im flachen Fall auftreten (vgl. 2.7.5 (ii)). Wir nennen daher diese Zylinder auch *nichtresonant*.

3.4.61 LEMMA 2. Sei $C_{l_1 l_2}$ ein nichtresonanter Zylinder, und sei $\varphi \in \mathfrak{H}_+$. Dann ist seine Punktmasse μ_φ auf $\overline{C_{l_1 l_2}}$ konstant.

Beweis. Sei $A := \{x \in C_{l_1 l_2} \mid l_x \text{ ist eine Asymptote}\}$. Der Beweis gliedert sich in zwei Schritte: Erstens zeigen wir, daß A dicht und offen in $C_{l_1 l_2}$ ist. Sei dazu $x \in C_{l_1 l_2}$ und U eine (zusammenhängende) Umgebung von x . Ist $x \in A$, so gilt trivialerweise $U \cap A \neq \emptyset$. Wenn nicht, so muß l_x geschlossen sein. Sei $x' \in U$ und $l_{x'}$ ebenfalls geschlossen (ansonsten ist die Behauptung klar). Wegen (NR) liegt zwischen l_x und $l_{x'}$ eine Asymptote l , d.h. $l \cap U \neq \emptyset$, und mithin ist $A \cap U \neq \emptyset$; A liegt also dicht. Ist $x \in A$ und sind l_1 und l_2 die Asymptoten von l_x , so ist $A_{l_1 l_2}(x) \subset A$, und A ist daher offen.

Im zweiten Schritt zeigen wir die Behauptung: Da μ_φ glatt ist, reicht es zu beweisen, daß das totale Differential von μ_φ auf der dichten Teilmenge A identisch 0 ist. Ist $x \in A$ und sind l_1 und l_2 die Asymptoten von l_x , so folgt aus Lemma 3.4.60 gerade $d\mu_\varphi = 0$ auf $A_{l_1 l_2}(x)$. Weil x beliebig gewählt war, folgt auch die Behauptung. ■

3.4.62 KOROLLAR. Sei $(M^{1,1}, g)$ ein μ -Lorentz-Torus, der (NR) erfüllt, und sei $\varphi \in \mathfrak{H}_+$. Dann ist seine Punktmasse μ_φ auf $M^{1,1}$ konstant.

3.4.63 SATZ. Sei $(M^{1,1}, g)$ ein Lorentz-Torus, der (NR) erfüllt. Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}_+$ und existiert ein $x \in M$ mit $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, so gilt $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. Anders ausgedrückt sind positive harmonische Spinoren auf μ -Lorentz-Tori, die (NR) erfüllen, bereits durch die Vorgabe in einem Punkt eindeutig bestimmt. Insbesondere ist jeder Spinor $\varphi \in \mathfrak{H}_+$ mit einer Nullstelle trivial.

Beweis. Besitzt φ eine Nullstelle in x , so ist $\mu_\varphi = 0$ und somit identisch 0 nach 3.4.62, woraus aber wegen 3.4.52 sofort $\varphi \equiv 0$ folgt. Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}_+$ und existiert ein $x \in M$ mit $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, so argumentieren wir analog für den Spinor $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$ aus \mathfrak{H}_+ . ■

3.4.64 KOROLLAR. Sei $(M^{1,1}, g)$ eine kompakte μ -Fläche, die (NR) erfüllt. Dann ist $\delta_+ \leq 1$.

Beweis. Seien φ_1 und φ_2 zwei positive, harmonische Spinoren, wobei φ_1 nicht identisch null ist. Dann können wir wie in Satz 3.4.41 ein $x \in M$ und $c \in \mathbb{C}$ finden, für das $\varphi_2(x) = c\varphi_1(x)$ gilt, und die Behauptung folgt aus 3.4.63. ■

3.4.65 BEMERKUNG. Die hier bewiesenen und weiter unten noch zu beweisenden Methoden lassen sich offensichtlich auf Lorentz-Zylinder übertragen.

3.4.4 Konstruktion von positiven harmonischen Spinoren auf Lorentz-Flächen

Die geometrische Methode erwies sich für das Finden von Obstruktionen als äußerst fruchtbar. Andererseits gibt sich auch eine Methode in die Hand, um harmonische Spinoren zu konstruieren: Gemäß

der \mathcal{X} -Parallelität müssen wir lediglich eine $Spin_+(1, 1)$ -äquivariante Funktion angeben, die entlang der Hebungen von \mathcal{X} -Kurven konstant ist.

3.4.66 SATZ. Sei $(M^{1,1}, g)$ eine einfach zusammenhängende Lorentz-Fläche. Dann ist $\delta_+ = +\infty$.

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^{1,1}$ ein glatter Y -Bogen, und $\{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}\}$ eine linear unabhängige Familie glatter Funktionen (z.B. $f_n(t) = e^{int}$) und

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$$

eine glatte Funktion mit

$$f|_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]} \equiv 1 \text{ und } f|_{[0, \frac{1}{8}] \cup [\frac{7}{8}, 1]} \equiv 0.$$

Sei $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Q$ die Hebung von γ nach Q (mit einem beliebigen Anfangspunkt $q \in Q_{\gamma(0)}$) und

$$\hat{f}_n = f f_n.$$

Wir definieren eine $Spin_+(1, 1)$ -äquivariante Funktionen

$$\bar{\varphi}_n : Q \rightarrow \Delta_{1,1}^+$$

durch

$$\bar{\varphi}_{n|_{\text{span}(\gamma|_{(0,1)})}}(q) = \hat{f}_n(\gamma(t))g^{-1}u_1$$

für $q = (\mathcal{P}_{(l_{\gamma(t)})^*_{\tilde{\gamma}(t)} : \gamma(t) \rightarrow \pi(q)} \tilde{\gamma}(t))g$ (wobei $\pi(q)$ entlang der Nulllinie liegt, die γ in $\gamma(t)$ schneidet) und

$$\bar{\varphi}_{n|_{(\text{span}(\gamma|_{[\frac{1}{16}, \frac{15}{16}]})^c)} \equiv 0.$$

Dann ist $\bar{\varphi}_n$ offenbar wohldefiniert (denn auf einer einfach zusammenhängenden Lorentz-Fläche existieren keine geschlossenen Nulllinien), glatt und $Spin_+(1, 1)$ -äquivariant, d.h. $\varphi_n(x) := [q, \bar{\varphi}_n(q)]$ definiert einen positiven Spinor. φ_n ist außerdem harmonisch: Sei $x \in M$. Wir müssen zeigen, daß $\bar{\varphi}(\mathcal{P}_{(l_x)^*_q : x \rightarrow y} q)$ für alle $q \in Q_x$ und $y \in l_x$ konstant ist. Ist $x \in (\text{span}(\gamma|_{[\frac{1}{16}, \frac{15}{16}]})^c$, so ist $\bar{\varphi}_n$ identisch null über l_x , und die Behauptung ist klar. Gilt $x \in \text{span}(\gamma|_{(0,1)})$, dann ist $x \in l_{\gamma(t)}$ für ein $t \in (0, 1)$, und es existiert ein $g \in Spin_+(1, 1)$ mit

$$q = (\mathcal{P}_{(l_{\gamma(t)})^*_{\tilde{\gamma}(t)} : \gamma(t) \rightarrow x} \tilde{\gamma}(t))g.$$

Wegen der Rechtsäquivarianz der Parallelverschiebung folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(l_x)^*_q : x \rightarrow y} q &= \mathcal{P}_{(l_x)^*_q : x \rightarrow y} ((\mathcal{P}_{(l_{\gamma(t)})^*_{\tilde{\gamma}(t)} : \gamma(t) \rightarrow x} \tilde{\gamma}(t))g) \\ &= (\mathcal{P}_{(l_x)^*_q : x \rightarrow y} \circ \mathcal{P}_{(l_{\gamma(t)})^*_{\tilde{\gamma}(t)} : \gamma(t) \rightarrow x} \tilde{\gamma}(t))g = (\mathcal{P}_{(l_{\gamma(t)})^*_{\tilde{\gamma}(t)} : \gamma(t) \rightarrow y} \tilde{\gamma}(t))g, \end{aligned}$$

d.h.

$$\bar{\varphi}_n(\mathcal{P}_{(l_x)_q^*: x \rightarrow y} q) = \bar{\varphi}_n((\mathcal{P}_{(l_{\gamma(t)})_{\tilde{\gamma}(t)}: \gamma(t) \rightarrow y} \tilde{\gamma}(t))g) = \hat{f}_n(\gamma(t))g^{-1}u_1 = \bar{\varphi}_n(q) = \text{const.}$$

Es bleibt zu zeigen: Die Familie $\{\varphi_n\}$ ist linear unabhängig. Angenommen, es gäbe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{i=1}^k a_i \varphi_i = [q, \sum_{i=1}^k a_i \bar{\varphi}_i(q)] = 0.$$

Insbesondere wäre dann für $\bar{\varphi}_{i|\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}(t)) = \hat{f}_i(\gamma(t))u_1$

$$\sum_{i=1}^k a_i \hat{f}_i(\gamma(t))u_1 = \hat{f}(\gamma(t)) \sum_{i=1}^k a_i f_i(\gamma(t))u_1 = 0.$$

Daraus folgte aber $\sum_{i=1}^k a_i f_i = 0$ und somit $a_i = 0$ für $i = 1, \dots, k$. ■

3.4.67 KOROLLAR. Für \mathcal{L}^∞ aus 2.7.5 (i) ist $\delta_+ = +\infty$.

3.4.68 BEMERKUNG. Auf einfach zusammenhängenden Flächen kann man also *nicht* mit spin-geometrischen Invarianten zwischen den konformen Klassen unterscheiden. Intuitiv beruht dieses Phänomen auf dem starren Verhalten der Nulllinien, d.h. ihr Verhalten im Großen spiegelt sich im Verhalten im Kleinen wieder (vgl. 3.4.44). Auch nimmt die in 2.8 definierte Charakteristik der Fläche offenbar keinen Einfluß auf die Dimension von \mathfrak{H}_+ .

Wir fragen uns nun im Hinblick auf die Konstruktion harmonischer Spinoren auf dem Torus, welche notwendigen Bedingungen zunächst erfüllt sein müssen. Dazu studieren wir zuerst den Fall, wenn (NR) nicht gilt: Dann existieren zwei geschlossene Nulllinien l_1 und l_2 derart, daß in mindestens einem der beiden durch diese Nulllinien ausgezeichneten Zylinder $C_{l_1 l_2}$ (vgl. die Bemerkung zwischen 3.4.59 und 3.4.60) gilt: Für $x \in C_{l_1 l_2}$ ist l_x geschlossen. Nichtleere, abgeschlossene Zylinder der Form

$$R_{l_1 l_2} := l_1 \cup l_2 \cup C_{l_1 l_2} = \overline{C_{l_1 l_2}},$$

für die l_x geschlossen ist, falls $x \in R_{l_1 l_2}$, nennen wir *resonant*. Wir definieren die Eigenschaft (R) :

(R) $(M^{1,1}, [g])$ besitzt die Eigenschaft (R) , falls ein resonanter Zylinder auf M existiert.

