

Bemerkungen: • E sei assoziiert zu einem $SU(n)$ -HFB

$$\Rightarrow c_1(E) = 0$$

$$c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr}(\Omega \wedge \Omega)]$$

→ Tang-HB's
Isotankbundel

da • $SU(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \text{tr}(X) = 0\}$

- man kann Zusammenhang und Krümmung mit Werten in $\mathfrak{su}(n)$ wählen

- Sei E ein komplexer Vektorbündel vom Rang n

→ $\Lambda^n E$ ist ein Linienbündel (das Determinantenbündel)

Lemma: $c_1(\Lambda^n E) = c_1(E)$

Beweis: induzierte kovariante Ableitung auf $\Lambda^n E$:

$$\hat{\nabla}_X(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = (\nabla_X e_1) \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n + \dots + e_1 \wedge \dots \wedge (\nabla_X e_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{XY}^{\hat{\nabla}}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) &= \sum_i e_1 \wedge \dots \wedge R_{XY}^{\nabla} e_i \wedge \dots \wedge e_n \quad (\text{entspricht der Darst.}) \\ &= \sum_i \langle R_{XY}^{\nabla} e_i, e_i \rangle \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \text{tr}(R_{XY}) e_1 \wedge \dots \wedge e_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1(\Lambda^n E) &= -\frac{1}{2\pi i} [\text{tr}(\Omega^{\hat{\nabla}})] = -\frac{1}{2\pi i} [\Omega^{\hat{\nabla}}] \quad (\text{Linienbündel!}) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} [\text{tr}(\Omega^{\nabla})] = c_1(E) \end{aligned}$$

- $c(E) = 1$ ist möglich, auch wenn E nicht trivial ist

später!

- Beispiel: $E = TS^n \otimes \mathbb{C}$ komplexifiziertes Tangentialbündel

$$\Rightarrow (TS^n \otimes \mathbb{C}) \oplus \varepsilon^1 = (TR^{n+1}|_{S^n}) \otimes \mathbb{C} = \varepsilon^{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 = c(\varepsilon^{n+1}) = c(TS^n \otimes \mathbb{C}) c(\varepsilon^1)$$

(ε^1 = Normalenbündel)

aber: $TS^n \otimes \mathbb{C}$ ist trivial! $= c(TS^n \otimes \mathbb{C})$

($TS^n \otimes \mathbb{C}$ nicht trivial?)

früher!

Definition: Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist die k -te Chern-Klasse von M definiert als

$$c_k(M) := c_k(TM) \in H_{\text{dR}}^{2k}(M)$$

Bemerkung: Sei M fast-komplex $\Rightarrow TM$ ist ein komplexes VB $\rightarrow c_k(TM)$ ist definiert!

Beispiel: Die Chern-Klassen des komplexen projektiven Raumes $\mathbb{CP}^n$

kanonischer Linienbündel: $\gamma_n = \{ (L, v) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid v \in L \}$

tautologisch?

$$g := c_1(\gamma_n^*) \in H_{\text{dR}}^2(\mathbb{CP}^n) \quad (\text{reelle Koeffizienten})$$

Lemma: $c(\mathbb{CP}^n) = (1 + g)^{n+1}$

Beweis: $\gamma_n^\perp := \{ (L, w) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid w \perp L \}$

(bezgl. dem
kanon. hermit.
SP auf $\mathbb{C}^{n+1}$)

$$\Rightarrow \mathcal{E}^{n+1} = \gamma_n \oplus \gamma_n^\perp$$

$$\cdot T\mathbb{CP}^n \cong \text{Hom}(\gamma_n, \gamma_n^\perp)$$

da: Hopf-Bündel:

$$S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^n$$

$$z \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \\ L = \pi^{-1}(z) \in \mathbb{CP}^n = \text{die durch } z \text{ definierte Gerade}$$

$$\Rightarrow T_z S^{2n+1} = \{ X \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \text{Re} \langle X, z \rangle = 0 \}$$

$$T_z^\perp S^{2n+1} = T_z(\pi^{-1}(L)) = \ker(d\pi_z) = \{ X \in \mathbb{C}^{n+1} \mid X \in i\mathbb{R}z \}$$

$$\Rightarrow T_z^\perp S^{2n+1} = T^\perp S^{2n+1} \oplus \pi^* \gamma_n^\perp$$

