

① Clifford Algebren und Dirac-Operatoren

8. Vorlesung
12.05.14

①

Definition: Sei V ein Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform g . Die Clifford-Algebra von V ist eine uniale Algebra $\mathcal{A}$ mit einer Abbildung $\varphi: V \rightarrow \mathcal{A}$ für die gilt:

$$① \quad \varphi(v)^2 = -g(v,v) \cdot 1$$

② Universalität:

Ist $\varphi': V \rightarrow \mathcal{A}'$ eine andere Abbildung von V in eine uniale Algebra $\mathcal{A}'$ mit ①, dann existiert ein eindeutig bestimmter Algebren-Homomorphismus $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ mit einem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A} \\ & \searrow \varphi' & \downarrow \\ & & \mathcal{A}' \end{array}$$

Satz: Zu jedem Vektorraum existiert eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Clifford-Algebra

Beweis: • Eindeutigkeit: da Universalität

• Existenz: ~~Definiert durch die Abbildung~~ $\varphi: V \rightarrow \mathcal{A}$
~~als~~

$$\mathcal{A} = T(V) / \langle x \otimes y + y \otimes x - 2g(x,y) \cdot 1 \rangle$$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ ist die Algebra multiplikativ erzeugt von den Elementen $e_1, \dots, e_n$ einer Basis von V modulo der Relation $e_i \cdot e_j + e_j \cdot e_i = -2g(e_i, e_j) \cdot 1$
d.h. $\mathcal{A}$ ist aufgespannt von $e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k}$, $0 \leq k \leq n$

Bemerkungen: • Die eindeutig bestimmte Clifford-Algebra wird bezeichnet mit $\mathcal{C}\ell(V) = \mathcal{C}\ell(V, g)$
• $\mathcal{C}\ell(V) \cong \wedge^* V$ als Vektorraum
als Algebra nur für $g = 0$
• $\dim \mathcal{C}\ell(V) = 2^n$ für $n = \dim V$
• $\varphi: V \rightarrow \mathcal{C}\ell(V)$ ist injektiv, man schreibt: $V \subset \mathcal{C}\ell(V)$

Beispiel: flacher Fall

Sei V ein reeller Vektorraum mit einer ONB $e_1, \dots, e_n$,

sei S ein Vektorraum und Linksmodul über $\mathcal{C}(V)$

jedem e_i entspricht ein Differentialoperator ∂_i auf $C^\infty(V, S)$

$$\rightarrow \text{Dirac-Operator auf } C^\infty(V, S): \quad Ds = \sum_i e_i \cdot \partial_i s$$

$$\rightarrow D^2 s = \sum_i e_i \partial_i (e_j \partial_j s) = \sum_i e_i e_j \partial_i \partial_j s = - \sum_i \partial_i^2 s$$

$$\rightarrow D^2 = \Delta$$

Ziel: Übertragung auf Mannigfaltigkeiten, Konstruktion einer Wurzel von Δ

Bemerkung: Ein Clifford-Modul eines euklidischen Vektorraumes (V, g)

(*) (i) $\hat{=}$

= Linksmodul über der komplexen Algebra $\mathcal{C}(V) \otimes \mathbb{C} = \mathcal{C}(V^\mathbb{C})$,
d.h. eine komplexe Darstellung der Algebra $\mathcal{C}(V^\mathbb{C})$

$$\mathcal{C}(V^\mathbb{C}) \longrightarrow \text{End}(S)$$

Algebra-Homomorphismus

= komplexer Vektorraum S mit einer $\mathbb{R}$ -linearen
Abbildung $c: V \rightarrow \text{End}_\mathbb{C}(S)$ mit

$$c(v)^2 = -g(v, v) \cdot 1 \quad \forall v \in V$$

Clifford-Multiplikation

(Universalität!)

Übertragung auf Mannigfaltigkeiten:

(M, g) Riemannsche Mf.

$$\bullet \mathcal{C}(TM) := \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}(T_x M) \quad \text{Bündel von Clifford-Algebren}$$

$S \rightarrow M$ sei ein Bündel von Clifford-Modulen

d.h. S ist ein komplexes Vektorbündel, sodass
 S_x für alle $x \in M$ ein Clifford-Modul über $(T_x M, g_x)$ ist

Bemerkung: $\Gamma(S)$ entspricht $C^\infty(V, S)$ aus dem flachen Fall

• Die Richtungsableitung übersetzt sich in eine kovariante Ableitung.
Man benötigt noch Verträglichkeitsrelationen (Bedingungen).

$$\bullet \text{Clifford-Multiplikation:} \quad TM \otimes S \xrightarrow{c} S$$

$$\forall v \in S \mapsto v \cdot s = c(v)(s)$$

punktwise!

