Beweis von (*): aus der Strukturgleichung folgt:

$$\Omega_t = d\omega_t + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t] = d\omega_0 + t\,d\eta + \frac{1}{2}[\omega_t, \omega_t]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Omega_t = d\eta + \frac{1}{2}\left([\dot\omega_t, \omega_t] + [\omega_t, \dot\omega_t]\right)$$

$$= d\eta + [\omega_t, \eta]$$

$$= d\eta + \mathrm{Ad}_*(\omega_t) \wedge \eta$$

$$= D_{\omega_t}\eta$$

da: $\cdot\ \dot\omega_t = \eta$

$\cdot\ [\alpha,\beta] = (-1)^{kl+1}[\beta,\alpha]$ (+1 da noch Lie-Klammer)

man definiert: $\varphi = k\int_0^1 f(\eta \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)\,dt \in \Omega^{2k-1}(P)$ ($(k-1)$-mal)

Transgression

$\Rightarrow \varphi \in \Omega^{2k-1}_{hor}(P)^G$ da $\eta, \Omega_t \in \Omega^*_{hor}(P, \mathfrak{g})^G$ Typ Ad:

$$\Rightarrow d\varphi = k\cdot\int_0^1 d f(\eta \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)\,dt$$

$$= k\int_0^1 D_{\omega_t} f(\eta \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)\,dt$$

$$= k\int_0^1 f(D_{\omega_t}\eta \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)\,dt \qquad D_{\omega_t}\Omega_t = 0!$$

$$= k\int_0^1 f(\tfrac{d}{dt}\Omega_t \wedge \Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\Omega_t \wedge \dots \wedge \Omega_t)\,dt$$

$$= f(\Omega_1 \wedge \dots \wedge \Omega_1) - f(\Omega_0 \wedge \dots \wedge \Omega_0)$$

$$= f(\Omega_1) - f(\Omega_0)$$

$f(\Omega)$ schon exakt $\Rightarrow$

es folgt auch: $d\bar\varphi = \bar f(\Omega_1) - \bar f(\Omega_0)$, $\varphi = \pi^*\bar\varphi$

Definition: Sei P ein G-HFB über M mit Zusammenhang ω und Krümmung Ω. Die Abbildung

$$W : \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G \longrightarrow H^{2k}_{dR}(M, \mathbb{C}) \qquad W = W_P!$$

heißt **Weil-Homomorphismus** $\qquad f \mapsto [f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)]$

Bemerkung. $W : \mathrm{Sym}^*(\mathfrak{g})^G \longrightarrow H^*_{dR}(M, \mathbb{C})$ ist ein Algebren-Homomorphismus

Beweis: $(f \cdot h)(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) = f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) \wedge h(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$

$[a]\cdot[b] = [a \wedge b]$

Bemerkung: Die Rechnung zeigt (für $\omega_0 = 0$), dass schon $f(\Omega)$ exakt ist: $f(\Omega) = d\varphi$, aber φ ist dann kein pull-back mehr

↗ Chern-Simons

Eigenschaften des Weil-Homomorphismus

- Sei P_0 das triviale G-HFB

  $\Rightarrow \quad W_{P_0}(f) = 0 \qquad \forall\, f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G \quad , k>0$

  da: $\Omega \equiv 0$ für den kanonischen flachen Zus.

- $P \to M$ sei ein $U(1)$-HFB $\qquad \mathfrak{u}(1) = i\mathbb{R} \quad , U(1) = S^1$

  $f(X) := -\frac{1}{2\pi i} X \quad , X \in i\mathbb{R} \quad , \quad f \in \mathrm{Sym}^1(\mathfrak{u}(1))^{U(1)}$

  $\Rightarrow W(f) = \left[-\frac{1}{2\pi i}\Omega\right] = c_1(P) \in H^2_{dR}(M)$

  1. Chern-Klasse von P

- **Lemma** (3): Sei $\lambda : H \to G$ ein Gruppenhom, $P \to M$ ein G-HFB, (Q, ψ) eine λ-Reduktion von P auf ein H-HFB, $f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ man definiert $f_\lambda \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{q})^H$ durch:

  $$f_\lambda(x_1, \dots, x_k) := f(\lambda_*(x_1), \dots, \lambda_*(x_k))$$

  Dann gilt:

  $$W_P(f) = W_Q(f_\lambda)$$

  Spezialfall: Reduktion!

