Blatt 8

Aufgabe 1: Irreduzible Komponenten

Sei $X = \mathcal{Z}(x^2 - yz, x(z-1)) \subset \mathbb{A}^3_k$. *Zeigen Sie, dass* X *eine Vereinigung dreier irreduzibler Komponenten ist. Geben Sie die zugehörigen Primideale an.*

Aufgabe 2: Noethersche graduierte Ringe

Sei S *ein graduierter Ring. Zeigen Sie die Äquivalenz von:*

(i) S *ist ein Noetherscher Ring;*

(ii) S_0 *ist Noethersch und* S *ist endlich erzeugt als eine* S_0*-Algebra.*

Aufgabe 3: Homogene Ideale

Zeigen Sie unter Verwendung des Nullstellensatzes (also $\mathcal{I} \circ \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$*), dass für ein homogenes Ideal* $\mathfrak{a} \subset S[n]$ *äquivalent sind:*

(i) $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \varnothing$ *in* $\mathbb{P}^n$*;*

(ii) $\sqrt{\mathfrak{a}} =$ *entweder* S *oder* $S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$*;*

(iii) $S_d \subset \mathfrak{a}$ *für ein* $d > 0$.

Hinweis: Für (i)⇒(ii) betrachte $\mathfrak{a}$ als ein Ideal in $k[n+1]$ und $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ als eine Untermenge in $\mathbb{A}^{n+1}$ (dies ist ein Spezialfall von Satz 1.42 im Skript).

Aufgabe 4: Projektiver Nullstellensatz

Zeigen Sie unter Verwendung des Nullstellensatzes (also $\mathcal{I} \circ \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$*), dass für ein homogenes Ideal* $\mathfrak{a} \subset S[n]$ *und ein homogenes Polynom* $f \in S[n]$ *vom Grad* > 0 *mit* $f(a) = 0$ *für alle* $a \in \mathcal{Z}(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$ *ein* $q > 0$ *mit* $f^q \in \mathfrak{a}$ *existiert.*