

Das Spinor-BündelSei (M^*, g) eine Riemannsche Spin-Mph.

$$n = 2m$$

 $P_{\text{Spin}(n)} \rightarrow M$ die fixierte Spin-Struktur $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ die Spin-Darstellung

$$\Delta = \mathbb{C}^{2^m}$$

$$\Delta = \Delta_+ \oplus \Delta_-$$

Spinor-Bündel:

$$S = P_{\text{Spin}(n)} \times_{\rho} \Delta$$

mit hermiteschen Skalarprodukt!
und Clifford-MultiplikationBemerkung: Der Levi-Civita-Zusammenhang induziert einen
Zusammenhang auf $P_{\text{Spin}(n)}$ und eine
kovariante Ableitung auf S :

Spin-Zusammenhang

LC-Zusammenhang:

$$\omega \in \Omega^1(P_{\text{Spin}(n)}, \mathfrak{so}(n))$$

 λ -Reduktion

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\lambda} & \mathfrak{so}(n) \\
 \downarrow P_{\text{Spin}(n)} & & \downarrow \\
 P_{\text{Spin}(n)} & \xrightarrow{\psi} & P_{\mathfrak{so}(n)}
 \end{array}$$

 $\Rightarrow \exists$ Zusammenhang auf $P_{\text{Spin}(n)}$: $\tilde{\omega}$

$$\text{mit } \lambda_*(\tilde{\omega}(x)) = \omega(\psi_*x)$$

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j$$

$$\omega_{ij} = g(\nabla_{e_i} e_j)$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega} = \sum_{i < j} \frac{1}{2} \omega_{ij} e_i \circ e_j$$

 $\rightarrow$ lokal hat man für die kovariante
Ableitung in S folgende Formel

$$\nabla_x \bar{\varphi} = x(\bar{\varphi}) + \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(x) e_i \circ e_j \circ \bar{\varphi}$$

$$\text{für } \varphi \in \Gamma(S) = C^\infty(P_{\text{Spin}(n)}, \Delta)$$

$$\varphi = [p, \bar{\varphi}]$$

$$\text{da } \nabla_x [p, \bar{\varphi}] = [p, x(\bar{\varphi}) + g_x(\tilde{\omega}(x)) \bar{\varphi}]$$

V, W seien G -Darstellungen

allgemeines Prinzip:

$L: V \rightarrow W$ G -äquivalente lineare Abbildung, d.h.

$$L(g \cdot v) = g \cdot L(v)$$

$\Rightarrow$ L induziert einen Homomorphismus von assoziierten Vektorbündeln

$$L: P_G \times_{g_1} V \rightarrow P_G \times_{g_2} W$$

$$L([p, v]) := [p, L(v)]$$

Anwendung: Die Clifford-Multiplikation definiert eine äquivalente Abbildung

$$\mu: T^c \otimes \Delta \rightarrow \Delta$$

$$T^c = \mathbb{C}^n$$

$$x \otimes \varphi \mapsto x \cdot \varphi = \rho(x) \varphi$$

Bemerkung:

$$T^c \otimes \Delta \cong \Delta \oplus \ker(\mu)$$

$$\Delta = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$$

$$D: \Gamma(S) \xrightarrow{\rho} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma(S)$$

$$\ker(\mu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$$

Satz: Das Spinor-Bündel (mit dem natürlichen hermiteschen Skalarprodukt und Spin-Zusammenhang) über einer Spin-Mf. ist ein Clifford-Bündel, d.h. es gilt insbesondere

- (i) $\langle X \cdot \varphi_1, \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1, X \cdot \varphi_2 \rangle = 0$
- (ii) $\nabla_X (Y \cdot \varphi) = (\nabla_X Y) \cdot \varphi + Y \cdot \nabla_X \varphi$
- (iii) $\langle \nabla_X \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \nabla_X \psi \rangle = X(\langle \varphi, \psi \rangle)$

für alle $X \in \Gamma(TM)$, $\varphi, \psi \in \Gamma(S)$.

