Die Spin^c-Gruppe

Definition: Die Spin^c-Gruppe $\mathrm{Spin}^c(n)$ ist die Gruppe in $Cl(n) \otimes \mathbb{C}$ erzeugt von $\mathrm{Spin}(n)$ und S^1.

komplexe Spin-Gruppe

Lemma: $\mathrm{Spin}^c(n) \cong (\mathrm{Spin}(n) \times S^1)/_{\mathbb{Z}_2}$ mit $\mathbb{Z}_2 = \{(\lambda^{-1}, \lambda) \mid \lambda \in \{\pm 1\}\} = \{(1,1), (-1,-1)\}$

Beweis:

- $$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spin}(n) \times S^1 & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Spin}^c(n) & \subset & \mathbb{C}l(n) \\ (g, z) & \mapsto & g \cdot z & & \end{array}$$

ist ein surjektiver Gruppen-Hom. da $S^1 \subset Z(\mathbb{C}l(n))$

$\ker(\phi) = \{ (\lambda^{-1}, \lambda) \mid \lambda \in S^1 \cap \mathrm{Spin}(n)\}$

einzigen Skalare in $\mathrm{Spin}(n)$: ± 1 $\qquad$ $\mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$

$\to \ker(\phi) = \{(1,1), (-1,-1)\}$

Lemma: Man hat folgende exakte Sequenz von Gruppen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Z}_2 & \to & \mathrm{Spin}^c(n) & \xrightarrow{p} & SO(n) \times S^1 & \to & 1 \\ & & & & [g, z] & \mapsto & (\lambda(g), z^2) & & \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2 = \{(1,1), (1,-1)\}$

p: 2-fache Überlagerung

Bemerkung: Man hat verschiedene Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & S^1 \arrow[d, "j"] \arrow[dr, "z \mapsto z^2"] & & \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Spin}(n) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathrm{Spin}^c(n) \arrow[r, "\ell"] \arrow[d, "\lambda"] & S^1 \arrow[r] & 1 \\
 & & SO(n) \arrow[d] & & \\
 & & 1 & &
\end{tikzcd}$$

$i(g) = [g, 1]$ $\qquad$ $\lambda([g, z]) = \lambda(g)$

$j(z) = [1, z]$

$\ell([g, z]) = z^2$

Sei $n = 2m$, dann ist $U(m) \subset SO(2m)$

$$f : U(m) \longrightarrow SO(2m) \times S^1, \qquad f(A) = (A, \det A)$$

Lemma: Es existiert ein Homomorphismus $F : U(m) \longrightarrow Spin^c(2m)$ mit folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & Spin^c(2m) \arrow[d, "p"] \\ U(m) \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"'] & SO(2m) \times S^1 \end{tikzcd}$$

$$p([g,z]) = (\lambda(g), z^2)$$

Beweis: a) Überlagerungstheorie $\nearrow$ Friedrich

b.) explizit

$A \in U(m)$, $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}^m$ diagonalisierende Basis: $A f_k = e^{i\theta_k} f_k$

d.h. $A = \mathrm{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m})$

man definiert: $$F(A) = \left[\prod_j \left(\cos\left(\tfrac{\theta_j}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\theta_j}{2}\right) f_j J f_j\right) \times e^{\frac{i}{2}\sum_j \theta_j}\right]$$

$\nwarrow$ hier $f_i, J f_i \in \mathbb{R}^{2n}$

da $f(A) = (A, e^{i\sum_j \theta_j})$

$$p(F(A)) = \left(\lambda\left(\cos\left(\tfrac{\theta_j}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\theta_j}{2}\right) f_j J f_j\right), \; e^{i\sum_j \theta_j}\right) \quad \text{ÜA}$$

Bemerkung:

- $Spin^c(n) \subset Cl(n)$

  $\Rightarrow$ Die Spin-Darstellung von $Spin(n)$ setzt sich fort zu einer Darstellung von $Spin^c(n)$

  $$\varrho : Spin^c(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta), \quad \varrho([g,z])\varphi = z \cdot \varrho(g)\varphi$$

