

⑦ Invariante Polynome

• Sei G eine Lie-Gruppe, adjungierte Darstellung:

$$\text{Ad}: G \longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$$

Bemerkung: Im Fall von Matrixgruppen gilt: $\text{Ad}(g)X = gXg^{-1}$

Definition: Eine multilineare, symmetrische Abbildung

$$f: \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt G -invariant, falls:

$$f(\text{Ad}(g)X_1, \dots, \text{Ad}(g)X_k) = f(X_1, \dots, X_k)$$

für alle $g \in G, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$.

Bezeichnung: $\text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G =$ Menge aller multilinearen, symmetrischen G -invarianten Abbildungen

$$\text{Sym}^*(\mathfrak{g})^G := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$$

Bemerkung: $\text{Sym}^*(\mathfrak{g})^G$ ist eine reelle kommutative Algebra

$$(f \cdot h)(X_1, \dots, X_{k+l}) := \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} f(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) h(X_{\sigma_{k+1}}, \dots, X_{\sigma_{k+l}})$$

für $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G, h \in \text{Sym}^l(\mathfrak{g})^G$.

• Sei $a_1, \dots, a_n$ eine Basis in $\mathfrak{g}$ (unabhängig von der Wahl der Basis)

Definition: Ein homogenes Polynom vom Grad k auf $\mathfrak{g}$ ist eine Abbildung $P: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$P(X) = \sum_i P_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k} \quad \text{für } X = \sum_i x_i a_i$$

wobei die komplexen Koeffizienten $P_{i_1, \dots, i_k}$ symmetrisch in den Indizes $i_1, \dots, i_k$ sind.

Definition: Ein homogenes Polynom P heißt invariant falls

$$P(\text{Ad}(g)X) = P(X)$$

für alle $g \in G, X \in \mathfrak{g}$.

Bezeichnung: $P^k(\mathfrak{g})^G =$ Menge der invarianten homogenen Polynome auf $\mathfrak{g}$, vom Grad k

$$P^*(\mathfrak{g})^G = \bigoplus_{k=0}^{\infty} P^k(\mathfrak{g})^G$$

siehe Bemerkung

Lemma: Sei $G = GL(n, \mathbb{C}), \mathfrak{g} = gl(n, \mathbb{C}) = M(n \times n, \mathbb{C})$, dann gilt

$$\begin{aligned} P \in P^*(\mathfrak{g})^G &\iff P(AXA^{-1}) = P(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, A \in G \\ &\iff P(XY) = P(YX) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Beweis: • $P(XY) = P(YX) \rightarrow P(AXA^{-1}) = P(A^{-1}AX) = P(X) \quad G \subset \mathfrak{g}!$

• $P(AXA^{-1}) = P(X)$

$$X \in G: P(XY) = P(XYX^{-1}) = P(YX)$$

$$\Rightarrow P(XY) = P(YX) \quad \forall X, Y$$

da $G \subset \mathfrak{g}$ dicht

Bemerkung: $P^*(\mathfrak{g})^G$ ist eine Algebra

Lemma: Die Abbildung $\phi: \text{Sym}^*(\mathfrak{g}) \rightarrow P^*(\mathfrak{g})$ definiert durch

$$\phi(f)(x) := f(x, \dots, x)$$

ist ein Algebren-Isomorphismus.

Beweis: • ϕ ist ein Algebren-Homomorphismus

• man definiert eine zu ϕ inverse Abbildung:

$$p \in P^k(\mathfrak{g}) \mapsto f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})$$

man definiert f auf Basiselementen und setzt multilinear fort.

$$f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) := p_{i_1 \dots i_k}$$

Bemerkung: Die Zuordnung $p \mapsto f$ nennt man vollständige Polarisation. Man kann sie auch so beschreiben:

$$p \in P^k(\mathfrak{g})$$

$$\frac{1}{k!} p(t_1 x_1 + \dots + t_k x_k) = \sum_{\alpha} t^{\alpha} p_{\alpha}(x_1, \dots, x_k)$$

$$\Rightarrow f(x_1, \dots, x_k) = p_{\alpha}(x_1, \dots, x_k) \quad \text{für } \alpha = (1, \dots, 1)$$

$$\text{z.B.: } p(x) = \text{tr}(x^3) \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \text{tr}(x_1 x_2 x_3 + x_2 x_1 x_3) \quad ?$$

Lemma: Der Isomorphismus ϕ schränkt sich ein auf einen Isomorphismus der Algebren $\text{Sym}^*(\mathfrak{g})^G$ und $P^*(\mathfrak{g})^G$.