Satz: Die Twist-Krümmung des Spinor-Bündels einer Spin-Struktur ist Null, d.h. es gilt für den Dirac-Operator:

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\text{scal}}{4} \quad (\text{Lichnerowicz-Schrödinger})$$

Beweis: für die Krümmung im Spinor-Bündel gilt

$$R_{XY}^S \bar{\varphi} = \mathcal{G}_* (\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y})) \bar{\varphi} \quad \varphi = [p, \bar{\varphi}]$$

$$\tilde{\Omega} \in \Omega^2(P_{\text{Spin}(n)}, \text{spin}(n))$$

$$\tilde{\Omega}(X, Y) = \frac{1}{4} \sum_i g(R_{XY} e_i, e_i) e_i \cdot e_i$$

local: $\Rightarrow R_{XY}^S \varphi = \frac{1}{4} \sum_i g(R_{XY} e_i, e_i) e_i \cdot e_i \cdot \varphi \quad \{e_i\} \text{ lokale ONB}$

da Ω sei die Krümmung des LC-Zus

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{i,j} \Omega_{ij} e_i \wedge e_j, \quad \Omega_{ij}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = g(R_{XY} e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{ii} e_i \wedge e_i \end{aligned}$$

$$\tilde{\Omega} \text{ ist bestimmt durch } \lambda_*(\tilde{\Omega}) = \Omega$$

$$\Rightarrow \tilde{\Omega} = \frac{1}{4} \sum_i \Omega_{ii} e_i \cdot e_i$$

$$\bullet \mathcal{G}_*(X \cdot Y) \varphi = \mathcal{G}_*(XY) \varphi = X \cdot Y \cdot \varphi$$

da $\mathcal{G}$ die Einschränkung einer Cl-Darst. ist

diese Bedng zeigt für die Krümmung des Spinor-Bündels einer Spin-Struktur.

$$R_{xy}^S = K^S(x, y) := \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} R_{ijke} e_k \cdot e_c$$

$$\Rightarrow F^S := R^S - K^S = 0$$

$$\Rightarrow D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\text{scal}}{4}$$

Bemerkung: Sei E ein beliebiges Clifford-Bündel über einer Spin-Mfr. M

$\rightarrow \exists$ Vektorbündel V mit Hermitescher Metrik und Zus.

$$E \cong S \otimes V \quad \text{als Clifford-Bündel}$$

auf E betrachtet man den Tensorprodukt Zus.:

$$\nabla_x s \otimes v := (\nabla_x^S s) \otimes v + s \otimes \nabla_x^V v$$

für die Krümmung folgt:

$$R_{xy}^E = R_{xy}^S \otimes 1 + 1 \otimes R_{xy}^V$$

Twist-Krümmg

$$\rightarrow D_V^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\text{scal}}{4} + \sum_{i,j} e_i e_j \cdot \otimes R_{e_i e_j}^V$$

Die Spin^c -Gruppe

Definition: Die Spin^c -Gruppe $\text{Spin}^c(n)$ ist die Gruppe in $\mathbb{C}(n) \otimes \mathbb{C}$ erzeugt von $\text{Spin}(n)$ und S^1 .

Lemma: $\text{Spin}^c(n) \cong (\text{Spin}(n) \times S^1) / \mathbb{Z}_2$ mit $\mathbb{Z}_2 = \{(\lambda^{-1}, \lambda) \mid \lambda \in \{\pm 1\}\}$

Beweis: • $\text{Spin}(n) \times S^1 \xrightarrow{\phi} \text{Spin}^c(n) \subset \mathbb{C}(n)$
 $(g, z) \mapsto g \cdot z$

ist ein surjektiver Gruppen-Hom. da $S^1 \subset \mathbb{Z}(\mathbb{C}(n))$

$\ker(\phi) = \{(\lambda^{-1}, \lambda) \mid \lambda \in S^1 \cap \text{Spin}(n)\}$

einzigsten Skalare in $\text{Spin}(n)$: ± 1

$\text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$

Lemma: Man hat folgende exakte Sequenz von Gruppen:

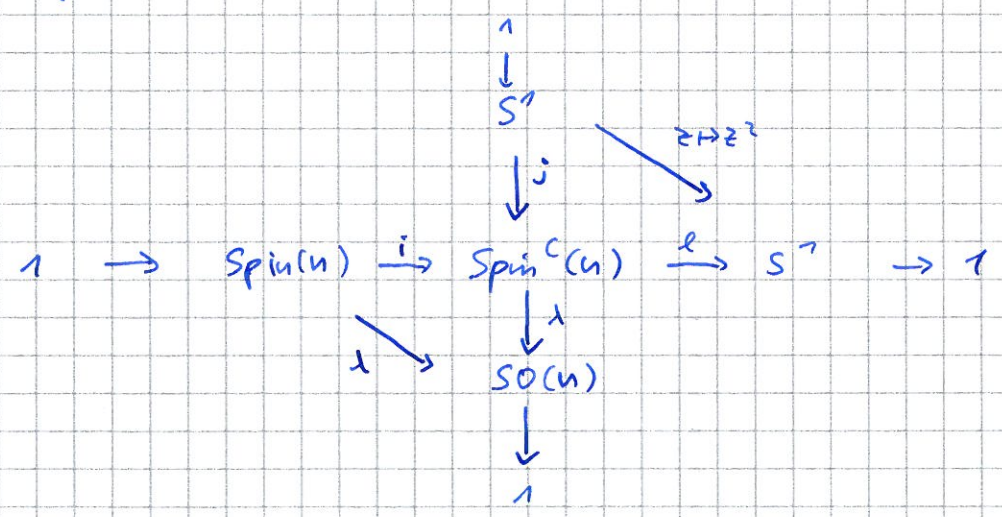
$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}^c(n) \xrightarrow{p} \text{SO}(n) \times S^1 \rightarrow 1$$

$[g, z] \mapsto (\lambda(g), z^2)$

$\mathbb{Z}_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$

p : 2-fache Überlagerung

Bemerkung: Man hat verschiedene Homomorphismen



$i(g) = [g, 1]$
 $j(z) = [1, z]$
 $\ell([g, z]) = z^2$

$\lambda([g, z]) = \lambda(g)$

Sei $n = 2m$, dann ist $U(m) \subset SO(2m)$

$$f: U(m) \rightarrow SO(2m) \times S^1, \quad f(A) = (A, \det A)$$

Lemma: Es existiert ein Homomorphismus $F: U(m) \rightarrow \text{Spin}^c(2m)$ mit folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spin}^c(2m) \\ & \nearrow F & \downarrow p \\ U(m) & \xrightarrow{f} & SO(2m) \times S^1 \end{array}$$

$$p([g, z]) = (\lambda(p), z^2)$$

Beweis: a) Überlagerungstheorie $\rightarrow$ Friedrich

b.) explizit

$A \in U(m)$, $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}^m$ diagonalisierende Basis: $A f_k = e^{i\theta_k} f_k$
d.h. $A = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_m})$

man definiert: $F(A) = \left[\prod_j \left(\cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) f_j \cdot f_j \right) \times e^{i \sum \theta_j} \right]$

da $f(A) = (A, e^{i \sum \theta_j})$

$$p(F(A)) = \left(\lambda \left(\cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) f_j \cdot f_j \right), e^{i \sum \theta_j} \right)$$

Der Dirac - Operator auf fast-komplexen MfK.

