Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (die Kohomologie von $\mathcal{O} \to \mathbb{P}^1$)**.**
Zeigen Sie, dass $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}) = 0$ gilt.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Leray.

Aufgabe 2 (Berechnung von $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1)$)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U} = (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}, \mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$ eine Leray-Überlagerung für die Garbe Ω^1 der holomorphen 1-Formen auf $\mathbb{P}^1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1) \cong H^1(\mathcal{U}, \Omega^1) \cong \mathbb{C}$$

und dass die Kohomologieklasse von

$$\tfrac{1}{z}\mathrm{d}z \in \Omega^1(U_1 \cap U_2) \cong Z^1(\mathcal{U}, \Omega^1)$$

eine Basis von $H^1(\mathbb{P}^1, \Omega^1)$ ist.

Aufgabe 3 (die Garbe der Divisoren)**.**
Sei X eine riemannsche Fläche und sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Wir definieren

$$D(U) := \{f \colon U \to \mathbb{Z} \mid \{x \in U \colon f \neq 0\} \text{ ist diskret und abgeschlossen}\}$$

und $D = \{D(U) \colon U \subseteq X \text{ offen}\}$. Zeigen Sie:

(a) Für die natürliche Addition $\mathbb{Z}$-wertiger Funktionen definiert D eine vollständige Prägarbe.

(b) Die Garbifizierung von D ist isomorph zur Garbe der Divisoren $\mathcal{D}_X = \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$.

(c) Die Garbe $\mathcal{D}_X$ ist fein.

Aufgabe 4.
Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, sei $P \in \mathbb{C}/\Lambda$ ein Punkt, sei $n \in \mathbb{Z}$ und sei $D = n \cdot P$. Zeigen Sie, dass

$$\dim H^0(\mathbb{C}/\Lambda, \mathcal{O}_D) = \begin{cases} 0 & \text{für } n < 0, \\ 1 & \text{für } n = 0, \\ n & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion.