Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (Garbifizierung einer Prägarbe)**.**
Sei M ein topologischer Raum, sei F eine Prägarbe über M und sei $\mathcal{F} = \bigcup_{p\in M} \mathcal{F}_p$ die assoziierte Garbe. Zeigen Sie:

(a) Die Halme $\mathcal{F}_p$ tragen eine natürliche Gruppenstruktur, sodass die kanonischen Abbildungen $F(U) \to \mathcal{F}_p$, $s \mapsto [s]_p$ Gruppenhomomorphismen definieren.
(b) Für $U \subseteq M$ offen und $s \in F(U)$ bilden die Mengen $\mathcal{W}_{U,s} := \bigcup_{p\in U} [s]_p \subset \mathcal{F}$ eine topologische Basis.
(c) Die natürliche Projektion $\pi\colon \mathcal{F} \to M$, welche einem Punkt eines Halmes $\mathcal{F}_p$ dessen Basispunkt p zuordnet, ist ein lokaler Homöomorphismus bezüglich der durch die Basis in Teil (b) definierten Topologie.

Aufgabe 2 (Schnitte einer Garbe)**.**
Sei $\pi\colon \mathcal{F} \to M$ eine Garbe. Zeigen Sie:

(a) Jeder Schnitt $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ ist eine offene Abbildung.
(b) Sind $s, t \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ mit $s(p) = t(p)$ für ein $p \in U$, so existiert eine offene Teilmenge $V \subseteq U$ mit $p \in V$ und $s|_V = t|_V$.

Aufgabe 3 (eine unvollständige Prägarbe)**.**
Sei X eine riemannsche Fläche. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ bezeichne $\mathcal{B}(U)$ den Vektorraum der beschränkten holomorphen Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}$ und für $V \subseteq U$ sei $f \mapsto f|_V$ die gewöhnliche Einschränkungsabbildung. Sei ferner $U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ eine offene Überdeckung.
Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{\mathcal{B}(U) \colon U \subseteq X \text{ offen}\}$ eine Prägarbe definiert, sodass gilt:

(a) Sind $f, g \in \mathcal{B}(U)$ mit $f|_{U_\alpha} = g|_{U_\alpha}$ für alle $\alpha \in I$, so ist $f = g$.
(b) Sind $f_\alpha \in U_\alpha$ für alle $\alpha \in I$ mit $f_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in I$ gegeben, so existiert im Allgemeinen kein $f \in \mathcal{B}(U)$ mit $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Aufgabe 4 (exakte Sequenzen)**.**
Zeigen Sie, dass eine Sequenz $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ von Garben über M genau dann exakt ist, wenn für alle $p \in M$ die induzierte Sequenz der Halme $\mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p \to \mathcal{H}_p$ exakt ist.