

Die Euler - Klasse

(Lassus: X)

Definition: Sei $A \in \mathfrak{so}(2m)$, dann ist die Pfaffsche von A definiert durch die Gleichung:

$$\det(A) = \text{Pf}(A)^2$$

(bestimmt bis auf ein Vorzeichen)

Bemerkungen: • A habe die komplexen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, dann gilt:

$$\text{Pf}(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_m$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & \\ -\lambda_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 & \lambda_m \\ & & & -\lambda_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A \in \mathfrak{so}(2m) \cong \wedge^2 \mathbb{R}^{2m}$$

$$A = \frac{1}{2} \sum_i A_i e_i \wedge e_i$$

$$\rightarrow A^m = m! \cdot \text{Pf}(A) \text{ vol}$$

$$\text{Vol} = e_1 \wedge \dots \wedge e_{2m}$$

Lemma: ① $\text{Pf} \in P^{*m}(\mathfrak{so}(2m))^{\mathfrak{so}(2m)}$

(Grad m !)

$$\textcircled{2} \quad \text{Pf}(A) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \dots \cdot A_{\sigma_{2m-1} \sigma_{2m}}$$

$$\text{insbesondere: } m=1 : \text{Pf}(A) = A_{12}$$

$$m=2 : \text{Pf}(A) = A_{12} A_{34} - A_{13} A_{24} + A_{14} A_{23}$$

③ $A \in \mathfrak{u}(m) \subset \mathfrak{so}(2m)$, dann gilt:

$$\text{Pf}(A) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot i^m \cdot \det(A)$$

Einbettg. entsprekend:
 $\mathfrak{u}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$
 $v_1 + i v_2 \mapsto (v_1, v_2)$

Beweis: (siehe H. Baum)

zu ①: aus der Definition folgt: $\text{Pf}(g X g^{-1}) = \varepsilon(g) \text{Pf}(X)$
 für alle $X \in \mathfrak{so}(2m)$, $g \in \text{SO}(2m)$

Pf, ε sind stetig, $\text{SO}(2m)$ ist zusammenhängend

$\Rightarrow \varepsilon$ ist konstant

$$\Rightarrow \varepsilon = 1 \quad \text{da} \quad \varepsilon(E) = 1$$

zu ③:

$$X \in \mathfrak{u}(m) \subset \mathfrak{so}(2m)$$

$$X_{\mathbb{C}} = A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = X_{\mathbb{R}}$$

$$X_{\mathbb{R}} = i(X)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\text{Pf}(X_{\mathbb{R}}))^2 &= (\text{Pf} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix})^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \\ &= |\det(X_{\mathbb{C}})|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Pf}(X_{\mathbb{R}}) = \alpha(X) \cdot \det(X_{\mathbb{C}})$$

$$\alpha(X) \in \mathbb{C}, |\alpha(X)| = 1$$

$$\Rightarrow \alpha(X) = \varepsilon(X) \cdot i^m, \quad \varepsilon(X) \equiv \pm 1$$

$$\text{def } \overline{X} = -X^T$$

$$X_0 = iI$$

$$\Rightarrow \text{Pf}(X_0) = (-1)^{\frac{\ln(2m+1)}{2}}, \quad \det(X_0) = i^m$$

$$\Rightarrow \varepsilon(X_0) = (-1)^{\frac{\ln(2m+1)}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Pf}(X) = (-1)^{\frac{\ln(2m+1)}{2}} \cdot i^m \cdot \det(X)$$

zu ④:

$$A \wedge \dots \wedge A = \frac{1}{2^m} \sum_{i_1, j_1} A_{i_1 j_1} \dots \sum_{i_m, j_m} A_{i_m j_m} e_{i_1} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \wedge e_{j_m}, \quad A = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} e_i \wedge e_j$$

$$= \frac{1}{2^m} \sum \text{sgn}(\sigma) A_{\sigma_1 \sigma_2} \dots A_{\sigma_{2m-1} \sigma_{2m}} \omega_{2m}$$

Eigenschaften der Pfaffschen

- Lemma:
- ① $\text{Pf}(A^T) = (-1)^n \text{Pf}(A)$ $A \in \mathfrak{so}(2n)$
 - ② $\text{Pf}(\lambda A) = \lambda^n \text{Pf}(A)$
 - ③ $\text{Pf}(B \cdot A \cdot B^T) = \det(B) \text{Pf}(A)$ $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$
 $n=2m$
 - ④ $\text{Pf}(A^{2k+1}) = (-1)^{km} \text{Pf}(A)^{2k+1}$
 - ⑤ $\text{Pf}(A_1 \oplus A_2) = \text{Pf}(A_1) \cdot \text{Pf}(A_2)$ $A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