Definition:

Ein Clifford-Bündel ist ein Bündel von Clifford-Modulen $S \rightarrow M$ mit einem Zusammenhang ∇ und einer Hermiteschen Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$, die folgende Verträglichkeitsbedingungen erfüllen:

- ① $\langle v \cdot s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, v \cdot s_2 \rangle = 0 \quad \forall v \in T_x M, s_1, s_2 \in S_x$
- ② $\nabla_X (Y \cdot s) = (\nabla_X Y) \cdot s + Y \cdot \nabla_X s \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM), s \in \Gamma(S)$

Bemerkungen:

Oft sind Clifford-Bündel $\mathbb{Z}_2$ -graduiert (Superbündel), d.h.:

- $S = S_+ \oplus S_-$
- $S_+ \perp S_-$
- ∇ erhält $S_{\pm}$
- $c(v) : S_{\pm} \rightarrow S_{\mp}$

Definition:

Der Dirac-Operator D eines Clifford-Bündels S ist definiert als Komposition folgender Abbildungen:

$$D : \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{c} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{\cdot} \Gamma(S)$$

Bemerkungen:

- $D : \Gamma(S_{\pm}) \rightarrow \Gamma(S_{\mp})$
- Sei $\{e_i\}$ eine lokale ONB, dann gilt:

$$Ds = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} s$$

da $\nabla s = \sum_i e_i^* \otimes \nabla_{e_i} s$

Beispiel: Formenbündel

$$S = \wedge^* T^* M \otimes \mathbb{C}$$

isomorph zu $\mathcal{Q}(TM) \otimes \mathbb{C}$ als Vektorbündel
($e_1 \wedge \dots \wedge e_k \mapsto e_1 \dots e_k$ $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$)

- Clifford-Multiplikation: $c(e)w := e^* \wedge w - e \lrcorner w$

da:

$$\begin{aligned} c(e)^2 w &= e \cdot (e^* \wedge w - e \lrcorner w) \\ &= -e \lrcorner (e^* \wedge w) - e^* \wedge (e \lrcorner w) \\ &= -g(e, e)w + e^* \wedge e \lrcorner w - e^* \wedge e \lrcorner w \\ &= -g(e, e)w \\ \rightarrow c(e)^2 &= -g(e, e) \mathbb{1} \end{aligned}$$

- Clifford-Bündel

①:

$$\begin{aligned} \langle v \cdot s_1, s_2 \rangle &= \langle v \wedge s_1, s_2 \rangle - \langle v \lrcorner s_1, s_2 \rangle \\ &= \langle s_1, v \lrcorner s_2 \rangle - \langle s_1, v \wedge s_2 \rangle \\ &= -\langle s_1, v \cdot s_2 \rangle \end{aligned}$$

②:

$$\begin{aligned} \nabla_x (Y \cdot s) &= \nabla_x (Y \wedge s - Y \lrcorner s) \\ &= (\nabla_x Y) \wedge s + Y \wedge \nabla_x s - (\nabla_x Y) \lrcorner s - Y \lrcorner \nabla_x s \\ &= (\nabla_x Y) \cdot s + Y \cdot \nabla_x s \end{aligned}$$

- Dirac-Operator: $D = d + d^*$ de Rham-Quadrat

da

$$\begin{aligned} Ds &= \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} s = \sum_i e_i \wedge \nabla_{e_i} s - e_i \lrcorner \nabla_{e_i} s \\ &= ds + d^*s \end{aligned}$$

Bemerkung: $D^2 = (d + d^*)^2 = dd^* + d^*d = \Delta$

Beispiel: Twistbündel, getwisteter Dirac-Operator $D_E: \Gamma(S \otimes E) \rightarrow \Gamma(S \otimes E)$

Bezeichnung: Sei $K \in \Omega^2(\text{End } S)$, dann nennt man

$$Ks := \sum_{i,j} e_i e_j \cdot K(e_i, e_j) s \quad s \in \Gamma(S)$$

die Clifford-Kontraktion von K .

