Blatt 3

Aufgabe 1: Vollständige Durchschnitte

Eine Varietät $X \subset \mathbb{P}^n$ der Dimension r wird ein (strikter) **vollständiger Durchschnitt** genannt, falls das Ideal $\mathcal{I}(X)$ von $n-r$ Elementen erzeugt wird. X wird ein **mengentheoretischer Durchschnitt** genannt, falls X der Durchschnitt von $n-r$ Hyperflächen ist.

(i) Sei $X = \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$, so dass $\mathfrak{a}$ von q Elementen erzeugt werden kann $\Rightarrow \dim X \geq n-q$.

(ii) Zeigen Sie, dass jeder strikte vollständige Durchschnitt ein mengentheoretischer Durchschnitt ist.

Aufgabe 2: Analytisch äquivalente Umgebungen

Seien X und Y zwei Varietäten derselben Dimension und $a \in X$ und $b \in Y$ zwei glatte Punkte. Zeigen Sie, dass a und b analytisch äquivalent sind.

Aufgabe 3: Vielfachheiten

Sei $X \subset \mathbb{A}^2$ eine Kurve, welche durch eine algebraische Gleichung $f(x_1, x_2) = 0$ definiert ist. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{A}^2$ ein beliebiger Punkt. Wir wählen Koordinaten (y_1, y_2) des $\mathbb{A}^2$, so dass a der Ursprung ist, und schreibe $f(y_1, y_2) = \sum f_i(y_1, y_2)$ mit homogenen Polynomen f_i vom Grad i. Wir setzen $\mu_a(X) =$ **Multiplizität von** $a =$ der kleinste Grad i, für den $f_i \not\equiv 0$. Zeigen Sie:

(i) $a \in X \Leftrightarrow \mu_a(X) > 0$;

(ii) $a \in X$ ist glatt $\Leftrightarrow \mu_a(X) = 1$.

Berechnen Sie weiterhin für die folgenden Kurven die singulären Punkte und deren Multiplizitäten:

(i) $f(x, y) = xy - x^6 - y^6$;

(ii) $f(x, y) = x^2y + xy^2 - x^4 - y^4$.