3.4.69 KOROLLAR ZU 3.4.63.

- (i) Ein nichttrivialer Spinor kann nicht auf jedem resonanten Zylinder identisch 0 sein.
- (ii) Ist $\delta_+ \geq 2$, so besitzt $(M^{1,1}, [g])$ die Eigenschaft (R).

Beweis. (i) Wir nehmen das Gegenteil an. Dann existiert ein harmonischer Spinor $\varphi \neq 0$, der identisch 0 auf jedem resonanten Zylinder ist. Wir zeigen, daß dann μ_φ lokal konstant ist. Dies impliziert aber $\mu \equiv 0$ und $\varphi \equiv 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Sei $x \in T^{1+1}$. Falls l_x eine Asymptote ist, so ist $\mu_\varphi|_{A_{l_1 l_2}(x)}$ konstant nach 3.4.60. Anderenfalls ist l_x geschlossen. Existiert für jede Umgebung U von x ein $x' \in U$ derart, daß l_x eine Asymptote ist, dann liegt x im Abschluß eines nicht-resonanten Zylinders C . Falls $x \in \text{int}(C)$, dann ist μ_φ konstant auf einer Umgebung von x gemäß 3.4.61. Anderenfalls liegt $x \in \partial C \cap \partial R$, wobei R ein resonanter Zylinder ist. Dann gilt $\mu_\varphi \equiv 0$ auf einer Umgebung von x , da $\mu_\varphi|_C \equiv \text{const}$ und $\mu_\varphi|_R \equiv 0$. Schließlich, falls $x \in \text{int}(R)$, ist $\mu_\varphi \equiv 0$ auf einer Umgebung von x nach Voraussetzung.

(ii) Gilt $\delta_+ \geq 2$, so kann wegen 3.4.63 (NR) nicht gelten, also folgt (R). ■

Wir wenden uns nun der Konstruktion von harmonischen Spinoren auf Lorentz-Tori zu. Aus dem Korollar folgt unmittelbar, daß harmonische Spinoren, die nicht identisch verschwinden, nichttrivial auf einem resonanten Zylinder sein müssen. Dieser Fakt suggeriert eine Übertragung der Konstruktionsmethode aus 3.4.66 auf diese Bänder geschlossener Nulllinien. Dabei tritt aber folgendes Problem auf: Ist $\varphi \in \mathfrak{H}_+$, und existiert eine geschlossene X -Linie l , so gilt

$$\varphi(x) = [q, v] = [\mathcal{P}_{l_q^*: x \rightarrow x} q, v] = [qg, v] = [q, gv],$$

d.h. es folgt $gv = v$. Wir erhalten nun eine zusätzliche, notwendige Bedingung für die Existenz *nullstellenfreier*, harmonischer Spinoren entlang geschlossener Nulllinien: Die von l erzeugte "X-Holonomie", d.h. das durch die Gleichung

$$qg^n = \mathcal{P}_{l_q^*: x \rightarrow x} q$$

(bei n -fachem Umlauf um die geschlossene Linie l) ausgezeichnete $g \in \text{Hol}^{\bar{A}}(q)$, muß v als Eigenvektor zum Eigenwert 1 haben. Eine Lorentz-Fläche, deren Holonomie in X -Richtung verschwindet, nennen wir *X-flach*. Aus der treuen $\text{Spin}_+(1, 1)$ -Darstellung aus 3.1.20 folgt aber sofort, daß dann $g = id$ sein muß. Falls auf einer kompakten Lorentz-Fläche geschlossene X -Linien existieren, so darf ein nicht trivialer Spinor nach 3.4.63 und 3.4.69 nicht auf allen geschlossenen Nulllinie verschwinden. Somit haben wir nachstehende "Holonomie-Obstruktion" für $\delta_+ \geq 1$:

3.4.70 SATZ UND DEFINITION. Sei $(M^{1,1}, g)$ eine kompakte Lorentz-Fläche. Ist $\delta_+ \geq 1$ und existieren geschlossene X -Linien, so existiert mindestens eine X -flache, d.h. $q = \mathcal{P}_{l_q^*: x \rightarrow x} q$. Insbesondere existieren auf kompakten Lorentz-Flächen mit $\delta_+ \geq 2$ resonante, X -flache Zylinder. Solche Lorentz-Flächen nennen wir X -flach resonant.

3.4.71 BEMERKUNG. Diese Bedingung besagt insbesondere, daß die entsprechende geschlossene Nulllinie l zu einer vollständigen Nullgeodäte umparametrisiert werden kann: Offenbar ist die Kurve $\alpha : I \rightarrow Q$, $\alpha(t) = \mathcal{P}_{l_q^*: x \rightarrow x(t)} q$ in Q geschlossen, mithin auch die Projektion $f \circ \alpha : I \rightarrow P$, d.h. verschiebt man eine Orthonormalbasis $s = (s_1, s_2)$ aus $T_x M$ entlang l wieder nach $T_x M$, so erhält man die Ausgangsbasis zurück. Da die durch den Levi-Civita-Zusammenhang auf M in P induzierte Parallelverschiebung modulo der üblichen Identifikationen gerade die gewöhnliche Parallelverschiebung in TM ergibt, bedeutet dies, daß für die von $s_1 + s_2 = X_0$ erzeugte Geodäte $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^{1,1}$ mit $\gamma(0) = x = \gamma(1)$ dann $\gamma'(0) = X = \gamma'(1)$ gilt und diese nach Satz 7.13 aus [O'N83] vollständig ist.

Die intuitiv so eingängige Konstruktion im Falle einfach zusammenhängender Flächen kann also nicht problemlos auf nicht flache kompakte Mannigfaltigkeiten übertragen werden, denn zu dem "regulären" Verhalten der Nulllinien tritt noch eine geometrische Obstruktion hinzu.

3.4.72 BEISPIELE.

(i) *Konstruktion von hamonischen Spinoren auf X -flachen resonanten Zylindern:* Sei R ein X -flacher resonanter Zylinder, d.h. für alle $x \in R$ ist l_x geschlossen und die X -Holonomie ist trivial. Dann können wir ein zu allen geschlossenen X -Linien transversalen Bogen γ konstruieren, der jede X -Linie genau einmal schneidet. Dann definieren wir wie in 3.4.66 eine Familie linear unabhängiger harmonischer Spinoren, die wohldefiniert aufgrund der X -Flachheit von R sind. Auf einem lokal X -flachen resonanten Zylinder ist also $\delta_+ = +\infty$.

(ii) In 2.4.13 (ii) führten wir die Familie

$$h^\tau = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 - 2\tau(x_1) dx_2 \otimes dx_2$$

unvollständiger Lorentz-Metriken auf dem Torus ein, wobei τ eine glatte, periodische Funktion mit $\tau(a) = 0$ und $\tau'(a) \neq 0$ war. Wir betrachten für unsere Zwecke die Umschreibung

$$h^\tau = -dx_1 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1 - 2\tau(-x_2) dx_1 \otimes dx_1,$$

die durch die Isometrie $(x_1, x_2) \rightarrow (-x_2, x_1)$ hervorgegangen ist. Wählen wir z.B. das τ , das sich durch periodische Fortsetzung folgender glatter Funktion auf $[0, 1]$ ergibt: Sei $\tilde{\tau}$ die glatte Fortsetzung der

Funktion

$$\tilde{\tau}_{[0,\delta]} = \tilde{\tau}_{[1-\delta,1]} \equiv 0, \quad \tilde{\tau}_{[\delta+\epsilon,\delta+2\epsilon]} \equiv 1 \quad \text{und} \quad \tilde{\tau}_{[1-(\delta+2\epsilon),1-(\delta+\epsilon)]} \equiv -1 \quad \text{für} \quad \delta + 2\epsilon < \frac{1}{2}.$$

Dann können wir $\tilde{\tau}_{[\delta+2\epsilon,1-(\delta+2\epsilon)]}$ durch eine Funktion f mit

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

fortsetzen. Auf $[-\delta, \delta]$ ist $h^\tau = dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1$, wir erhalten also hier die flache Metrik zurück (insbesondere ist die Holonomie trivial und alle geschlossenen Nullgeodäten vollständig), und wir können wie in (i) harmonische Spinoren konstruieren können. Der Zylinder ist nicht konform flach, da, wie in 2.4.13 angeführt, eine unvollständige isotrope Geodäte existiert. Auch hat jeder der so konstruierten Spinoren Nullstellen, d.h. unserer früheres Kriterium für global konforme Flachheit (siehe 3.3.18 bzw. 3.4.50) ist nicht anwendbar.

Mit dem Beispiel haben wir faktisch bewiesen:

3.4.73 SATZ. *Sei $(M^{1,1}, [g])$ eine kompakte μ -Fläche. Dann ist $\delta_+ = 0, 1$ oder $+\infty$. Dabei sind diese Fälle wie folgt charakterisiert:*

- (i) (a) *Existiert eine dichte X -Linie oder*
- (b) *gilt auf $(M^{1,1}, [g])$ die Bedingung (NR) oder*
- (c) *existiert kein (resonanter) X -flacher Zylinder, so ist $\delta_+ = 0$ oder 1 .*

Gilt insbesondere $\delta_+ = 1$, so treten nur die Fälle (a) oder (b) auf.

- (ii) *Ist $(M^{1,1}, [g])$ resonant X -flach, so gilt $\delta_+ = +\infty$.*

Beweis. Sei $\delta_+ \geq 2$. Dann existiert gemäß 3.4.70 ein resonanter X -flacher Zylinder, und wir können nach 3.4.72 (i) unendlich viele linear unabhängige Spinoren konstruieren, d.h. $\delta_+ = +\infty$. Also treten lediglich die Fälle $\delta_+ = 0, 1$ oder $+\infty$ auf.