  Δ ist irreduzibel als $Spin^c(n)$-Darstellung für $n \equiv 1(2)$ und $\Delta = \Delta_+ \oplus \Delta_-$ für $n \equiv 0(2)$

  ! $\longrightarrow$

- $Spin^c(n) = (Spin(n) \times U(1)) / \mathbb{Z}_2$

  $\Rightarrow$ Irreduzible $spin^c(n)$-Darstellungen sind von der Form $V \otimes \mathbb{C} \cong V$, wobei V eine irred. $spin(n)$-Darstellung ist und $z \mapsto z^k$ die $U(1)$-Darstellung auf $\mathbb{C}$ und $(-1,-1)$ wirkt als Id.!

$\varrho: \quad \mathrm{Spin}^c(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Delta)$

$\varrho([g,z]) = z \cdot \varrho(g)$

Lemma!

$\Rightarrow \quad \det \varrho([g,z]) = z^{\dim(\Delta)}$

$\Rightarrow$ Isomorphismus von Spin^c-Darstellungen: $\ell^{\frac{2}{n}\dim \Delta_n} \cong \det(\Delta_n)$

$\det(\Delta_n) := \Lambda^{\dim \Delta_n}(\Delta_n)$

$\ell \cong \mathbb{C}$ und $[g,z]$ wirkt durch z^2

analog im Fall $n = 2m$: $\ell^{\frac{4}{n}\dim \Delta_n^{\pm}} \cong \det(\Delta_n^{\pm})$

insbesondere für $n=4$: $\ell \cong \Lambda^2(\Delta_4^+) \cong \Lambda^2(\Delta_4^-)$

<u>Lemma:</u> Für die Spin-Darstellung $\varrho: \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow U(\Delta_n)$ gilt:

$$\det(\varrho(g)) = 1$$

für alle $g \in \mathrm{Spin}(n)$, d.h. $\varrho: \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow SU(\Delta_n)$.

<u>Beweis:</u> Sei $f: \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow U(1)$, $g \mapsto \det \varrho(g)$

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \overset{F}{\nearrow} & \downarrow e^{2\pi i} \\ \mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow[f]{} & U(1) \end{array}$$

$\Rightarrow$ • f ist ein Gruppen-Hom., f besitzt einen Lift zu einem Gruppen-Hom. $F: \mathrm{Spin}(n) \to \mathbb{R}$, d.h.

$$f(g) = e^{2\pi i\, F(g)}$$

<u>da</u>: $\S$ Spin(n) ist einfach-zus., Überlagerungstheorie

$\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +)$

• Spin(n) ist kompakt $\Rightarrow$ $F(\mathrm{Spin}(n)) \subset \mathbb{R}$ ist kompakt,

$\Rightarrow$ $F(\mathrm{Spin}(n))$ liegt in einem beschränkten Intervall <u>und</u> ist eine UG!

$\Rightarrow$ $F \equiv 0$

<u>da</u> $F(g^n) = n\, F(g)$

$\Rightarrow$ $f(g) = \det \varrho(g) \equiv 1$

man hat gezeigt: Das Bild einer unitären Darstellg einer einfach-zus. Gruppe liegt in SU.

Spin^c – Strukturen

Definition: Eine Spin^c– Struktur ist eine λ – Reduktion des Rahmenbündels $P = P_{SO(n)}$, d.h. ein $Spin^c(n)$ – HFB Q mit

$$\Psi(q \cdot \hat{g}) = \Psi(q) \cdot \lambda(\hat{g})$$

für $q \in Q$, $\hat{g} \in Spin^c(n)$ und $\qquad \hat{g} = [g, z]$

$$\lambda : Spin^c(n) \longrightarrow SO(n), \qquad \lambda([g,z]) = \lambda(g)$$

Beispiel: • Jede Spin – Struktur induziert eine Spin^c– Struktur, d.h. jede Spin–Mfk. ist auch eine Spin^c– Mfk.

