Blatt 7

Aufgabe 1: Der Ring der formalen Potenzreihen ist Noethersch

Adaptieren Sie den Beweis von Hilberts Basissatz um zu beweisen: A Noethersch $\Rightarrow$ Der formale Potenzreihenring $A[\![x]\!]$ ist Noethersch.

Aufgabe 2: Endliche Moduln über lokalen Noetherschen Ringen

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Noetherscher Ring, und sei M ein endlicher A-Modul. Dann sind äquivalent:

(i) *M ist frei;*

(ii) *M ist flach;*

(iii) *Exaktheit der Sequenz $0 \to N \to A^n \to M$ bleibt unter Tensorieren mit $k = A/\mathfrak{m}$ erhalten.*

Hinweis: Sei $\bar{m}_1, \ldots, \bar{m}_n$ eine Basis des k Vectorraums $M/\mathfrak{m}M$. Nach Nakayamas Lemma erzeugen $m_1, \ldots, m_n$ den Modul M. Betrachten Sie für $F = A^n$ der freie Modul vom Rang n mit Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ die Abbildung $\phi(e_i) = m_i$.

Aufgabe 3: Produkte für Zariski-Topologien

Identifiziere $\mathbb{A}^2$ mit $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ auf die natürliche Weise. Zeigen Sie, dass die Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2$ nicht der Zariski-Produktopologie auf $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ entspricht.

Aufgabe 4: Koordinatenringe

(i) *Sei $X = \mathcal{Z}(x^2 - y) \subset \mathbb{A}^2_k$. Zeigen Sie, dass $A(X)$ isomorph zu $k[t]$ ist, dem polynomialen Ring in einer Variable.*

(ii) *Sei $Y = \mathcal{Z}(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Zeigen Sie, dass $A(Y)$* nicht *isomorph zu einem polynomialen Ring in einer Variable ist.*