Wie oben beschrieben muß für $\delta_+ = +\infty$ ein resonanter X -flacher Zylinder existieren, d.h. (ii) ist äquivalent zu $\delta_+ = +\infty$. Nehmen wir nun an, es existierte kein resonanter X -flacher Zylinder. Dann gilt $\delta_+ \leq 1$ (vgl. 3.4.70), und es treten lediglich die folgenden drei Fälle auf:

- (i) Es existiert eine dichte Nulllinie. Dies ist aber nach 3.4.41 auch hinreichend für $\delta_+ \leq 1$.
- (ii) $(M^{1,1}, g)$ erfüllt (NR) . Dies ist nach 3.4.64 ebenfalls hinreichend für $\delta_+ \leq 1$.
- (iii) $(M^{1,1}, g)$ erfüllt (R) , aber kein resonanter Zylinder ist X -flach. Dies ist bereits hinreichend für $\delta_+ = 0$: Sei φ ein positiver harmonischer Spinor. Angenommen, dieser wäre nicht trivial. Dann ist

φ aber nicht identisch 0 auf jedem resonantem Zylinder (vgl. 3.4.69 (i)), d.h. es existiert ein $x \in R$, R resonant, mit $\varphi(x) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen verschwindet φ nicht auf einer Umgebung U von x , und somit ist jede geschlossene X -Linie $l_{x'}$ mit $x' \in U$ auch \mathcal{X} -flach. Also existierte doch ein resonanter X -flacher Zylinder, und es folgte $\delta_+ = +\infty$ — Widerspruch. ■

3.4.74 BEMERKUNGEN.

(i) Aus der Invarianz der Nullstellen und der Dimension des Kernes (vgl. 3.2.15) folgt unmittelbar, daß X -flache resonante Zylinder konforme Invarianten sind.

(ii) Wir wollen noch einmal auf die ad-hoc-Annahme (∂_+) bzw. (∂_-) zurückkommen, jetzt vor dem Hintergrund aus 3.4.73. Gemäß diesen Satzes sind alle geschlossenen Diagonalmetriken g_λ , für die $\sigma_\lambda \in \mathbb{Q}$ ist, X -flach resonante Tori. Die Voraussetzung (∂_+) bzw. (∂_-) scheint also die Geschlossenheit, Vollständigkeit und X - bzw. Y -Flachheit der isotropen Geodäten zu bewirken. Im Gegensatz zu Beispiel 3.4.72 (ii) können wir jedoch harmonische Spinoren ohne Nullstellen konstruieren, und die Differenz zweier solcher positiver harmonischer Spinoren kann nicht auf einem Zylinder verschwinden, d.h. die resonanten geschlossenen Diagonalmetriken lassen keine nicht resonanten Zylinder zu. Mit anderen Worten: Alle Nulllinien sind geschlossen. Dies impliziert aber die Vollständigkeit der Nullgeodäten. Nun gaben wir in 3.4.32 eine Metrik mit unvollständigen Nullgeodäten an. Ergibt sich hier ein Widerspruch? Wir greifen unser damaliges Beispiel von neuem auf und untersuchen die Nullgeodäten auf Vollständigkeit mittels der von Sánchez bewiesenen Kriterien: Die betrachtete Metrik war

$$g_0 = (-1 + (1 + \frac{c}{f(2x)})^2)dx^2 - 2(1 + (1 + \frac{c}{f(2x)})^2)dxdy + (-1 + (1 + \frac{c}{f(2x)})^2)dy^2.$$

In der Schreibweise von [Sá97] ist also

$$F(x) = -(1 + (1 + \frac{c}{f(2x)})^2) \text{ und } G(x) = 1 - (1 + \frac{c}{f(2x)})^2.$$

Die X -Vektorfelder waren von der Form $\partial_1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_2}\partial_2$ und die Y -Vektorfelder von der Form $\partial_1 - \frac{\lambda_1}{-\lambda_2}\partial_2$ (bei der Herleitung von 3.4.33 nahmen wir ja $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ an, um das \mathcal{X} -Vektorfeld vom \mathcal{Y} -Vektorfeld zu unterscheiden; weil $\lambda_2 < 0$, müssen wir also ein Minuszeichen hinzufügen). Dann ist – wir benutzen weiterhin die Schreibweise aus [Sá97] – $C_X = C_Y = 0$,

$$D_Y = g_0(Y, \partial_y) = \frac{1}{2}g_0(Y, \partial_1 + \partial_2) = \frac{1}{2}(-\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2) < 0$$

und

$$D_X = g_0(X, \partial_y) = \frac{1}{2}g_0(X, \partial_1 + \partial_2) = \frac{1}{2}(\underbrace{-\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2}_{-f^2+f^2+fc}) = \frac{1}{2}fc > 0.$$

Wir wenden nun Kriterium (2A) an (siehe Anhang aus [Sá97]). Wir wissen, daß $G(p_i) = 0$ genau dann gilt, falls $(1 + \frac{c}{f(2p_i)})^2 = 1$ ist, d.h. in den Nullstellen von G gilt $F(p_i) = -2 < 0$. Sei

$$\gamma_Y = (x_1^Y, x_2^Y) \text{ bzw. } \gamma_X = (x_1^X, x_2^X)$$

die von Y bzw. X in einem Punkt p erzeugte isotrope Geodäte. Dann ist $x_1^{Y'}$ und $x_1^{X'}$ ungleich 0 (anderenfalls wäre γ' in einem Punkte nicht isotrop) und gemäß unserer Wahl des X - und Y -Vektorfeldes ist $x_1^{Y'} > 0$ und $x_1^{X'} > 0$, d.h. $\epsilon_X = \epsilon_Y = 1$. Dann gilt für γ_Y :

$$\epsilon_Y \frac{D_Y}{F(p_i)} > 0,$$

d.h. alle Y -Geodäten sind vollständig ((2A)), wohingegen

$$\epsilon_X \frac{D_X}{F(p_i)} < 0,$$

d.h. alle X -Geodäten sind unvollständig (vgl. Kap. III, Lemma 24 aus [Sá94]). Dieses Beispiel illustriert noch einmal die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Verlauf und Vollständigkeit einerseits und Existenz harmonischer Spinoren bzw. Twistor-Spinoren andererseits.