$$\text{und } d\pi: \pi^* \gamma_n^\perp \xrightarrow{\sim} T\mathbb{CP}^n$$

Isomorphismus

$$\Rightarrow \Psi: \text{Hom}(\gamma_n, \gamma_n^\perp)_L \xrightarrow{\sim} T_L \mathbb{CP}^n \\ \mapsto d\pi_z(\varphi(z))$$

$$\Rightarrow T\mathbb{CP}^n \oplus \mathcal{E}^1 \cong \text{Hom}(\gamma_n, \gamma_n^\perp) \oplus \mathcal{E}^1$$

$$\cong \text{Hom}(\gamma_n, \gamma_n^\perp) \oplus \text{Hom}(\gamma_n, \gamma_n)$$

$$\cong \text{Hom}(\gamma_n, \gamma_n^\perp \oplus \gamma_n)$$

$$\cong \text{Hom}(\gamma_n, \mathbb{C}^{n+1})$$

$$= \gamma_n^* \oplus \dots \oplus \gamma_n^* \quad ((n+1) \text{ Summanden})$$

$$\Rightarrow c(T\mathbb{CP}^n) = c(T\mathbb{CP}^n) c(\mathcal{E}^1) = c(T\mathbb{CP}^n \oplus \mathcal{E}^1)$$

$$= c(\gamma_n^*) \dots c(\gamma_n^*) = (1 + c_1(\gamma_n^*))^{n+1}$$

$$= (1 + g)^{n+1}$$

Bemerkung: $T\mathbb{CP}^n$ ist nicht-trivial!

$$\begin{array}{c} \gamma_n^\perp \\ \downarrow \pi^* \\ \pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n \end{array}$$

$$\pi^* \gamma_n^\perp = \{ (z, w) \mid \pi(z) = \pi'(w) \\ w \perp \pi(z) \in L \}$$

$z \in L$, kann auf S^{2n+1}
beliebig gewählt werden
(S^1 -Wirkung!)

Folgerung: $c_k(\mathbb{C}P^n) = \binom{n+1}{k} g^k$

Bemerkung: $c_1(\mathbb{C}P^1) = 2g \quad (\rightarrow \chi(S^2) = 2)$

$c_1(TS^2 \otimes \mathbb{C}) = c_1(E \oplus E^*) = 0$

$H_{\text{dR}}^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{C}[g] / \langle g^{n+1} \rangle$

Wahr?

$c_1(K) = c_1(\wedge^n (T^{*0,1}M)^*) = c_1(\wedge^{n,0}) = c_1(TM)$

$\uparrow$ als komplexes VB
M: komplexe Mf.

$c_1(\mathbb{C}P^n) = (n+1)g$

.

Satz: Sei (M^{2n}, g, J) eine Kähler-Mf. Dann gilt:

$$c_1(M) = \left[\frac{1}{2\pi} g \right]$$

wobei $g \in \Omega^2(M)$ die Ricci-Form bezeichnet. $g(X,Y) = \text{Ric}(JX,Y)$

Inbesondere gilt $c_1(M) = 0$ für Ricci-flache Kähler-Mf.

Bemerkung: Die Ricci-Form ist i mal die Krümmung des kanonischen Bündels

④ Der Chem - Charakter

Man definiert invariante Polynome $S_k \in P^k(\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))^{GL(n, \mathbb{C})}$ durch:

$$\mathrm{tr}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S_k(X) t^k \quad (e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \dots)$$

Bemerkung: • S_k sind G -invariante Polynome für $G = GL(n, \mathbb{C})$

• $S_0(X) = 1, \quad S_1(X) = \mathrm{tr}(X) = c_1(X)$

Lemma: Sei X diagonalisierbar mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gilt:

$$S_k(X) = S_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k \quad (\text{paarweise verschieden?})$$

Beweis: $X = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (oder konjugiert dazu)

$$\Rightarrow e^{tX} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(e^{tX}) = \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_i)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

(Potenzsummen)

Bemerkung: • Die Polynome $\{S_k\}$ bilden eine Basis im Raum der G -invarianten (bzw. symmetrischen) Polynome auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ (bzw. $\mathbb{C}^n$).

