Universität Stuttgart

Übungsblatt 3 – Lösungen

Aufgabe 1.
Betrachte die meromorphe Funktion $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}(X)^*$. Diese Funktion ist offensichtlich holomorph in $X \setminus (\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{Z}(g))$. Da f und g die gleichen Null- und Polstellen (mit Vielfachheit gezählt) haben, sind alle Punkte in $\mathcal{P}(f) \cup \mathcal{Z}(g)$ hebbare Singularitäten, d. h. $\frac{f}{g}$ ist eine holomorphe Funktion. Folglich ist $\frac{f}{g}$ konstant, da X kompakt ist.

Aufgabe 2.
Sei $f \in \mathcal{M}(X)$ eine meromorphe Funktion mit genau einer einfachen Polstelle. Wir betrachten f als Abbildung $f\colon X \to \mathbb{P}^1$. Da f nur eine Polstelle hat, besteht $f^{-1}(\{\infty\})$ aus genau einem Punkt. Die Tatsache, dass der Pol einfach ist, bedeutet, dass die Verzweigungsordnung von $f^{-1}(\infty)$ gleich 0 ist. Folglich ist $\mu(f,\infty) = 1$, d. h. f ist unverzweigt und definiert somit eine biholomorphe Abbildung $X \to \mathbb{P}^1$.

Aufgabe 3.

(a) Da T_Λ kompakt ist, hat f nur endlich viele Polstellen auf T_Λ. Seien also $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ die Polstellen von f auf $T_\Lambda \setminus \{0\}$ mit Ordnung $n_1, \dots, n_k$. Für jede solche Polstelle a_i hat $(\wp(z) - \wp(a_i))^{n_i}$ eine Nullstelle mindestens der Ordnung n_i. Folglich hat $f(z) \cdot (\wp(z) - \wp(a_i))^{n_i}$ eine hebbare Singularität in a_i. Somit ist die Funktion
$$f(z) \cdot \prod_{i=1}^{k} (\wp(z) - \wp(a_i))^{n_i}$$
eine doppelt-periodische meromorphe Funktion, deren Polstellen in Λ enthalten sind.

(b) Wir führen Induktion über die Ordnung der Polstelle von f in 0. Da f gerade ist, hat die Polstelle eine gerade Ordnung $2n$. Falls $n = 1$, so ist $f = c_{-2}\wp + c_0$ nach Aufgabe 4 (b) vom letzten Übungsblatt, wobei c_i der Koeffizient von z^i der Laurent-Entwicklung von f im Nullpunkt ist (man beachte, dass $c_{-1} = 0$, da f gerade ist). Für $n > 1$ hat die Funktion $f - c_{-2n}\wp^n$ einen Pol in 0 der Ordnung $< 2n$ und ist somit nach Induktionsvorraussetzung ein Polynom in $\wp$.

(c) Zunächst schreiben wir f als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion: Seien $f_1(z) := \frac{1}{2}(f(z) + f(-z))$ und $f_2(z) := \frac{1}{2}(f(z) - f(-z))$. Dann sind f_1 gerade und f_2 ungerade und $f = f_1 + f_2$. Nach Teil (a) gibt es ein Polynom $h_1 \in \mathbb{C}[z]$, sodass $f_1(z) \cdot h_1(\wp(z))$ eine doppelt-periodische meromorphe Funktion ist, deren Polstellen in Λ enthalten sind. Darüber hinaus ist $f(z) \cdot h_1(\wp(z))$ gerade, da sowohl f_1 als auch $\wp$ gerade sind. Folglich gibt es nach Teil (b) ein Polynom $g_1 \in \mathbb{C}[z]$, sodass $f(z) \cdot h_1(\wp(z)) = g_1(\wp(z))$, d. h. $g := \frac{g_1}{h_1}$ ist eine rationale Funktion mit $f = g \circ \wp$. Da $\frac{f_2}{\wp'}$ gerade ist (als Quotient zweier ungerader Funktionen), gibt es folglich auch ein $h \in \mathbb{C}(z)$ mit $\frac{f_2}{\wp'} = h \circ \wp$. Also ist $f = (g \circ \wp) + (h \circ \wp) \cdot \wp'$.

(d) Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ mit $2a \in \Lambda$ gegeben. Da $\wp'$ doppelt-periodisch und ungerade ist, gilt

$$\wp'(a) = \wp'(a - 2a) = \wp'(-a) = -\wp'(a)\,,$$

d. h. a ist eine Nullstelle von $\wp'$. Somit hat $\wp'$ mindestens die drei verschiedenen Nullstellen $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ auf T_Λ. Da $\wp'$ genau eine Polstelle auf T_Λ hat und diese die Ordnung 3 hat, kann es keine weiteren Nullstellen von $\wp'$ geben und diese Nullstellen sind alle einfach (die Anzahl der Null- und Polstellen (mit Vielfachheit gezählt) ist gleich).

(e) Wir vergleichen die Null- und Polstellen beider Seiten der Gleichung. Die Funktion $(\wp'(z))^2$ hat Nullstellen genau in den Punkten $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ und $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ (alle doppelt). Gleiches gilt für die rechte Seite (diese Punkte sind offensichtlich Nullstellen; sie sind doppelt, da auch die Ableitung verschwindet). Beide Seiten haben nur die Polstelle 0. Bei beiden Seiten ist sie von der Ordnung 6. Nach Aufgabe 1 ist die linke Seite folglich ein Vielfaches der rechten Seite. Der Faktor kann beispielsweise durch den Koeffizienten $c_{-6} = 4$ der Laurent-Reihe bestimmt werden.

(f) Wir haben gesehen, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}(X)[Y] \to K_{T_\Lambda}\,, \quad (X, Y) \mapsto (\wp, \wp')$$

surjektiv ist. Nach Teil (e) ist das Ideal $(Y^2 - 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3))$ im Kern der Abbildung enthalten. Da $\mathbb{C}(X)$ ein Körper ist, ist $\mathbb{C}(X)[Y]$ ein euklischer Ring. Es genügt somit zu zeigen, dass aus $g \circ \wp + (h \circ \wp) \cdot \wp' = 0$ für $g, h \in \mathbb{C}(X)$ folgt, dass $g = h = 0$ gilt. Dies folgt daraus, dass erstens die Zerlegung in den geraden und den ungeraden Teil eindeutig ist und zweitens eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf einer kompakten riemannschen Fläche surjektiv ist.