

Pontrjagin-Klassen im Bild des Weil-Homomorphismus

man definiert invariante Polynome $g_k : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\det \left(tE - \frac{1}{2\pi i} X \right) = \sum_{k=0}^n g_k(X) t^{n-k}$$

Bemerkung: $g_{2k+1}|_{\mathfrak{o}(n)} = 0$

$$\text{d.h. } X \in \mathfrak{o}(n) \Leftrightarrow X^T = -X$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det \left(tE - \frac{1}{2\pi i} X \right) &= \det \left(tE - \frac{1}{2\pi i} X \right)^T \\ &= \det \left(tE + \frac{1}{2\pi i} X \right) = \det \left(-(-tE - \frac{1}{2\pi i} X) \right) \\ &= (-1)^n \det \left(-tE - \frac{1}{2\pi i} X \right) \\ \Rightarrow \sum g_k(X) t^{n-k} &= (-1)^n \sum g_k(X) (-t)^{n-k} \\ &= \sum g_k(X) (-1)^k t^{n-k} \\ \Rightarrow g_{2k+1}(X) &= -g_{2k+1}(X) \end{aligned}$$

Sei E ein reelles VB mit
Rahmenbündel $P = P_{\mathfrak{GL}(n)}$

Satz: $p(E) = \left[\det \left(E - \frac{1}{2\pi i} \Omega \right) \right]$

$$p_k(E) = W_P(g_{2k}) = [g_{2k}(\Omega)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{2k}} \left[\sum_{i_1, \dots, i_{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{i_1 \sigma(1)} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k} \sigma(2k)} \right]$$

Insbesondere gilt:

$$p_1(E) = \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr}(\Omega) \wedge \text{tr}(\Omega) - \text{tr}(\Omega \wedge \Omega)]$$

Beweis: • $E \subset E^{\mathbb{C}} \Rightarrow P \hookrightarrow P_{\mathfrak{GL}(n, \mathbb{C})}$ Rahmenbündel von $E^{\mathbb{C}}$

P ist eine $\mathfrak{GL}(n, \mathbb{R})$ -Reduktion von $P_{\mathfrak{GL}(n, \mathbb{C})}$

$$\Rightarrow W_{P_{\mathfrak{GL}(n, \mathbb{C})}}(c_{2k}) = W_P(c_{2k}|_{\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})})$$

$$\bullet g_{2k}(X) = c_{2k}(+iX) = i^{2k} c_{2k}(X) = (-1)^k c_{2k}(X), \quad X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E^{\mathbb{C}}) = (-1)^k [c_{2k}(\Omega)]$$

$$= [g_{2k}(\Omega)]$$

Pontrjagin - Klassen und Weyl - Krümmung

Definition: Die Kohomologieklass $p_k(M) := p_k(TM) \in H_{\text{dr}}^{4k}(M, \mathbb{R})$ heißt k-te Pontrjagin-Klasse von M.

Die Zahlen $\langle p_1(M), \dots, p_k(M), [M] \rangle$ heißen Pontrjagin-Zahlen von M.

hier: • dim M = 4k
• $i_1 + \dots + i_k = k$
(sonst Null)

Satz (Thom): Zwei Mannigfaltigkeiten repräsentieren genau dann dasselbe Element im rationalen Kohomologiering wenn all ihre Pontrjagin-Zahlen übereinstimmen.

Ziel: Explizite Formeln für die Pontrjagin-Klasse einer Mf. in Dimension 4. Zu zeigen: Pontrjagin-Klassen sind ausdrückbar als Polynom im Weyl-Tensor (der Weyl-Krümmung)

→ Chern-Simons

$E = TM$, $\nabla = \text{Levi-Civita-Zusammenhang}$, Riemannsche Krümmung: R

Krümmungsform: $\Omega_{ij}(X, Y) = g(R_{XY}e_j, e_i)$ ($\rightarrow$ H. Baum)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k R_{kjei} e_k \wedge e_j = -R(e_i \wedge e_j)$$

$$\Rightarrow p_k(R) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}} \sum \text{sgn}(\sigma) R(e_{i_1} \wedge e_{\sigma(i_1)}) \wedge \dots \wedge R(e_{i_{2k}} \wedge e_{\sigma(i_{2k})})$$

k-te Pontrjagin-Form

($p_k(R)$ repräsentiert $p_k(M)$)

Insbesondere gilt: $p_1(R) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{tr}(\Omega \wedge \Omega)$ ($\text{tr}(\Omega) = 0!$)

$$= +\frac{1}{8\pi^2} \sum_i R(e_i \wedge e_j) \wedge R(e_i \wedge e_j)$$

Satz: Für die erste Pontrjagin-Form einer 4-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit gilt:

$$p_1(R) = \frac{1}{4\pi^2} (|W_+|^2 - |W_-|^2) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

Insbesondere gilt damit auf einer 4-dim. kompakten, or. Riemannschen Mf.

$$\int_M p_1(M) = \frac{1}{4\pi^2} (||W_+||^2 - ||W_-||^2)$$

Invariante Polynomeauf $O(n)$

Satz: Die Polynome g_k sind algebraisch unabhängig und erzeugen den Ring der $O(n)$ -invarianten Polynome auf $O(n)$.

$$P^*(O(n))^{O(n)} = \mathbb{R}[g_2, \dots, g_m]$$

$$n = 2m, 2m+1$$

zum Beweis: (siehe Kobayashi - Nomizu)

- g_k sind $O(n)$ -invariant
- $g_k(X) = \sigma_k(\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2)$

dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die komplexen Eigenwerte von X , d.h. X ist konjugiert zu:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & \\ & & -\lambda_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

- jedes $O(n)$ -invariante Polynom ist ein Polynom in den g_k 's

Satz: ① $n = 2m+1$: $P^*(O(n))^{SO(n)} = \mathbb{R}[g_1, \dots, g_m]$

② $n = 2m$: $P^*(O(n))^{SO(n)} = \mathbb{R}[g_1, \dots, g_m, g]$
wobei g definiert ist durch: $g_{2m} = g^2$

d.h. für $n=2m$ hat man ein zusätzliches $SO(n)$ -invariantes Polynom: die Pfaffsche

zum Beweis: (siehe Kobayashi - Nomizu)

Bemerkung: Für orientierte reelle Vektorbündel vom Rang $2m$ (also Strukturgruppe $SO(2m)$) erhält man eine neue charakteristische Klasse.

E ist ein orientiertes VB $\Leftrightarrow \Lambda^m E$ hat einen globalen Schnitt ohne Nullstellen