da : $\quad i : Spin(n) \hookrightarrow Spin^c(n)$

$\hookrightarrow$ man definiert : $\quad Q = P_{Spin(n)} \times_i Spin^c(n)$

Hirzebruch Hopf: '58 M^4 kompakt, or. $\Rightarrow$ Spin^c

M^3 kompakt und or. $\Rightarrow$ Spin

• Jede $U(m)$ – Reduktion von $P = P_{SO(n)}$ induziert eine Spin^c– Struktur, d.h. jede fast–komplexe Mfk. besitzt eine Spin^c– Struktur. $\qquad n = 2m$

da : $\quad F : U(m) \longrightarrow Spin^c(n)$

$\hookrightarrow$ man definiert: $\quad Q = P_{U(m)} \times_F Spin^c(n)$

Bemerkung: Zu jeder Spin^c– Struktur Q ist $U(1)$– HFB assoziiert, man definiert:

$$P_{U(1)} := Q/_{Spin(n)} \qquad\qquad Q/_{U(1)} \cong P_{SO(n)}$$

Das assoziierte Linienbündel

$$L = P_{U(1)} \times_{U(1)} \mathbb{C} = P_{Spin^c(n)} \times_{Spin^c(n)} \mathbb{C}$$

heißt <u>Determinantenbündel</u> der Spin^c– Struktur.

$$P_{U(1)} = P_{Spin^c(n)} \times_{Spin^c(n)} U(1) \qquad\qquad \ell : Spin^c(n) \to U(1), \; [g,z] \mapsto z^2$$

$$\Rightarrow \quad L = P_{Spin^c(n)} \times_\ell \mathbb{C}$$

(Die Linienbündel L "variieren" die verschiedenen Spin^c– Strukturen)

Beispiel: M^{2m} sei eine fast-komplexe Mfk. $n = 2m$

$\to \quad P_{Spin^c(n)} = P_{U(m)} \times_F Spin^c(n)$, $F: U(m) \longrightarrow Spin^c(n)$

$\to \quad L = P_{Spin^c(n)} \times_e \mathbb{C}$

$= (P_{U(m)} \times_F Spin^c(n)) \times_e \mathbb{C}$

$= P_{U(m)} \times_{e \circ F} \mathbb{C}$ $\qquad e \circ F : U(m) \longrightarrow Spin^c(n)$, $A \mapsto \det A$

$\to \quad L = \Lambda^m T^{10} = \Lambda^{0m}$ $\qquad$ da: $P_{U(m)} \times_{U(m)} \mathbb{C}^m = T^{10}$ (~~det~~ Standarddarstellung)

dh L ist das anti-kanonische Bündel

<u>Das Spin^c-Spinor-Bündel</u>

$S^c := P_{Spin^c(n)} \times_\rho \Delta$ $\qquad \rho: Spin^c(n) \to Aut(\Delta)$ Spinor-Darstellung

S^c ist ein komplexes VB, mit hermitescher Metrik und Clifford-Multiplikation

Bemerkungen:

- Ist S^c die von einer Spin-Struktur induzierte Spin^c-Struktur, dann gilt:

  $S^c = S, \quad L = \Theta^1$ $\qquad$ S = Spinor-Bündel, L = Determinantenbündel, Θ^1 = triviales Geradenbündel

- Das Determinantenbündel läßt sich aus dem Spin^c-Spinorbündel (bis auf Isomorphie) zurückgewinnen:

  $L^{\frac{1}{2}\dim S^c} \cong \Lambda^{\dim S}(S^c)$ $\qquad$ da man hat eine Isomorphie der entspr. Darstellungen

- S^c sei das Spinor-Bündel einer beliebigen Spin-Struktur

  S^c ist assoziiert zur Spin^c-Darstellung $\Delta_n = \Delta_n \otimes \mathbb{C}$ (Δ_n: Spin(n) Darst., $\mathbb{C}$: U(1) Darst. $z \cdot u = z \cdot u$)

  $\Rightarrow$ S^c ist das Tensorprodukt zweier lokal definierter VB

  $S^c = S \otimes L^{1/2}$

  S und $L^{1/2}$ sind global definiert falls M eine Spin-Struktur besitzt

  $w_2(TM) = c_1(L) \mod 2$