Algebraische Geometrie I
Wintersemester 2015
Frederik Witt

Universität Stuttgart

Blatt 9

Aufgabe 1: Affine Überdeckung des projektiven Raumes

Seien $x_0, \dots, x_n$ *homogene Koordinaten auf* $\mathbb{P}^n$. *Für* $i = 0, \dots, n$ *definiere die Mengen* $U_i := \{x_i \neq 0\}$. *Zeigen Sie:*

(i) *Die* U_i *bilden eine offene Überdeckung von* $\mathbb{P}^n$.

(ii) $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$, $\varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0/x_i, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n/x_i)$ *(wobei* $\hat{}$ *Auslassung bedeutet) definiert einen Homöomorphismus zwischen* U_i *und* $\mathbb{A}^n$.

Hinweis: Sei S_h die Teilmenge der homogenen Polynome in $S[n]$. O.B.d.A. sei $i = 0$. Dann betrachte man die Abbildungen $\alpha : S_h \to A[n] = k[y_1, \dots, y_n]$ definiert durch $\alpha(f) = f(1, y_1, \dots, y_n)$ und $\beta : A[n] \to S_h$ definiert durch $\beta(g) = x_0^d g(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) \in S_h$, wobei d der Grad von g ist. Vergleichen Sie $\varphi_0(\mathcal{Z}(T) \cap U_0)$ für $T \subset S_h$ und $\mathcal{Z}(T')$ für $T' \subset A[n]$.

Aufgabe 2: Topologie projektiver Varietäten

Zeigen Sie, dass

(i) $\mathbb{P}^n$ *ein Noetherscher topologischer Raum ist.*

(ii) *jede algebraische Menge* X *of* $\mathbb{P}^n$ *als eindeutige endliche Vereinigung irreduzibler Komponenten geschrieben werden kann, die sich gegenseitig nicht enthalten.*

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Projektiver Abschluss einer affinen Menge

Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät, und identifiziere $\mathbb{A}^n$ mit U_0 via der Abbildung φ_0 der vorherigen Aufgabe. Wir nennen $\bar{X} \subset \mathbb{P}^n$ den **projektiven Abschluss** von X. Zeigen Sie, dass in der Notation der Aufgabe 1 das Ideal $\mathcal{I}(\bar{X}) \subset S[n]$ von $\beta(\mathcal{I}(X))$ erzeugt wird.

Aufgabe 4: Die Kerngarbe

Zeigen Sie, dass

(i) *für jedes* $x \in X$, $(\ker \varphi)_x = \ker(\varphi_x)$ *gilt.*

(ii) $\ker \varphi$ *eine Garbe ist.*