



Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (hyperelliptische riemannsche Flächen).

Sei $g \geq 2$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass es eine kompakte riemannsche Fläche vom Geschlecht g gibt, welche eine meromorphe Funktion besitzt, die genau zwei Polstellen hat (mit Vielfachheit gezählt).

Bemerkung: Eine solche riemannsche Fläche wird *hyperelliptisch* genannt.

Aufgabe 2 ($\sqrt[3]{1 - z^3}$).

Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^3 + z^3 - 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$.

- Bestimmen Sie alle Verzweigungspunkte von π .
- Bestimmen Sie alle Null- und Polstellen von $f + \pi$.
- Berechnen Sie die elementarsymmetrischen Funktionen von $f + \pi$ bezüglich π .

Aufgabe 3 ($\sqrt[n]{1 - z^n}$).

Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^n + z^n - 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$. Zeigen Sie, dass das Geschlecht g von X gegeben ist durch

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Aufgabe 4 (explizite Darstellung als algebraische Funktion [Präsenzaufgabe]).

- Sei (X, π, f) die algebraische Funktion von $T^2 + z^8 + 1 \in \mathbb{C}(z)[T]$. Zeigen Sie, dass X biholomorph zur riemannschen Fläche X aus Aufgabe 1 vom Übungsblatt 4 ist.
- * Sei Y die riemannsche Fläche Y aus Aufgabe 1 (c) vom Übungsblatt 4. Bestimmen Sie ein separables Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$, sodass sich Y als algebraische Funktion von $T^2 + P(z) \in \mathbb{C}(z)[T]$ schreiben lässt.

Aufgabe 5 (isomorphe Körper von meromorphen Funktionen).

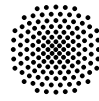
Seien X und Y zwei kompakte riemannsche Flächen, welche folgende Bedingung erfüllen: Sind a_1, \dots, a_n verschiedene Punkte und c_1, \dots, c_n komplexe Zahlen, so existiert eine meromorphe Funktion f mit $f(a_k) = c_k$ für $k = 1, \dots, n$.

Zeigen Sie: Sind $\mathcal{M}(X)$ und $\mathcal{M}(Y)$ isomorph als \mathbb{C} -Algebren, so sind X und Y biholomorph.

Bemerkung: Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass diese Bedingung immer erfüllt ist.

Hinweis: Schreiben Sie X und Y als algebraische Funktion, welche durch ein und dasselbe irreduzible Polynom definiert ist.

Bitte wenden!



Aufgabe 6 (Einbettung eines Torus in den \mathbb{P}^2 [Präsenzaufgabe]).

Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $\wp: \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ die Weierstraß'sche \wp -Funktion bezüglich Λ . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad [z] \mapsto \begin{cases} [1 : \wp(z) : \wp'(z)] & \text{falls } z \notin \Lambda, \\ [0 : 0 : 1] & \text{falls } z \in \Lambda \end{cases}$$

eine Einbettung mit Bild

$$\{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 : z_0 z_2^2 = 4(z_1 - e_1 z_0)(z_1 - e_2 z_0)(z_1 - e_3 z_0)\}$$

ist, wobei $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$ definiert sind wie in Aufgabe 3 (e) vom Übungsblatt 3.