Bemerkung: Allgemein gilt: $\text{Sym}^*(V)^G \cong P^*(V)^G$, wobei G eine Gruppe linearer Transformationen eines VR V ist.

Beispiele:

- $G = GL(n, \mathbb{C})$
 $p(X) := \text{tr}(X), \quad p(X) = \det(X)$
sind invariante Polynome auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

- allgemeiner definiert man $GL(n, \mathbb{C})$ -invariante Polynome $c_k: \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ durch:

$$\det\left(tE - \frac{1}{2\pi i} X\right) = \sum_{k=0}^n c_k(X) t^{n-k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{besser?} \\ + \frac{i}{2\pi} \end{array} \right)$$

Bemerkung:

- $c_k(X) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^k \text{tr}(\wedge^k X)$

wobei: $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$
 $\rightarrow X: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$
 $\rightarrow \wedge^k X: \wedge^k \mathbb{C}^n \rightarrow \wedge^k \mathbb{C}^n$
 $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto (Xv_1) \wedge \dots \wedge (Xv_k)$

besser:
für $\frac{1}{2\pi i}$

$$\rightarrow c_1(X) = -\frac{1}{2\pi i} \text{tr}(X)$$

$$c_n(X) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^n \det(X)$$

$$c_0(X) = 1$$

- X habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

dh. X ist konjugiert zur Diagonalmatrix $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\Rightarrow c_k(X) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

σ_k : k -te elementar-sym. Fkt.

$$\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_k}$$

λ_i sind formale Unbestimmte

Satz: Sei $f \in \mathbb{R}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ ein symmetrisches Polynom in den Unbestimmten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Dann läßt sich f als Polynom in den elementar-symmetrischen Funktionen σ_k darstellen, dh. es gibt ein Polynom $Q_f \in \mathbb{R}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ mit

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Q_f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$$

Die Funktionen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sind algebraisch unabhängig, dh. falls für ein Polynom $Q(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$ gilt, so folgt $Q = 0$.

Lemma: Der Ring der invarianten Polynome auf $g = gl(n, \mathbb{C})$ ist ein Polynomring in den Erzeugern $c_1, \dots, c_n$, d.h.

$$P^*(gl(n, \mathbb{C}))^{gl(n, \mathbb{C})} = \mathbb{C}[c_1, \dots, c_n]$$

Beweis: Sei p ein invariantes Polynom auf $gl(n, \mathbb{C})$

$$\Rightarrow p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = p(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$$

ist ein symmetrisches Polynom in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

da Diagonaleinträge durch Konjugationen $X \mapsto gXg^{-1}$ permutiert werden können

$$\Rightarrow p(X) = Q(c_1(X), \dots, c_n(X)) \quad \text{für alle diagonalisierbaren Matrizen } X$$

verschiedene Eigenwerte ..

$$\Rightarrow P = Q(c_1, \dots, c_n) \quad \text{auf ganz } gl(n, \mathbb{C})$$

da P, Q stetig und die Menge der diagonalisierbaren Matrizen dicht in $gl(n, \mathbb{C})$ liegt.