• Die Newton-Formel beschreibt die Umrechnung der Basen $\{\sigma_k\}$ in $\{S_k\}$: (rekursiv)

$$S_k - \sigma_1 \cdot S_{k-1} \pm \dots \pm k \cdot S_k = 0$$

$$\Rightarrow S_k = Q_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k), \quad Q_k: \text{Newton-Polynom}$$

$$\text{z.B. } S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

Definition: Sei $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel dann ist der Chern-Charakter von E definiert durch

$$\text{ch}(E) = \text{ch}_0(E) + \text{ch}_1(E) + \dots$$

$$\text{mit } \text{ch}_k(E) = \left[\frac{1}{k!} \text{tr} \left(\frac{i}{2\pi} \Omega \right)^k \right] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M, \mathbb{C})$$

Bemerkungen: • $\text{ch}(E) = \text{rk}(E) + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \dots$

$$\bullet \text{ch}_1(E) = \left[e^{\frac{i}{2\pi} \Omega} \right]$$

dh. man kann die Krümmung nicht nur in Polynomen sondern auch in Potenzreihen einsetzen
mehr dazu später

$$\bullet \text{ch}(E) = \sum_{i=1}^n e^{x_i}$$

$$= n + \sum x_i + \frac{1}{2} \sum x_i^2 + \dots$$

$$= n + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \dots$$

$$E = \bigoplus E_i, \quad x_i = c_1(E_i)$$

Eigenschaften des Chern-Charakters

Lemma: ① $\text{ch}(E \oplus F) = \text{ch}(E) + \text{ch}(F)$

② $\text{ch}(E \otimes F) = \text{ch}(E) \cdot \text{ch}(F)$

Besonderheit!

③ $f^* \text{ch}(E) = \text{ch}(f^* E)$

④ $\text{ch}_k(E^*) = (-1)^k \text{ch}_k(E)$

Beweis: zu ①: $\Omega^{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \Omega^E & 0 \\ 0 & \Omega^F \end{pmatrix}, \quad \text{tr} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

zu ②: $E \otimes F: \nabla_X s_1 \otimes s_2 = (\nabla_X s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_X s_2$

$$\Rightarrow R_{XY} s_1 \otimes s_2 = (R_{XY} s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (R_{XY} s_2)$$

A, B diagonalisierbare Endomorphismen mit Eigenwerten λ_i bzw. μ_i

Sei $\{e_i\}$ eine Basis aus Eigenvektoren in E und $\{f_j\}$ entspr. in F

$$\Rightarrow A \otimes B (e_i \otimes f_j) = (A e_i) \otimes f_j + e_i \otimes (B f_j)$$

$$= (\lambda_i + \mu_j) e_i \otimes f_j$$

alternativ: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ falls $[A, B] = 0$ Lin.: $A = \lambda \otimes 1, B = 1 \otimes \lambda$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow S_k(A \otimes B) &= \sum_{i,j} (\lambda_i + \mu_j)^k \\
 &= \sum_{i,j,r} \binom{k}{r} \lambda_i^r \mu_j^{k-r} \\
 &= \sum_r \binom{k}{r} S_r(A) \cdot S_{k-r}(B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow ch(E \otimes F) &= \sum_k \frac{1}{k!} S_k(A \otimes B) & A &= \frac{i}{2\pi} \Omega^E, & B &= \frac{i}{2\pi} \Omega^F \\
 &= \sum_{k,r} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k!}{r!(k-r)!} S_r(A) S_{k-r}(B) \\
 &= \left(\sum_r \frac{1}{r!} S_r(A) \right) \cdot \left(\sum_c \frac{1}{c!} S_c(B) \right)
 \end{aligned}$$

zu ③ und ④: Beweis wie für Chern-Klassen

Folgerung: Sei E ein selbst-duales Vektorbündel, d.h. $E \cong E^*$,
dann gilt:

$$ch_{2k+1}(E) = 0 \quad \text{und} \quad ch_{2k+1}(E) = 0$$

Bemerkung: • Beispiele für selbst-duale Bündel:

- $ch(E) \in H_{\text{even}}^*(M, \mathbb{Q})$
- $c_1(E \otimes F) = c_1(E) + c_1(F)$ folgt direkt aus ②

⑤ Die Pontrjagin-Klassen

Ziel: Definition charakteristischer Klassen für reelle Vektorbündel

(z.B. TM)