(1)

- Sei (T, j, g) ein hermitescher VR: $V \cong \mathbb{R}^{2n}$, $j^2 = -\text{Id}$, $g(jx, jy) = g(x, y)$
 $e_1, \dots, e_{2n}$ ONB mit $je_{2k-1} = e_{2k}$

$\exists B \quad T = T_x H, j = j_x, g = g_x$ für eine fast-hermitesche MfK. (H, g, j)

j, g werden $\mathbb{C}$ -linear bzw. $\mathbb{C}$ -bilinear auf $T^{\mathbb{C}} = T \otimes \mathbb{C}$ fortgesetzt

$$T^{10} := \text{ER}_j(i) = \text{span} \{x - i jx \mid x \in T\} = \text{span} \{e_{2k-1} - i e_{2k}\}$$

$$T^{01} := \text{ER}_j(-i) = \text{span} \{x + i jx \mid x \in T\} = \text{span} \{e_{2k-1} + i e_{2k}\}$$

$$T \otimes \mathbb{C} = T^{10} \oplus T^{01}$$

$$\overline{T^{01}} = T^{10}$$

$$f_k := \frac{1}{2} (e_{2k-1} - i e_{2k})$$

$$\bar{f}_k = \frac{1}{2} (e_{2k-1} + i e_{2k})$$

$$(j\lambda)(x) := -\lambda(jx) \quad \lambda \in T^* \quad e^k := (e_k)^*$$

$$\Rightarrow jx^* = (jx)^*$$

$$\text{da } x^* = g(x, \cdot) \\ jx^*(y) = -x^*(jy) = -g(x, jy) = g(jx, y) = (jx)^*(y)$$

$$\Lambda^{10} = \text{ER}_j(-i) = \text{span} \{\lambda + i j\lambda \mid \lambda \in T^*\} = \text{span} \{e^{2k-1} + i e^{2k}\}$$

$$\Lambda^{01} = \text{ER}_j(i) = \text{span} \{\lambda - i j\lambda \mid \lambda \in T^*\} = \text{span} \{e^{2k-1} - i e^{2k}\}$$

$$f^k = e^{2k-1} + i e^{2k} \\ \bar{f}^k = e^{2k-1} - i e^{2k}$$

$$e_{2k-1} = f_k + \bar{f}_k, e_{2k} = i(f_k - \bar{f}_k) \\ e^{2k-1} = \frac{1}{2}(f_k^* + \bar{f}_k^*), e^{2k} = -\frac{i}{2}(f_k^* - \bar{f}_k^*)$$

$$(T^{10})^* = \Lambda^{01}$$

$$(T^{01})^* = \Lambda^{10}$$

$$f_k^* = g\left(\frac{1}{2}(e_{2k-1} - i e_{2k}), \cdot\right) \\ = \frac{1}{2}(e^{2k-1} - i e^{2k}) = \frac{1}{2} \bar{f}^k$$

$$\Lambda^{10}(T^{01}) = 0$$

$$\text{da: } (\lambda + i j\lambda)(x + i jx)$$

$$\text{da } f^k(\bar{f}_j) = 0$$

$$f^k(f_j) = \delta_{kj}$$

$$= \lambda(x) + i \lambda(jx) + i j\lambda(x) - j\lambda(jx) \\ = \lambda(x) + i \lambda(jx) - i \lambda(jx) - \lambda(x) = 0$$

II

$$X = X^{10} + X^{01} = \frac{1}{2} (x - i\partial x) + \frac{1}{2} (x + i\partial x)$$

$$\begin{aligned} g(X^{10}, X^{01}) &= \frac{1}{4} g(x - i\partial x, x + i\partial x) \\ &= \frac{1}{4} (g(x, x) + g(\partial x, \partial x) - i g(\partial x, x) + i g(x, \partial x)) \\ &= \frac{1}{2} g(x, x) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \Lambda^{p,q} := \Lambda^p (T^{0,1})^* \otimes \Lambda^q (T^{1,0})^* \subset \Lambda^{p+q} T^* \mathbb{C}$$

Basis: $f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \wedge \bar{f}^{j_1} \wedge \dots \wedge \bar{f}^{j_q}$