3.4.5 Abschließende Bemerkungen und offene Fragen

3.4.75 KOMPAKTE LORENTZ-FLÄCHEN IM VERGLEICH ZU KOMPAKTEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN UND HÖHERDIMENSIONALEN PSEUDORIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN. Die Dimension des Kernes hängt für μ -Flächen entscheidend vom Verlauf der Nulllinien ab. Umgekehrt erlaubt aber Kenntnis der Dimension Aussagen über die Nulllinien und über die Existenz vollständiger isotroper Geodäten. Im Gegensatz zu Riemannschen Flächen vom Genus ≤ 2 ist also die Dimension *nicht* rein topologisch obstruiert (vgl. [Hi74], Satz 2.3), und wir *können* konforme Klassen mit Hilfe spingometrischer konformer Invarianten unterscheiden. Allerdings involviert der Fall $\delta_{\pm}^0 \leq 1$ nur die Form der Nulllinien; somit ist die Dimension lediglich eine "stetig" konforme Invariante".

Im Gegensatz zu Riemannschen Flächen kommt auch noch ein *dynamisches* Element hinzu: Resonante Zylinder sind in der Regel instabil, d.h. ihre Existenz ist äußerst sensibel gegenüber minimalen Störungen der konformen Klasse. Wie wir schon anhand der geschlossenen Diagonalmetriken erkannten, wird fast sicher (im maßtheoretischen Sinne) eine dichte Nulllinie existieren und der Kern daher nicht degeneriert sein (für stabilitätstheoretische Fragen, insbesondere das Problem der Arnoldschen Zungen, siehe [Ar88]).

Eine Übertragung der hier verwendeten Methoden dürfte auf höhere indefinite Signaturen dürfte schwierig sein; der Orthoformität harmonischer Spinoren lag ja gerade die Zweidimensionalität zu-

grunde. Dies implizierte beispielsweise auch die hohe Symmetrie zwischen harmonischen und Twistor-Spinoren, zu der es in höheren Dimensionen kein Analogon gibt.

3.4.76 EINIGE OFFENE FRAGEN.

(i) Die Existenz nullstellenfreier harmonischer bzw. Twistor-Spinoren entlang geschlossener Nulllinien bewirkt die “ \mathcal{X} -Flachheit”. Wie kann diese geometrisch beschrieben werden, z.B. durch eine Krümmungsbedingung?

(ii) Die Ergebnisse legen den Schluß nahe, die Degeneriertheit als ein Maß für die Regularität der Nulllinien zu betrachten. Auf einfach zusammenhängenden wie auf kompakten Flächen konnten stets konforme Klassen gefunden werden, die ein ”schönes” globales Nulllinienverhalten aufwiesen. Kann auf jeder Lorentz-Fläche eine konforme Klasse mit degeneriertem Kern bzw. regulärem Nulllinienverhalten definiert werden?

(iii) Was kann über nicht kompakte und nicht einfachzusammenhängende Lorentz-Flächen ausgesagt werden? Können andere Werte als 0, 1 oder $+\infty$ auftreten? Wie weit reicht die Symmetrie von harmonischen und Twistor-Spinoren? Hier wäre es interessant, asymptotische Zylinder, auf denen kein Massenfunktional definiert werden kann, zu studieren und nach harmonischen Spinoren zu suchen, die nicht null auf den Asymptoten, aber null auf den geschlossenen Grenzzyklen sind. Hier könnte man Beispiele für Lorentz-Flächen erhalten, wo δ_+ (δ_- , τ_+ , τ_-) andere Werte als 0, 1, $+\infty$ annimmt.

Diese Frage ist verknüpft mit der folgenden: Jede pseudoriemannsche Spin-Struktur kann zu einer Spin-Struktur auf einer pseudoriemannschen Überlagerung geliftet werden (siehe [Ba81], Kap. 2.3). Welche Beziehung besteht zwischen den Kernen der jeweiligen Dirac- bzw. Twistor-Operatoren? Welche Aussagen lassen sich über das globale Verhalten der Nulllinien der Überlagerung bzw. der Basis machen?