Bemerkung: Matrizen in $u(n)$ sind diagonalisierbar, daher findet man hier direkt (mit obiger Argumentation),

$$P^*(u(n))^{u(n)} = \mathbb{C}[c_1, \dots, c_n] \quad (\text{genauer: } \mathbb{C}[u(n)])$$

weiter gilt:

- $c_k|_{u(n)} \in P^k(u(n))^{u(n)}$
- $c_1|_{u(n)}, \dots, c_n|_{u(n)}$ sind algebraisch unabhängig und reellwertig

zum letzten Punkt:

$$\begin{aligned} \sum c_k(X) t^{n-k} &= \det\left(tE - \frac{1}{2\pi i} X\right) \\ &= \det\left(tE + \frac{1}{2\pi i} \bar{X}\right) \\ &= \det\left(tE - \frac{1}{2\pi i} X^T\right) \quad X \in u(n) \\ &= \det\left(tE - \frac{1}{2\pi i} X\right) \\ &= \sum c_k(X) t^{n-k} \end{aligned}$$

Im Unterschied zum reellen Fall gilt also: $P^*(u(n))^{u(n)} = P^*(gl(n, \mathbb{C}))^{gl(n, \mathbb{C})}$

↑
später für $so(n)$

Lemma: ① Sei $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} c_k(X) &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^k \sum_{i_1, \dots, i_k} \det \begin{pmatrix} x_{i_1 i_1} & \dots & x_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_k i_1} & \dots & x_{i_k i_k} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^k \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) x_{i_1 \sigma(i_1)} \dots x_{i_k \sigma(i_k)} \end{aligned}$$

② Sei $X = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ eine Blockmatrix, dann gilt:

$$c_k \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right) = \sum_{j=0}^k c_j(A) \cdot c_{k-j}(B)$$

Beweisidee!

Bemerkung: Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer kompakten ^{zus} Lie-Gruppe mit maximalem Torus $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ und Weyl-Gruppe W . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Sym}^*(\mathfrak{g})^G &\cong \text{Sym}^*(\mathfrak{t})^W && (\rightarrow \text{Ko-Mo}) \\ &= \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_n] && \text{Satz von Chevalley} \end{aligned}$$

(gilt auch für $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{t} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\}$, $W = S_n$
 $\hat{=}$ jedes symmetrische Polynom in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ läßt sich als Polynom in den elementar-symmetrischen Funktionen schreiben)

② Der Weil - Homomorphismus

Sei $P \xrightarrow{\pi} M$ ein G -HFB mit Zusammenhangsform $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ und Krümmungsform $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$

Mit Hilfe von multilinearen Abbildungen $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})$ kann man k Differentialformen mit Werten in $\mathfrak{g}$ einer gewöhnlichen komplexwertigen Differentialform auf P zuordnen:

$$\omega_1 \in \Omega^{l_1}(P, \mathfrak{g}), \dots, \omega_k \in \Omega^{l_k}(P, \mathfrak{g})$$

$$\Rightarrow f(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \in \Omega^r(P, \mathbb{C}) \quad r = l_1 + \dots + l_k$$

$$f(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{l_1! \dots l_k!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn}(\sigma) f(\omega_1(X_{\sigma_1} \dots X_{\sigma_{l_1}}), \dots, \omega_k(X_{\sigma_{l_1+1}} \dots X_{\sigma_{l_1+l_k}}))$$

Bemerkung: Dies entspricht der Definition des Dachproduktes von k Differentialformen, wobei das Produkt von komplexen Zahlen ersetzt wird durch die Anwendung von f auf die k -Tupel von Vektoren in $\mathfrak{g}$.

Die Krümmungsform Ω definiert so eine $2k$ -Form auf P :

$$\underline{f(\Omega)} = f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega) \in \Omega^{2k}(P, \mathbb{C}) \quad f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$$

Analog definiert jedes G -invariante Polynom $p \in P^k(\mathfrak{g})^G$ eine $2k$ -Form auf P :

*(G -invariant
braucht man
erst später)*

z.B.: $G = GL(n, \mathbb{C}), \quad \Omega = (\Omega_{ij}) \in \Omega^2(P, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$

$$\text{tr}(\Omega) = \Omega_{11} + \dots + \Omega_{nn} \in \Omega^2(P)$$

$$\det(\Omega) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{1\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \Omega_{n\sigma(n)} \in \Omega^{2n}(P)$$

genauer:
 $\Rightarrow$

Satz: ① $f(\Omega) \in \Omega_{\text{hor}}^{2k}(P)^G \cong \Omega^k(M) \quad (\text{triviale } G\text{-Wirkg.})$

$$f(\Omega) = \pi^* \Omega^k(\Omega)$$

② $d f(\Omega) = 0$

③ Seien ω_0, ω_1 zwei Zusammenhangsformen mit den Krümmungsformen Ω_0, Ω_1 , dann gilt:

$$f(\Omega_0) = f(\Omega_1) + d\varphi \quad \text{mit } \varphi \in \Omega_{\text{hor}}^{2k-1}(P)^G$$

