Blatt 5

Aufgabe 1: Quotienten und Lokalisierungen von Bewertungsringen

Sei A ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass Folgendes äquivalent ist:

(i) A ist ein Bewertungsring in seinem Quotientenkörper;

(ii) sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in A, dann gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.

Folgern Sie, dass für einen Bewertungsring A und jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in A auch die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ und der Quotient $A/\mathfrak{p}$ Bewertungsringe ihrer Quotientenkörper sind.

Aufgabe 2: Lokale Ringe von Bewertungsringen

Sei $A \subset B$ eine Ringerweiterung lokaler Ringe mit maximalen Idealen $\mathfrak{m}_A$ und $\mathfrak{m}_B$ im selben Körper K. Wir sagen, dass B ein *lokaler Ring von A* ist, falls ein Primideal von A existiert, so dass $B = A_\mathfrak{p}$. Zeigen Sie: Ist A ein Bewertungsring eines Körpers K, so ist jeder Unterring von K, welcher A enthält, ein lokaler Ring von A.

Aufgabe 3: Die Bewertung eines Bewertungsrings

Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K . Seien A^* und K^* die multiplikativen Gruppen der Einheiten von A bzw. K . Insbesondere ist A^* eine Untergruppe von K^*, und der Quotient $\Gamma := K^*/U$ ist eine Abelsche Gruppe bezüglich Multiplikation. Wir definieren eine Relation $\leq$ auf den Restklassen $[x]$ bzw. $[y] \in \Gamma$, x, $y \in K^*$, durch

$$[y] \leq [x] \Leftrightarrow \exists\, a \in A \text{ mit } x = a \cdot y,$$

d.h. y teilt x in A. Zeigen Sie zunächst, dass $\geq$ wohldefiniert ist, und weisen Sie die Axiome einer totalgeordneten Abelschen Gruppe nach, nämlich

(i) $\leq$ ist eine *Totalordnung* (d.h. für alle x, $y \in K^*$ gilt $[x] \leq [y]$ oder $[y] \leq [x]$, und beides zusammen impliziert $[x] = [y]$);

(ii) $\leq$ ist mit der Gruppenstruktur *verträglich* (d.h. $[y] \leq [x]$ impliziert $[y] \cdot [\phi] \leq [x] \cdot [\phi]$ für alle $\phi \in K^*$).

Wir nennen Γ die *Bewertungsgruppe* von A. Zeigen Sie, dass für den kanonischen Gruppenmorphismus $\nu : K^* \to \Gamma$, $\nu(x) = [x]$ gilt:

$$A = \{x \in K^* \mid \nu(x) \geq 1\}\ ;$$
$$\forall\, x,\, y \in K^*\ : \nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))\ .$$

Aufgabe 4: Von der Bewertungsgruppe zum Bewertungsring und zurück

Sei $(\Gamma, +)$ eine totalgeordnete Abelsche Gruppe, vgl. vorherige Aufgabe, und sei K ein Körper. Eine *Bewertung von K mit Werten in* Γ ist ein Gruppenmorphismus $\nu : K^* \to \Gamma$ mit

$$\nu(x + y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$$

for all x, $y \in K^*$. Zeigen Sie: Die Menge

$$A := \{x \in K^* \mid \nu(x) \geq 0\}$$

- ist ein Bewertungsring von K;
- die Untergruppe $\nu(K^*)$ von Γ ist die Bewertungsgruppe von A.

Folgern Sie aus dieser und der vorherigen Aufgabe, dass Bewertungsringe und Bewertungsgruppen im Wesentlichen ein und dasselbe sind.