• V or. reelles VB

$$Td(V \otimes \mathbb{C}) = \hat{A}(V)^2$$

$$x_j = c_1(V_j \otimes \mathbb{C}) \quad , \quad V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

$$\begin{aligned} Td(V \otimes \mathbb{C}) &= \prod \frac{x_j}{1-e^{-x_j}} \cdot \frac{-x_j}{1-e^{x_j}} \\ &= \prod (-x_j^2) \cdot (e^{-\frac{x_j}{2}} (e^{\frac{x_j}{2}} - e^{-\frac{x_j}{2}}) e^{\frac{x_j}{2}} (e^{-\frac{x_j}{2}} - e^{\frac{x_j}{2}}))^{-1} \\ &= \prod x_j^2 \cdot (e^{\frac{x_j}{2}} - e^{-\frac{x_j}{2}})^{-2} \\ &= \prod x_j^2 \cdot (4 \cdot \sinh(\frac{x_j}{2}))^{-2} \\ &= \left(\prod \frac{x_j/2}{\sinh(\frac{x_j}{2})} \right)^2 \\ &= (\hat{A}(V))^2 \end{aligned}$$

• $E = \bigoplus_{i=1}^n L_i$

$$\Rightarrow \Lambda^2 E = \bigoplus_{i < j} L_i \otimes L_j$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c(\Lambda^2 E) &= \prod_{i < j} c(L_i \otimes L_j) \\ &= \prod_{i < j} (1 + c_1(L_i \otimes L_j)) \\ &= \prod_{i < j} (1 + x_i + x_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(1+x_1+x_2)(1+x_1+x_3)(1+x_2+x_3) \\ &= (1+x_1+x_3+x_1+x_2)(1+x_2+x_3) \\ &= x_2+x_3+x_1+x_3+x_1+x_2 \\ &= 2(x_1+x_2+x_3) \end{aligned}$$

mod $\Lambda^0 \oplus \Lambda^2$
mod Λ^2

$$\Rightarrow n=3: \quad c_1(\Lambda^2 E) = 2 c_1(E)$$

Sei E ein reelles, orientiertes Vektorbündel vom Rang $2m$ mit fixierter Bündelmantik

(= Riemannsches VB)

→ $P = P(E)$ das Rahmenbündel von E

reduziert sich auf ein $SO(2m)$ -Bündel $P_{SO(2m)}$

Definition: Sei (E, g) ein orientiertes, reelles Vektorbündel vom Rang $2m$ mit Bündelmantik g . Die Euler-Klasse von E ist dann definiert durch:

$$e(E) = W_{P_{SO(2m)}} \left(\frac{1}{(2\pi)^m} Pf \right) \in H_{\text{dr}}^{2m}(M, \mathbb{R})$$

$$= \left[Pf \left(\frac{1}{2\pi} \Omega \right) \right]$$

$\Omega =$ Krümmung des $SO(2m)$ -Zusammenhangs

$$= \frac{1}{4^m m!} \left[\sum_{\sigma \in S_{2m}} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{\sigma_1 \sigma_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{\sigma_{2m-1} \sigma_{2m}} \right]$$

Bemerkungen:

- Die Euler-Klasse ändert ihr Vorzeichen bei Orientierungswechsel

- Abhängigkeit von der Metrik

- Die Euler-Klasse lässt sich axiomatisch definieren (→ Kobayashi-Moriwaka)

Satz: ① Sei (E, g) ein orientiertes, reelles Vektorbündel vom Rang $2m$ mit Bündelmantik g , dann gilt:

$$e(E) \cdot e(E) = p_m(E)$$

② Sei E ein komplexes Vektorbündel vom Rang m mit hermitescher Bündelmantik h . Dann erhält E betrachtet als reelles Vektorbündel eine kanonische Orientierung und eine Bündelmantik $g = \text{Re}(h)$. Es gilt:

$$e(E) = c_m(E)$$

Beweis →

Bemerkung: Sei $(s_1, \dots, s_m)$ eine komplexe Basis, dann ist $(s_1, i s_1, \dots, s_m, i s_m)$ eine reelle Basis, die die kanonische Orientierung festlegt.

Nimmt man $(s_1, \dots, s_m, i s_1, \dots, i s_m)$ gilt: $e(E) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} c_m(E)$

dies entspricht verschiedenen Einbettungen $\mathbb{H}(m) \subset SO(2m)$ bzw. Identifikation $\mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{C}^m$

Beweis:

siehe H. Baum