Insbesondere definiert für jedes $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ $f(\Omega)$ eine geschlossene $2k$ -Form auf P und auf M , deren Kohomologieklassse nicht vom Zusammenhang abhängt.

Sei $a_1, \dots, a_n$ eine Basis in $\mathfrak{g}$

$\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ Krümmungsform

$$\Rightarrow \Omega = \sum_i \Omega_i a_i \quad \Omega_i \in \Omega^2(P)$$

Dualformen



$f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^*$ entspreche dem Polynom $p = \sum_i p_{i_1 \dots i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}$

$$\text{d.h. } f(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = p_{i_1 \dots i_k}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\Omega) &= f(\Omega_1 \wedge \dots \wedge \Omega_k) \\ &= \sum_i p_{i_1 \dots i_k} \Omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_k} \\ &= p(\Omega) \end{aligned}$$

d.h. man erhält $f(\Omega)$ bzw. $p(\Omega)$ indem man die Unbestimmten x_i durch Ω_i und $\cdot$ durch $\wedge$ ersetzt

Beweis:

- $\Omega = D_\omega \omega$ ist horizontal $\Rightarrow f(\Omega)$ ist horizontal
- $\Omega \in \Omega_{hor}^{2k}(P, \mathfrak{g})^G$ also auch G -invariant
 $\Rightarrow (R_g^*(f)(\Omega)) = f(R_g^*\Omega)$ (da $\varphi^*\alpha = \alpha(d\varphi, \dots, d\varphi)$)
 $= f(\text{Ad}(g^{-1})\Omega)$
 $= f(\Omega)$ da $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$

$\Rightarrow f(\Omega) \in \Omega_{hor}^{2k}(P)^G$ G operiert linear trivial

$\Rightarrow f(\Omega) = \pi^* \bar{f}(\Omega)$ mit $\bar{f}(\Omega) \in \Omega^{2k}(M)$ G -weilig

- $d = D_\omega$ auf $\Omega_{hor}^*(P)^G$ da $D_\omega \alpha = d\alpha + g_\omega(\omega) \wedge \alpha$
0 für lin. Darst.

Produktregel: $D_\alpha (\alpha \wedge \beta) = D_\alpha \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge D_\alpha \beta$, $\alpha, \beta \in \Omega^*(P)$
 $\beta \in \Omega^*(P, V)$

$\Rightarrow d f(\Omega) = d f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$
 $= D_\omega f(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$ f linear!
 $= f(D_\omega(\Omega \wedge \dots \wedge \Omega))$
 $= \sum_i f(\Omega \wedge \dots \wedge D_\omega \Omega \wedge \dots \wedge \Omega)$ ih. Stelle
 $= 0$ da $D_\omega \Omega = 0$ Bianchi-Identität

$\Rightarrow d \bar{f}(\Omega) = 0$ auf M da π^* ist eine Bijektion:
 $\pi^*: \Omega^k(M) \leftrightarrow \Omega_{hor}^k(P)^G$
 $0 = d f(\Omega) = d \pi^* \bar{f}(\Omega) = \pi^* d \bar{f}(\Omega)$

- $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ seien zwei Zusammenhangsformen auf P
~~Wiederholung~~ ist wieder keine Zus. form.
- $\Rightarrow \eta := \omega_1 - \omega_0 \in \Omega_{hor}^1(P, \mathfrak{g})^G$ von $\text{Fp Ad}!$
 $\omega_t := \omega_0 + t\eta$ ist eine Gerade im Raum der Zus. auf P
 Ω_t sei die Krümmungsform von ω_t
 es gilt: $\frac{d}{dt} \Omega_t = D_{\omega_t} \eta$ (*)