  φ^*P pull-back HFB mit pull-back Zus!

- **Lemma** (2): Sei $\varphi : N \to M$ eine glatte Abbildung, $P \xrightarrow{\pi} M$ ein G-HFB, dann gilt für alle $f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$:

  $$W_{\varphi^*P}(f) = \varphi^* W_P(f)$$

  Spezialfall: Einschränkung

  φ^*P Natürlichkeit

  (ÜA) Beweis: $\varphi^* : H^*_{dR}(M) \to H^*_{dR}(N), \quad [\alpha] \mapsto [\varphi^*\alpha]$

- **Lemma** (1): Seien P_1, P_2 zwei isomorphe G-HFB über M. Dann gilt:

  $$W_{P_1} \doteq W_{P_2}$$

(ÜA) Beweis: siehe folgende Seiten

Beweis: $\psi : P_1 \longrightarrow P_2$ sei ein Isomorphismus von ${}^{G}\mathrm{HFB}$

$\pi_1 \searrow \quad \swarrow \pi_2$

M

$\Rightarrow \quad \pi_2 \circ \psi = \pi_1$ da fasertreu

$\omega_2 \in \Omega^1(P_2, \mathfrak{g})$ Zus. 1-Form auf P_2

$\Rightarrow \quad \omega_1 = \psi^* \omega_2$ ist Zus. 1-Form auf P_1 ψ ist G-äquivariant

$\Omega_1 = \psi^* \Omega_2$

$v_1, \dots, v_{2k} \in T_x M$, $v_1^*, \dots, v_{2k}^*$ hor. Lifts nach $T_{P_2} P_2$

$\psi(P_1) = P_2, \quad d\psi(w_i^*) = v_i^*$

$\Rightarrow$ $w_1^*, \dots, w_{2k}^*$ sind horizontale Lifts von $v_1, \dots, v_{2k}$ nach $T_{P_1} P_1$

da $\cdot \; d\pi_1(w_i^*) = d\pi_2 \cdot d\psi(w_i^*) = d\pi_2(v_i^*) = v_i$ da Lifts

$\cdot \; \omega_1(w_i^*) = (\psi^* \omega_2)(w_i^*) = \omega_2(d\psi(w_i^*)) = \omega_2(v_i^*) = 0$ da hor.

$$
\begin{aligned}
& f(\Omega_2)_x(v_1, \dots, v_{2k}) \\
&= f(\Omega_2)_{P_2}(v_1^*, \dots, v_{2k}^*) \\
&= f(\Omega_2)_{\psi(P_1)}(d\psi(w_1^*), \dots, d\psi(w_{2k}^*)) \\
&= f(\psi^* \Omega_2)_{P_1}(w_1^*, \dots, w_{2k}^*) \\
&= f(\Omega_1)_{P_1}(w_1^*, \dots, w_{2k}^*) \\
&= f(\Omega_1)_x(v_1, \dots, v_{2k})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad f(\Omega_2) = f(\Omega_1)$

Beweis: $\varphi: N \to M$, $P \downarrow \pi$

pull-back-Bündel: $\varphi^* P = \{ (x,p) \in N \times P \mid \varphi(x) = \pi(p) \}$

$\bar{\pi} : \varphi^* P \to N, \quad (x,p) \mapsto x$

$\Rightarrow (\varphi^* P)_x = \{x\} \times P_{\varphi(x)}$ Faser über x

$\Rightarrow$ kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \varphi^* P & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & P \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array} \qquad \bar{\varphi}(x,p) = p$$

Sei $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ Zusammenhangsp 1-Form auf P

$\Rightarrow \bar{\varphi}^* A \in \Omega^1(\varphi^* P, \mathfrak{g})$ " — " auf $\varphi^* P$

$\Omega^{\bar{\varphi}^* A} = \bar{\varphi}^* \Omega^A$

Sei $x \in N$, $p \in P_{\varphi(x)}$, $v \in T_x N$, $\Rightarrow$ $\exists$ $v^* \in T^{\text{eh}}_{(x,p)} \varphi^* P$ horizontales Lift bzgl $\bar{\varphi}^* A$

$\Rightarrow (\bar{\varphi}^* A)(v^*) = A(d\bar{\varphi}(v^*)) = 0$

$d\pi(d\bar{\varphi}(\bar{v})) = d\varphi \circ d\bar{\pi}(\bar{v}) = d\varphi(v)$

$\Rightarrow d\bar{\varphi}(v^*)$ ist d. A-horizontale Lift von $d\varphi(v)$ in $p \in P_{\varphi(x)}$

Sei $f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$, $v_1, \dots, v_{2k} \in T_x N$

$\Rightarrow f(\Omega^{\bar{\varphi}^* A})_x (v_1, \dots, v_{2k})$ auf N

$= f(\bar{\varphi}^* \Omega^A)_x (v_1, \dots, v_{2k})$ auf N

$= f(\bar{\varphi}^* \Omega^A)_{(x,p)} (v_1^*, \dots, v_{2k}^*)$ auf $\varphi^* P$

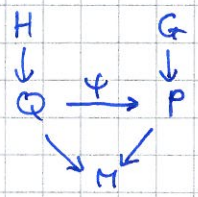
$= f(\Omega^A)_{\bar{\varphi}(x,p)} (d\bar{\varphi}(v_1^*), \dots, d\bar{\varphi}(v_{2k}^*))$ auf P

$= f(\Omega^A)_{\varphi(x)} (d\varphi(v_1), \dots, d\varphi(v_{2k}))$ auf M

$= (\varphi^* f(\Omega^A))_x (v_1, \dots, v_{2k})$

$\Rightarrow f(\Omega^{\bar{\varphi}^* A}) = \varphi^* f(\Omega)$

vgl. Beweis mit Vektorbündeln



Beweis: $\lambda : H \to G$ Gruppenhom.

$f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$

$f_\lambda := f(\lambda_*(\cdot), \dots, \lambda_*(\cdot))$

$B \in \Omega^1(Q, \mathfrak{h})$ Zus. 1-Form

$\rightsquigarrow A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$: eindeutig bestimmte Zus. Form

mit $d\Psi_q(T_q^H Q) = T^H_{\Psi(q)} P$

$\rightarrow \lambda_* \Omega^B = \Psi^* \Omega^A$

$x \in M$, $q \in Q_x$, man wählt: $p = \Psi(q) \in P_x$

$t \in T_x M$, $\hat{t}^* \in T_q^H Q$ horizontaler Lift bzgl. B

$\Rightarrow t^* := d\Psi_q(\hat{t}^*) \in T_p^H P$ " " bzgl. A

$$
\begin{aligned}
& f(\Omega^A \wedge \dots \wedge \Omega^A)_x(t_1, \dots, t_{2k}) \qquad t_i \in T_x M \\
&= f(\Omega^A \wedge \dots \wedge \Omega^A)_p(t_1^*, \dots, t_{2k}^*) \\
&= f(\Omega^A \wedge \dots \wedge \Omega^A)_p(d\Psi(\hat{t}_1^*), \dots, d\Psi(\hat{t}_{2k}^*)) \\
&= f(\Psi^*\Omega^A \wedge \dots \wedge \Psi^*\Omega^A)_q(\hat{t}_1^*, \dots, \hat{t}_{2k}^*) \\
&= f(\lambda_*\Omega^B \wedge \dots \wedge \lambda_*\Omega^B)_q(\hat{t}_1^*, \dots, \hat{t}_{2k}^*) \\
&= f_\lambda(\Omega^B \wedge \dots \wedge \Omega^B)_q(\hat{t}_1^*, \dots, \hat{t}_{2k}^*) \\
&= f_\lambda(\Omega^B \wedge \dots \wedge \Omega^B)_x(t_1, \dots, t_{2k})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f(\Omega^A) = f_\lambda(\Omega^B)$