Literatur

- [Ah79] L.AHLFORS. *Complex analysis*. 3rd ed., McGraw–Hill, 1979.
- [AhSa60] L.AHLFORS, L.SARIO. *Riemann surfaces*. Princeton, Princeton University Press, 1960.
- [Ar88] V.ARNOLD. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. 2nd ed., New York, Springer–Verlag, 1988.
- [Ba81] H.BAUM. *Spin–Strukturen und Dirac–Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*. Leipzig, Teubner, 1981.
- [BaFrGrKa91] H.BAUM, T.FRIEDRICH, R.GRUNEWALD, I.KATH. *Twistors and Killing spinors on Riemannian manifolds*. Leipzig, Teubner, 1991.
- [Bä92] C.BÄR. *Lower eigenvalue estimates for Dirac Operators*. Math. Ann. **293** (1992), 39–46.
- [Bä98] C.BÄR. *On harmonic spinors*. Acta Phys. Polon. B **29**, 859–869 (1998).
- [BäSc92] C.BÄR, P.SCHMUTZ. *Harmonic Spinors on Riemannian surfaces*. Ann. Glob. Anal. Geom. **10** (1992), 263–273.
- [BeEhEa96] J.BEEM, P.EHRLICH, K.EASLY. *Global Lorentzian geometry*. 2nd ed., New York, Marcel Dekker, 1996.
- [BiPf83] E.BINZ, R.PFERSCHY. *The Dirac–Operator and the change of the metric*. C.R. Math. Acad. Sci. Canada, Soc. R. Can. **5** (1983), 269–274.
- [Bo98] C.BOHLE. *Killing and Twistor Spinors on Lorentzian manifolds*. Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 1998.
- [Br93] G.BREDON. *Topology and geometry*. New York, Springer–Verlag, 1993.
- [Ca89] Y.CARRIÈRE. *Autour de la conjecture de L.Markus sur les variétés affines*. Invent. Math. **95** (1989), 615–628.
- [CaRo94] Y.CARRIÈRE, L.ROZOY. *Complétude des métriques Lorentziennes de T^2 et difféomorphismes du cercle*. Bol. Soc. Bras. Mat., Nova Ser. **25**, No.2 (1994) 223–235.
- [CrFoGa96] V.CRUCEANU, P.FORTUNY, P.M.GADEA. *A survey in paracomplex geometry*. Rocky Mount. J. Math., **26**, No.1 (1996), 83–115.

- [De32] A.DENJOY. *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. de Math. **11** (1932), 333–375.
- [Di69] J.DIEUDONNÉ. *Éléments d'analyse, tome 1*. Paris, Gauthiers–Villars, 1969.
- [FaKr91] H.FARKAS, I.KRA. *Riemann surfaces*. 2nd ed., New York, Springer, 1991.
- [Fr80] T.FRIEDRICH. *Der erste Eigenwert des Dirac–Operators einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung*. Math. Nachr. **97** (1980), 117–146.
- [Fr84] T.FRIEDRICH. *Zur Abhängigkeit des Dirac–Operators von der Spin–Struktur*. Collect. Math. **48** (1984), 57–62.
- [Fr97] T.FRIEDRICH. *Dirac–Operatoren in der Riemannschen Geometrie*. Wiesbaden, Vieweg, 1997.
- [Ga86] G.GALLOWAY. *Compact Lorentzian manifolds without closed non spacelike geodesics*. Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 119–123.
- [Ge68] R.GEROCH. *What is a singularity in general relativity*. Ann.Phys. (N.Y.) **48** (1968), S.526–540.
- [GuPo74] V.GUILLEMIN, A.POLLACK. *Differential topology*. Englewood Cliffs, Prentice–Hall, 1974.
- [Ha24] H.HAMBURGER. *Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen*, Math. Z. **19** (1924), 50–66.
- [Hi74] N.HITCHIN. *Harmonic Spinors*. Adv. in Mathematics, **14** (1974), 1–55.
- [Hi68] J.HALE. *Ordinary differential equations*. New York, Wiley–Interscience, 1969.
- [Hm82] P.HARTMAN. *Ordinary differential equations*. 2nd ed., Boston, Birkhäuser, 1982.
- [Ho83] HOPF H. *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Mathematics 1000, Springer, 1983.
- [Hu94] D.HUSEMOLLER. *Fibre bundles*. 3rd ed., New York, Springer–Verlag, 1994.
- [Hz66] F.HIRZEBRUCH. *Topological Methods in algebraic geometry*. New York, Springer, 1966.
- [Ka68] M.KAROUBI. *Algèbres de Clifford et K–Théorie*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, **1** (1968), 161–270.
- [Kd97] J.KONDERAK. *A Weierstrass representation theorem for Lorentzian surfaces*. Preprint der Università delgi Studi di Bari, 1997.

- [Kl78] W.KLINGENBERG. *Lectures on closed geodesics*. Berlin, Springer–Verlag, 1978.
- [KoNo63] S.KOBAYASHI, K.NOMIZU. *Foundations of differential geomtry, vol. I*. New York, John Wiley&Sons, 1963.
- [KoNo69] S.KOBAYASHI, K.NOMIZU. *Foundations of differential geomtry, vol. II*. New York, John Wiley&Sons, 1969.
- [KnSt88] B.KONSTANT, S.STERNBERG. *The Schwartzian derivative and the conformal geometry of the Lorentz hyperboloid*. In: M.Cahen, M.Flato (Eds.): *Quantum theories and geometry (1988)*, 113–125.
- [Ku85] R.KULKARNI. *An analogue of the Riemann mapping theorem for Lorentz metrics*. Proc. R. Soc. Lond. A **401** (1985), 117–130.
- [KüRa94] W.KÜHNEL, H.B.RADEMACHER. *Twistor Spinors with zeros*. Int. J. Math. **5** (1994), 877–895.
- [KüRa97] W.KÜHNEL, H.B.RADEMACHER. *Twistor Spinors on conformally flat zeros*. Illinois J. Math. **41** (1997), 495–503.
- [La99] C.LANGE. *Der Diracoperator und sein Spektrum auf semiriemannschen Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Freie Universität Berlin, 1999.
- [Li63] A.LICHNEROWICZ. *Spineurs harmoniques*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B **257** (1963), 7–9.
- [Ll88] J.LAFUENTE LÓPEZ. *A geodesic completeness theorem for locally symmetric Lorentz manifolds*. Rev. Mat. Univ. Complutense Madrid **1** (1988), 101–110.
- [LwMi89] H.LAWSON, M.–L.MICHELSON. *Spin geometry*. Princeton, Princeton University Press, 1989.
- [Ma73] J.MARSDEN. *On completeness of homogeneous pseudo–Riemannian manifolds*. Indiana Univ.Math.J. **22** (1973), 1065–1066.
- [Mi63] J.MILNOR. *Spin–structures on manifolds*. Enseignement Mathem. **9** (1963), 55–62.
- [Mi65] J.MILNOR. *Topology from the differentiable viewpoint*. 2nd print., Charlottesville, University press of Virginia, 1969.
- [MiSt74] J.MILNOR, J.STASHEFF. *Characteristic classes*. Princeton, Princeton university press, 1974.

