Algebraische Geometrie I
Wintersemester 2015
Frederik Witt

Universität Stuttgart

Blatt 4

Aufgabe 1: Endlich erzeugte Algebren und endliche erzeugte Moduln

Sei A ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper k, und sei $f \in A \backslash \{0\}$ eine Nichteinheit. Dann ist $A[1/f]$ kein endlicher A-Modul.

Aufgabe 2: Koszul-Komplex eines Paars

Sei A ein faktorieller Ring, und seien x, $y \in A$ zwei teilerfremde Elemente. Wir schreiben $\mathfrak{a} = (x, y) \subset A$ für das von x und y erzeugte Ideal.

(i) *Zeigen Sie, dass die Sequenz*

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} A^2 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{a} \to 0$$

mit $\alpha(a) = (-ay, ax)$ und $\beta(a, b) = ax + by$ exakt ist.

(ii) *Finden Sie ein Beispiel mit $\mathfrak{a} \neq A$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für $\mathfrak{a}$ mindestens zwei Erzeuger benötigt werden, und dass $\mathfrak{a}$ kein freier Modul ist.*

Aufgabe 3: Rang eines freien Moduls

Sei M ein endlicher A-Modul, und sei $\varphi : M \to M$ ein surjektiver Morphismus. Dann ist φ ein Isomorphismus. Insbesondere gilt: Ist M ein freier Modul und isomorph zu A^n, dann hängt n, der sogenannte **Rang** *von M, nicht vom Isomorphismus ab.*

Aufgabe 4: Nulltensoren

Seien $x_i \in M$ und $y_i \in N$ so, dass $\sum x_i \otimes y_i = 0$ in $M \otimes N$. Dann existieren endliche A-Untermoduln M_0 und N_0 von M und N mit $\sum x_i \otimes y_i = 0$ in $M_0 \otimes N_0$.