Bemerkung: Sei $E \to M$ ein Vektorbündel assoziiert zu einem G-HFB $P \to M$ (z.B. $G = GL(n,\mathbb{C})$ oder $G = U(n)$, oder reell). Dann definiert jedes invariante Polynom $p \in I^k(\mathfrak{g})^G$ eine Kohomologieklasse:

$$[p(E)] = W(p) \in H^{2k}_{dR}(M, \mathbb{C})$$

unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs.
Die Klasse $[p(E)]$ hat die Natürlichkeitseigenschaft:

$$\varphi^* [p(E)] = [p(\varphi^* E)] \qquad \varphi : N \to M$$

und

$$E_1 \cong E_2 \Rightarrow [p(E_1)] = [p(E_2)]$$

③ Die Chern-Klassen komplexer Vektorbündel

Sei $E \to M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang n mit Rahmenbündel $P \to M$: $G = GL(n, \mathbb{C})$

nach Einführung einer Bündelmetrik läßt sich P auf ein $U(n)$-HFB reduzieren: (man betrachtet unitäre Basen)

$$E = P \times_{GL(n,\mathbb{C})} \mathbb{C}^n = P \times_{U(n)} \mathbb{C}^n$$

Definition: Seien c_k die durch $\det(tE - \frac{1}{2\pi i} X) = \sum_k c_k(X) t^{n-k}$ definierten invarianten Polynome. Dann heißt

$$c_k(E) := W_P(c_k) = [c_k(\Omega)] \in H^{2k}_{dR}(M)$$

die k-te Chern-Klasse von E. Weiter setzt man:

$$c_0(E) = 1, \quad c_k(E) = 0 \quad \text{für } k > n$$

Die Kohomologieklasse

$$c(E) = c_0(E) + \ldots + c_n(E) \in H^*_{dR}(M)$$

$$= [\det(E - \tfrac{1}{2\pi i}\Omega)]$$

heißt totale Chern-Klasse von E.

(Bemerkung: Ω auf P oder auf M!)

Sei $\Omega = (\Omega_{ij})$ die Matrix der Krümmungsform in Bezug auf die Standardbasis von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

(Ω_{ij} kann man hier als 2-Form auf P oder lokale 2-Form auf $U \subset M$ betrachten) →

$$c_k(E) = \left[\frac{(-1)^k}{(2\pi i)^k} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma)\, \Omega_{i_1 \sigma(i_1)} \wedge \ldots \wedge \Omega_{i_k \sigma(i_k)} \right]$$

Insbesondere: $c_1(E) = -\frac{1}{2\pi i}[\operatorname{tr}(\Omega)]$

$$c_2(E) = -\frac{1}{4\pi^2}\left[\sum_{i<j} \Omega_{ii} \wedge \Omega_{jj} - \Omega_{ij} \wedge \Omega_{ji}\right]$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\left[\operatorname{tr}(\Omega \wedge \Omega) - \operatorname{tr}(\Omega) \wedge \operatorname{tr}(\Omega)\right]$$

$$c_n(E) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n [\det(\Omega)]$$

Bemerkung: Chern-Zahlen →

- $R^{\nabla}_x(v,w) = [p] \cdot \Omega_p(v^*, w^*)\,[p]^{-1}$

  $v, w \in T_xM$, $v^*, w^* \in T_pP$ horizontale Lifts, $[p]: \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} E_x$ Faserisom.