Komplexe Koordinaten: $z_k = x_k + i y_k$

$$e_{2k-1} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad e_{2k} = \frac{\partial}{\partial y_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \quad dz_k = dx_k + i dy_k$$

(p,q)-Form: $\sum_i a_{i_1, j_1} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} \quad \Omega^{p,q}$

$d = \partial + \bar{\partial}$ auf komplexen Mfh.

mit $\partial : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p+1,q}$
 $\bar{\partial} : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p,q+1}$

$$\begin{aligned} d &= \sum_i e^i \wedge \nabla_{e_i} = \sum_i \frac{1}{2} (f^k + \bar{f}^k) \wedge \nabla_{f_k + \bar{f}_k} + \frac{1}{2} (f^k - \bar{f}^k) \wedge \nabla_{f_k - \bar{f}_k} \\ &= \sum_i f^k \wedge \nabla_{f_k} + \sum_i \bar{f}^k \wedge \nabla_{\bar{f}_k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial = \sum_i f^k \wedge \nabla_{f_k}, \quad \bar{\partial} = \sum_i \bar{f}^k \wedge \nabla_{\bar{f}_k}$$

$$\begin{aligned} -d^* &= \sum_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i} = \sum_i (f_k + \bar{f}_k) \lrcorner \nabla_{f_k + \bar{f}_k} + (f_k - \bar{f}_k) \lrcorner \nabla_{f_k - \bar{f}_k} \\ &= 2 \sum_i f_k \lrcorner \nabla_{\bar{f}_k} + 2 \sum_i \bar{f}_k \lrcorner \nabla_{f_k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial^* = -2 \sum_i f_k \lrcorner \nabla_{\bar{f}_k}, \quad \bar{\partial}^* = -2 \sum_i \bar{f}_k \lrcorner \nabla_{f_k}$$

Clifford - Modul:

$$\Lambda^{0,1} = \Lambda^* (T^{1,0})^*$$

$$X \in T \subset T^{\mathbb{C}} = T^{1,0} \oplus T^{0,1}$$

$$, \quad \omega \in \Lambda^{0,1}$$

$$X = X^{1,0} + X^{0,1} = \frac{1}{2}(X - i\bar{X}) + \frac{1}{2}(X + i\bar{X})$$

man definiert: $X \cdot \omega = \sqrt{2} \left((X^{1,0})^* \wedge \omega - X^{0,1} \lrcorner \omega \right)$

$$\begin{aligned} \text{da: } X \cdot X \cdot \omega &= 2 \cdot \left(- (X^{1,0})^* \wedge X^{0,1} \lrcorner \omega - X^{0,1} \lrcorner (X^{1,0})^* \wedge \omega \right) \\ &= -2 (X^{1,0})^* (X^{0,1}) \omega \\ &= -2 g(X^{1,0}, X^{0,1}) \omega \\ &= -g(X, X) \omega \end{aligned}$$

Clifford-Bündel
auf komplexen Mph.

Dirac - Operator:

$$\begin{aligned} D &= \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} = \sum_i (f_k + \bar{f}_k) \cdot \nabla_{f_k + \bar{f}_k} - (f_k - \bar{f}_k) \cdot \nabla_{f_k - \bar{f}_k} \\ &= 2 \sum_i f_k \cdot \nabla_{\bar{f}_k} + 2 \sum_i \bar{f}_k \cdot \nabla_{f_k} \\ &= \sqrt{2} \cdot 2 \sum_i \left((f_k)^* \wedge \nabla_{\bar{f}_k} - \bar{f}_k \lrcorner \nabla_{f_k} \right) \\ &= \sqrt{2} (\bar{\partial} + \bar{\partial}^*) \end{aligned}$$

$$\text{da } (f_k)^* = \sum_i f^k$$

Bemerkung: Der Zusammenhang ∇ auf $\Lambda^{0,1}$ muß den Typ erhalten. Für die vom Levi-Civita-Zus. induzierte kovariante Ableitung gilt dies auf Kähler-Mph.