- [Mr68] H.MARTENS. *Varieties of special divisors on a curve: II.* J. Reine Angew. Math., **233** (1968), 89–102.
- [Ne89] K.NEITZKE. *Die Twistorgleichung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.* Diplomarbeit, Humboldt–Universität Berlin, 1989.
- [NoOz61] K.NOMIZU, H.OZEKI. *The existence of complete Riemannian metrics.* Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 889–891.
- [O’N83] B.O’NEILL. *Semi–riemannian geometry with applications to relativity.* New York, Academic Press, 1983.
- [Po81–86] H.POINCARÉ. *Sur les courbes définies par une équation différentielle.* J. de Math. **7** (1881) 375–422; **8** (1882) 251–296; **1** (1885) 167–244; **2** (1885) 151–217.
- [RoSá93] A.ROMERO, M.SÁNCHEZ. *On the completeness of geodesics obtained as a limit.* J.Math.Phys. **34** (1993), 3768–3774.
- [RoSá₁94] A.ROMERO, M.SÁNCHEZ. *New properties and examples of incomplete Lorentzian tori.* J.Math.Phys. **35** (1994), 1992–1997.
- [RoSá₂94] A.ROMERO, M.SÁNCHEZ. *On completeness of compact Lorentzian Manifolds.* Geometry and Topology of Submanifolds VI, World Sci. Pub. Co. (1994), 171–182.
- [RoSá₃94] A.ROMERO, M.SÁNCHEZ. *Geodesic completeness and conformal Lorentzian moduli space on the Torus.* An. Fis., Monogr. **2**, (1994), 189–197.
- [RoSá95] A.ROMERO, M.SÁNCHEZ. *Completeness of compact Lorentz manifolds admitting a timelike conformal Killing vector field.* Proc. Am. Math. Soc. **123**, No.9 (1995), 2831–2833.
- [SaWu77] R.SACHS, H.WU. *General relativity for mathematicians.* New York, Springer–Verlag, 1977.
- [Sá94] M.SÁNCHEZ. *Completeness geodesica de variedades semi–riemannianas compactas.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1994.
- [Sá97] M.SÁNCHEZ. *Structure of Lorentzian tori with a Killing vector field.* Trans. Am. Math. Soc. **349**, No.3 (1997), 1063–1080.
- [Sm95] R.SMYTH. *Characterization of Lorentz surfaces via the conformal boundary.* Ph.D. Thesis, Rutgers University, 1995.

- [Sm96] R.SMYTH. *Uncountably many C^0 conformally distinct Lorentz surfaces and a finiteness theorem*. Proc. Am. Math. Soc. **124**, No.5 (1996), 1559–1566.
- [Sm?] R.SMYTH. *Compactification of Lorentz surfaces*. Preprint.[Ta97]
- [SmWe96] R.SMYTH, T.WEINSTEIN. *How many Lorentz surfaces are there?*. Topics in Geometry. In memory of Joseph d'Atri, ed. by S.Gindikin, Boston, Birkhäuser. Prog. Nonlinear Differ. Equ. Appl. **20** (1996) 315–330.
- [Sp₁79] M.SPIVAK. *A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 1*. 2nd ed., Berkeley, Publish or Perish, 1979.
- [Sp₄79] M.SPIVAK. *A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 4*. 2nd ed., Berkeley, Publish or Perish, 1979.
- [Sp₅79] M.SPIVAK. *A comprehensive introduction to differential geometry, vol. 5*. 2nd ed., Berkeley, Publish or Perish, 1979.
- [StZi94] R.STÖCKER, H.ZIESCHANG. *Algebraische Topologie*. 2.Aufl., Stuttgart, B.G.Teubner, 1994.
- [Ta96] M.TAYLOR. *Partial Differential Equations I*. New York, Springer-Verlag, 1996.
- [Tr92] A.TROMBA. *Teichmüller theory in Riemannian geometry*. Basel, Birkhäuser, 1992.
- [Wa73] N.WALLACH. *Harmonic Analysis on homogeneous spaces*. New York, Marcel Dekker, 1973.
- [We96] T.WEINSTEIN. *An introduction to Lorentz surfaces*. Berlin, de Gruyter, 1996.
- [Wo84] J.WOLF. *Spaces of constant curvature*. 5th ed., Wilmington, Publish or Perish, 1984.
- [Yu90] U.YURTSEVER. *Test fields on compact space-times*. J. Math. Phys. **31** (1990), 3064–3078.
- [Yu91] U.YURTSEVER. *A simple proof of geodesical completeness for compact space-times of zero curvature*. J. Math. Phys. **33** (1992), 1295–1300.