- <u>Definition:</u> Als <u>Chern-Zahlen</u> bezeichnet man:

  $$\langle c_{i_1}(E) \cdot \ldots \cdot c_{i_k}(E), [M] \rangle \qquad 2\cdot\sum_{j=1}^{k} i_j = \dim M$$

  $$= \int_M \alpha_{i_1} \wedge \ldots \wedge \alpha_{i_k}$$

  wobei: $c_{i_j} = [\alpha_{i_j}]$ wohldefiniert nach Satz von Stokes!

<u>Bemerkung:</u> • In der Physik werden die Chern-Zahlen auch als <u>topologische Quantenzahlen</u> bezeichnet

• Chern-Zahlen einer Mfk.: für $E = TM$, M fast-komplex komplex!

↳ TM ist ein komplexes VB

Eigenschaften der Chern-Klassen

Satz: ① $c_k(E) \in H^{2k}_{dR}(M,\mathbb{R})$, $c_1(E)=1$, $c_k(E)=0$ für $k>\mathrm{rk}(E)$

② $f: N \to M$: $f^* c(E) = c(f^*E)$ (und damit auch für alle c_k)

③ $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)\cdot c(E_2)$

Bem: $\alpha=[\alpha]$, $\beta=[\beta]$ $\Rightarrow \alpha\cdot\beta = [\alpha\wedge\beta]$

d.h. $c_k(E_1\oplus E_2) = \sum_{j=0}^{k} c_j(E_1)\cdot c_{k-j}(E_2)$

④ $\int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\gamma_1) = -1$ für das kanonische Linienbündel $\gamma_1 \to \mathbb{CP}^1$

d.h. $c_1(\gamma_1)$ ist der Erzeuger von $H^2_{dR}(\mathbb{CP}^1) \cong \mathbb{R}$, $[\alpha] \mapsto \int\alpha$

besser: tautologisches Geradenbündel ?

Beweis:

- ① + ②: klar, bzw. schon gezeigt
- zu ③: $E_1\oplus E_2$: $\nabla_X(s_1\oplus s_2) = (\nabla^1_X s_1)\oplus(\nabla^2_X s_2)$

$$\Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} \Omega^{\nabla^1} & 0 \\ 0 & \Omega^{\nabla^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_k(E_1\oplus E_2) = \sum_{j=0}^{k} c_j(E_1)\, c_{k-j}(E_2) \qquad (\to \text{Lemma})$$

- zu ④: $\gamma_1 := \{(L,\xi) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid L\in\mathbb{CP}^1, \xi\in L\} \to \mathbb{CP}^1$, $(L,\xi)\mapsto L$

γ_1 ist assoziiert zum Hopf-Bündel H, also dem $U(1)$-HFB (mit Standarddarstellung)

$$S^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}^1$$

$$\Rightarrow c_1(\gamma_1) = W_H(c_1) = c_1(H) = -\frac{1}{2\pi i}[\Omega] \qquad (\mathrm{tr}\,\mathbb{R}=\mathbb{R} \text{ da in } \mathfrak{u}(1)\cong i\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{CP}^1} c_1(\gamma_1) = -1$$

Integral über einen Repräsentanten

Bemerkung: Komplexe Linienbündel werden durch c_1 klassifiziert.

(Werde in $\mathbb{Z}$!)

Bemerkung : • Die Chern-Klassen sind reell. Tatsächlich liegt $c(E)$ sogar im Bild von

$$\varphi : H^*_{sing}(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^*_{sing}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong_\beta} H^*_{dR}(M, \mathbb{R})$$

wobei α der Koeffizienten-Homomorphismus und β der de Rham-Isomorphismus ist, d.h. es gilt

$$\langle c_k(E), [\sigma] \rangle = \int_\sigma c_k(E) \in \mathbb{Z}$$

ganz-zahlige Kohomologieklasse

2k-Kette 2k-dim

für alle glatten (singulären) Zyklen ($\hat{=}$ Untermfh.) σ, dabei wird über einen Repräsentanten der Kohomologie-Klasse $c(E)$ integriert, was - nach dem Satz von Stokes wohl-definiert ist.