Bemerkung: Zu jedem reellen Vektorbündel E hat man ein komplexes Vektorbündel $E^{\mathbb{C}} := E \otimes \mathbb{C}$, die Komplexifizierung. Man überträgt die entsprechende Operation auf Vektorräumen.

$$V \otimes \mathbb{C} = V \oplus V \quad i(x, y) := (-y, x)$$

man schreibt: $(x, y) = x + iy$ $x, y \in V$, V reelles VR

Von einem komplexen Vektorbündel kann man ein reelles Vektorbündel erhalten, wenn man die komplexe Struktur vergißt: Realifizierung

$$\begin{aligned} \text{es gilt: } & \bullet E^* \cong E, & (E^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} &= E \oplus E & E \text{ reelles VB} \\ & \bullet F^* \cong \bar{F}, & (F^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} &= F \oplus \bar{F} & F \text{ komplexes VB} \end{aligned}$$

Lemma: $c_{2k+1}(E^{\mathbb{C}}) = 0$ $k = 0, 1, \dots$ E reelles VB!

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } E \cong E^* & \Rightarrow E^{\mathbb{C}} \cong (E^*)^{\mathbb{C}} \cong (E^{\mathbb{C}})^* \\ & \Rightarrow c(E^{\mathbb{C}}) = c((E^{\mathbb{C}})^*) \end{aligned}$$

$$\text{aber: } c_k((E^{\mathbb{C}})^*) = (-1)^k c_k(E^{\mathbb{C}})$$

Definition: Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel. Dann heißt:

$$p_k(E) := (-1)^k c_{2k}(E^{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(M, \mathbb{R})$$

die k-k Pontrjagin-Klasse von E .

Bemerkung: $p(E) = p_0(E) + p_1(E) + \dots$

$$p_0(E) = 1$$

nennt man die totale Pontrjagin-Klasse von E .

$$\bullet E \text{ trivial} \Rightarrow p(E) = 1$$

(4. Eigenschaft $\rightarrow$)

Eigenschaften der Pontryagin-Klassen

- Satz: ① $E_1 \cong E_2$, dann gilt: $p(E_1) = p(E_2)$
- ② $f: M \rightarrow N$, dann gilt: $f^* p(E) = p(f^* E)$
- ③ $p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$

Beweis: zu ③:

$$\begin{aligned} p_k(E_1 \oplus E_2) &= (-1)^k c_{2k}(E_1^c \oplus E_2^c) \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^{2k} c_j(E_1^c) \cdot c_{2k-j}(E_2^c) \\ &= \sum_{r=0}^k (-1)^r c_{2r}(E_1^c) \cdot (-1)^{k-r} c_{2k-2r}(E_2^c) \\ &= \sum_{r=0}^k p_r(E_1) \cdot p_{k-r}(E_2) \end{aligned}$$

Beispiel: $p(TS^n) = 1$

da $c(TS^n \otimes \mathbb{C}) = 1$
• oder analoger Beweis

$p(\mathbb{H}P^n)!$ $p(T\mathbb{C}P^n) = (1+g^2)^{n+1}$

da $c(T\mathbb{C}P^n) = (1+g)^{n+1}$

Bemerkungen: $p_k(E) = 0$ für $2k > rk(E)$

E komplexes VB $\Rightarrow E \otimes \mathbb{C} = E \oplus \bar{E}$
 $\Rightarrow p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E \oplus \bar{E})$

Insbesondere: $p_1 = c_1^2 - 2c_2$

$p_2 = 2c_4 + c_2^2 - 2c_1c_3$

zum Beweis: $c(E \oplus \bar{E}) = c(E) \cdot c(\bar{E})$
 $= (1 + c_1 + c_2 + \dots)(1 - c_1 + c_2 - \dots)$

~~$c(E \oplus \bar{E}) = \prod (1+x_i)(1-x_i) = \prod (1-x_i^2)$~~

- Sei E ein reelles VB vom Rang n . Besitzt E k überall linear unabhängige Schnitte, dann gilt:

$p_j(E) = 0$ für alle $j > n-k$

$p_i(M) = 0 \Rightarrow \text{span}(M) \leq n - 2i$

$\text{Span}(M) = \text{max. Anzahl l.u. VF}$