Blatt 6

Aufgabe 1: endliche Präsentationen endlicher Module über Noetherschen Ringen

Sei A ein Noetherscher Ring. Ist M ein endlicher A-Modul, dann hat er eine **endliche Präsentation**, *d.h. es existiert eine kurze, exakte Sequenz der Form*

$$A^q \xrightarrow{\varphi_2} A^p \xrightarrow{\varphi_1} M \to 0.$$

Bemerkung: Jeder endlich präsentierte Modul ist offensichtlich auch endlich erzeugt. Die Aufgabe zeigt, dass für Moduln über Noetherschen Ringen auch die Umkehrung gilt.

Aufgabe 2: Satz von Cohen

Sind alle Primideal von A endlich erzeugt $\Rightarrow$ A ist Noethersch.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge Σ aller Ideale, die nicht endlich erzeugt sind.

Aufgabe 3: Primideale in Artin-Ringen

Sei A nullteilerfrei und Artinsch $\Rightarrow$ A ist ein Körper. Folgern Sie, dass jedes Primideal eines allgemeinen (also nicht notwendigerweise nullteilerfreien) Artin-Rings maximal ist.

Hinweis: Für $a \in A$ impliziert die absteigende Kettenbedingung wegen $(a) \supset (a^2) \supset \ldots \supset (a^k)$ die Gleichung $a^k = xa^{k+1}$ für ein $x \in A$.

Aufgabe 4: Nilpotentes maximales Ideal eines lokalen Artin-Rings

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Artin-Ring. Zeigen Sie: $\mathfrak{m}$ ist nilpotent, d.h., es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^k = 0$.

Hinweis: Die absteigende Kettenbedingung liefert $k \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathfrak{m}^k = \mathfrak{m}^{k+1}$. Angenommen, $\mathfrak{m} \neq 0$. Sei dann $\mathfrak{a}_0$ minimal unter allen Idealen von A mit $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m}^k \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}_0 = (x)$ ein Hauptideal ist, und wenden Sie dann Nakayamas Lemma an.