• Durch ① – ④ wird axiomatisch eine Klasse $c^{sing}(E) = c_0(E) + \dots + c_n(E) \in H^*_{sing}(M, \mathbb{Z})$ definiert (zz. Existenz und Eindeutigkeit), es gilt. $u = dr(E)$

$$\varphi(c^{sing}(E)) = c(E)$$

④': $c_1(\mathcal{O}_1)$ erzeugt $H^2_{sing}(\mathbb{CP}^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

Beim Übergang zur reellwertigen Kohomologie verliert man Informationen, dafür findet man Zusammenhänge zwischen Krümmung und Topologie

Weitere Eigenschaften der Chern-Klassen

Satz: ① $E_1 \cong E_2 \Rightarrow c(E_1) = c(E_2)$ dh alle Chern-Klassen sind gleich

② E trivial (also isomorph zum trivialen VB)

$\Rightarrow c(E) = 1$ dh. $c_k(E) = 0$ für $k > 0$

Insbesondere ist ein Vektorbündel nicht trivial, sobald ein $c_k \neq 0$.

③ Sei E ein komplexes Vektorbündel vom Rang n und E besitze k überall linear unabhängige Schnitte, dann gilt:

$$c_j(E) = 0 \quad \text{für alle} \quad j > n-k$$

(dh c_k ≙ Maß für Trivialität)

④ Sei $E^* \cong \bar{E}$ das zu E duale Bündel, dann gilt:

$$c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$$

Beweis: zu ①: schon gezeigt

zu ②: $E = M \times \mathbb{C}^n$ das triviale VB

$\Rightarrow$ E hat den kanonischen flachen Zus.: $\Omega \equiv 0$

$\Rightarrow c(E) = 1$ und nach ① gilt das auch für alle zu E isomorphen Bündel

zu ③: aus der Voraussetzung folgt die Existenz eines trivialen Unterbündels $\varepsilon^k \subset E$ vom Rang k, weiter existiert ein Vektorbündel F mit:

$$E = \varepsilon^k \oplus F \qquad \operatorname{rk}(F) = n-k$$

$$\Rightarrow c(E) = c(\varepsilon^k)\, c(F) = c(F) \qquad \hookrightarrow c_j(F) = 0 \ \forall j > n-k$$

$$\Rightarrow c_j(E) = 0 \quad \text{für} \quad j > n-k$$

zu ④: ∇^* auf E^*: $(\nabla^*_X \eta)\, e = X(\eta(e)) - \eta(\nabla_X e)$

Ω^D Krümmungsmatrix bzgl $p = (s_1, \dots, s_n)$

$\rightarrow \Omega^{D^*} = -\Omega^D$ bzgl. $p^* = (s_1^*, \dots, s_n^*)$ duale Basis

$\rightarrow c_k(\Omega^{D^*}) = c_k(-\Omega^D) = (-1)^k c_k(\Omega^D)$

HFB →

nochmal: $\Psi : P_E \xrightarrow{\sim} P_{E^*}$, $(s_1, \dots, s_n) \mapsto (s_1^*, \dots, s_n^*)$

$\Rightarrow \Psi(p \cdot g) = \Psi(p)(g^{-1})^T$ $\qquad \Psi(p) = p^*$

Transformationsregel für duale Basen

$\omega^* := -(\Psi^{-1})^* \omega^T$ ist Zus. form auf P_{E^*}

$\Rightarrow \Omega^{\omega^*} = -(\Psi^{-1})^* \Omega^T$

auf M: $c_k(\Omega^{\omega^*}) = c_k(-(\Psi^{-1})^* \Omega^T)$

$= c_k(-\Omega^T)$

$= (-1)^k c_k(\Omega)$