Blatt 1

Aufgabe 1: Minimale Primideale

Die Menge aller Primideale bildet eine partiell geordnete Menge bezüglich Inklusion, d.h. $\mathfrak{p}_1 \leq \mathfrak{p}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2$. Minimale Element werden *minimale Primideale* genannt. Zeigen Sie mit Hilfe von Zorns Lemma: Jedes Primideal enthält ein minimales Primideal.

Aufgabe 2: Evaluation über algebraisch nicht abgeschlossenen Körpern

Sei $k \subset K$ eine algebraische Körpererweiterung. Für $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ betrachte die Auswertungsabbildung („evaluation map") $\mathrm{ev}_a : k[x_1, \ldots, x_n] \to K$.

(i) Bestimmen Sie das Bild von ev_a.

(ii) Zeigen Sie, dass $\ker \mathrm{ev}_a$ ein maximales Ideal ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $\ker \mathrm{ev}_a = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ gilt (der Durchschnitt wird in $K[x_1, \ldots, x_n]$ genommen).

Aufgabe 3: Wurzeln normierter Polynome

Sei A ein faktorieller Ring, und sei $k = \mathrm{Quot}\, A$ der zugehörige Quotientenkörper. Sei $f \in A[x]$ unitär. Ist $\alpha \in K$ eine Wurzel von $f \Rightarrow \alpha \in A$.

Aufgabe 4: Reduzierte Ringe mit endlich vielen Primidealen

Sei A ein reduzierter Ring mit endlich vielen Primidealen. Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung

$$A \to \oplus_i A/\mathfrak{p}_i, \quad a \mapsto (a \bmod \mathfrak{p}_1, \ldots, a \bmod \mathfrak{p}_n)$$

ist eine Injektion.

(ii) Das Bild hat einen nichttrivialen Schnitt mit jedem Summanden.