Bemerkung: • Typisches Beispiel ist $K = R^S$ die Krümmung von S
• $K \in \text{End}(S)$

Satz (Weitzenböck-Formel): $D^2 = \nabla^* \nabla + K$ auf $\Gamma(S)$

Beweis: man rechnet in $x \in M$ mit $\nabla_{e_i} e_j = 0$ in x die lokale ONB kann o.B.d.A. gewählt werden

$$\begin{aligned} D^2 s &= \sum_i e_j \nabla_{e_j} (e_i \cdot \nabla_{e_i} s) \\ &= \sum_{i,j} e_j e_i \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} s \\ &= -\sum_{i,j} \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} s + \sum_{i,j} e_j e_i (\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} - \nabla_{e_i} \nabla_{e_j}) s \\ &= \nabla^* \nabla s + Ks \end{aligned}$$

Bemerkung: • Sei E ein beliebiges Vektorbündel über M . Man definiert den Bochner-Laplace Operator auf $\Gamma(E)$ durch

$$D^* D s := -\text{tr}(D^2 s) = -\sum_i (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}) s$$

wobei: $D^2: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E)$

$$D^2_{x,y} s = \nabla_x \nabla_y s - \nabla_{\nabla_x y} s$$

$$\begin{aligned} s \mapsto \sum_i e_i \otimes \nabla_{e_i} s &\mapsto \sum_{i,j} e_j \otimes \nabla_{e_j} (e_i \otimes \nabla_{e_i} s) \\ &= \sum_{i,j} e_j \otimes \nabla_{e_j} (e_i \otimes \nabla_{e_i} s + e_i \otimes \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} s) \end{aligned}$$

$$\nabla_{e_j} e_i = \sum_k \langle \nabla_{e_j} e_i, e_k \rangle e_k = -\sum_k \langle e_i, \nabla_{e_j} e_k \rangle e_k$$

- Im Weiteren ist K immer die Clifford-Kontraktion zur Krümmung von S .

Lemma: • Sei ∇^* der zu ∇^E adjungierte Operator, dann gilt

$$\nabla^* = -\operatorname{tr}(\nabla^{TM \otimes E})$$

dh. es gilt:

$$(\nabla^E s, \sigma) = (s, \nabla^* \sigma)$$

L^2 -Skalarprodukt

für alle $s \in \Gamma(E)$ und $\sigma \in \Gamma(T^*M \otimes E)$

• Insbesondere gilt: $(\nabla^E)^* \nabla^E s = -\sum_i [\nabla_{e_i}^E \nabla_{e_i}^E s - \nabla_{\nabla_{e_i}^E e_i}^E s]$

Beweis: • Nehme auf $E \otimes F$: $\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle_E \langle f_1, f_2 \rangle_F$

$$\sigma_1, \sigma_2 \in T^*M \otimes E$$

$$\Rightarrow \sigma_a = \sum_i e_i^* \otimes \sigma_a(e_i) \quad a=1,2$$

$$\Rightarrow \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = \sum_i \langle \sigma_1(e_i), \sigma_2(e_i) \rangle$$

$$\in \mathbb{R} \quad \langle \nabla \sigma_1, \nabla \sigma_2 \rangle = \sum_i \langle \nabla_{e_i} \sigma_1, \nabla_{e_i} \sigma_2 \rangle$$

• $\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \quad \nabla s = \sum_i e_i^* \otimes \nabla_{e_i} s$

$$\Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla^*} \Gamma(E)$$

$$\Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla^{TM \otimes E}} \Gamma(\underbrace{T^*M \otimes T^*M \otimes E}) \xrightarrow{\operatorname{tr}} \Gamma(E)$$

• $\langle \nabla e, x \otimes f \rangle = \sum_i \langle e_i \otimes \nabla_{e_i} e, x \otimes f \rangle = \sum_i \langle e_i, x \rangle \langle \nabla_{e_i} e, f \rangle$
 $= \langle \nabla_x^E e, f \rangle$
 $= x(\langle e, f \rangle) - \langle e, \nabla_x f \rangle$

• $\operatorname{tr}(\nabla^{TM \otimes E} x \otimes f) = \operatorname{tr}(\sum_i e_i \otimes \nabla_{e_i} x \otimes f + e_i \otimes x \otimes \nabla_{e_i} f)$
 $= \sum_i \langle e_i, \nabla_{e_i} x \rangle f + \langle e_i, x \rangle \nabla_{e_i} f$
 $= \operatorname{div}(x) \cdot f + \nabla_x f$

$$\Rightarrow \langle \nabla e, x \otimes f \rangle - \langle e, \nabla^*(x \otimes f) \rangle = - \int (x(\langle e, f \rangle) - \operatorname{div} x \langle e, f \rangle) \operatorname{vol}$$

$$= - \int \operatorname{div}(\langle e, f \rangle \cdot x) \operatorname{vol} = 0$$

$$\langle e, \nabla^*(x \otimes f) \rangle = \langle e, -\operatorname{div}(x) f \rangle - \langle e, \nabla_x f \rangle$$

$$= -\operatorname{div}(x) \langle e, f \rangle - \langle e, \nabla_x f \rangle$$