

Darstellungen der Clifford-Algebra

Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^n$

$$E_n := \{ \pm e_1^{i_1} \dots e_n^{i_n} \mid i_r \in \{0, 1\} \} \subset \text{Pin}(n)$$

- es gilt:
- E_n ist eine Untergruppe von $\text{Pin}(n)$
 - $\# E_n = 2^{n+1}$ (d.h. endliche UG)
 - $v := -1 \in E_n$

(für reelle oder komplexe Darstg.)

Satz: Es existiert eine 1-1-Beziehung zwischen

- (i) Darstellungen von $\mathcal{C}\ell(n)$
- (ii) Darstellungen von $\text{Pin}(n)$ bei denen v als -1 wirkt
- (iii) Darstellungen von E_n " — "

Beweis: • (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) durch Einschränkung

$$\lambda: \mathcal{C}\ell(n) \rightarrow \text{End}(V) \rightarrow \lambda: \text{Pin}(n) \rightarrow \text{Aut}(V)$$

$$\text{da } \lambda(v_1 \dots v_r) := \lambda(v_1) \dots \lambda(v_r)$$

$$\pm \text{Id} = \lambda(v_1 \dots v_r) \cdot \lambda(v_r \dots v_1) \quad \lambda(1) = \text{Id}$$

• (iii) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (i) : durch lineare Fortsetzung

ab jetzt: sind alle Darstellungen komplex

Bemerkung: • $v \in Z(E_n) \mid v^2 = 1$

$\Rightarrow v$ wirkt auf jeder irreduziblen Darstg. als $+1$ oder -1

- Die irreduziblen Darstellungen, auf denen v als $+1$ operiert sind Darstellungen der abelschen Gruppe $E_n / \langle v \rangle$

$$\# (E_n / \langle v \rangle) = 2^n \rightarrow \text{man hat } 2^n \text{ irred. nicht-isomorphe Darstg.}$$

! Bem: Übergang von $\mathcal{C}\ell(n)$ - zu $\mathcal{C}\ell(n)$ -Darstellungen

Lemma: ① $n \equiv 0(2)$: $Z(E_n) = \{1, v\}$

② $n \equiv 1(2)$: $Z(E_n) = \{1, v, w, vw\}$

Beweis: $g = e_1^{i_1} \dots e_n^{i_n}$ $w = e_1 \dots e_n$

Sei $i_r = 1, i_s = 0 \rightarrow e_r e_s \cdot g = v \cdot g \cdot e_r \cdot e_s$

dh. g ist zentral nur falls alle $i_r = 1$ oder alle $i_r = 0$

$\rightarrow$ einzigen zentralen Elemente gehören zu $1, v, w, vw$

$1, v \in Z(E_n)$

$n \equiv 1(2) \Rightarrow w \in Z(\mathbb{Q}(v)) \Rightarrow$ ②

$n \equiv 0(2) \Rightarrow e_1 \cdot w = v \cdot w \cdot e_1$

dh w ist nicht-zentral $\Rightarrow$ ①

Bemerkung: • Anzahl der Darstellungen von $E_n =$ Anzahl der Konjugationsklassen

• $[g] = \{h \cdot g \cdot h^{-1} \mid h \in E_n\}$

$g \in Z(E_n)$: $[g] = \{g\}$

$g \notin Z(E_n)$: $[g] = \{g, v \cdot g\}$

$\rightarrow$ Anzahl der Konjugationsklassen

$$n \equiv 0(2): \quad \frac{2^{n+1}-2}{2} + 2 = 2^n + 1$$

$$n \equiv 1(2): \quad \frac{2^{n+1}-4}{2} + 4 = 2^n + 2$$

$\Rightarrow n \equiv 0(2)$: $\exists!$ irreduzible Darstellung, auf der v als -1 wirkt

$n \equiv 1(2)$: $\exists$ zwei irreduzible Darstellungen, auf denen v als -1 wirkt.

$\Rightarrow n \equiv 0(2)$: $\mathbb{Q}(n) \otimes \mathbb{C}$ hat genau eine irreduzible komplexe Darstellung

Bezeichnung: Die eindeutig bestimmte irreduzible Darstellung von $\mathcal{C}(n) \otimes \mathbb{C}$ (für $n \in \mathbb{O}(\mathbb{R})$) heißt Spin-Darstellung, man schreibt Δ

Bemerkung: • Die endliche Gruppe E habe die irreduziblen Darstellungen $V_1, \dots, V_r$ mit $n_i = \dim V_i$, dann gilt:

$$\# E = \sum_i n_i^2$$

• Für die Gruppe E_n folgt damit:

$$n = 2^m !$$

$$2^{n+1} = 2^n + (\dim \Delta)^2$$

(irred. Darstellungen abelscher Gruppen sind 1-dim. !)

$$\Rightarrow \dim \Delta = 2^m$$

Folgerung: $\mathcal{C}(n) \otimes \mathbb{C} \cong \text{End}(\Delta)$ als Algebren $n \in \mathbb{O}(\mathbb{R})$

Beweis: • Spin-Darstellung: $\lambda: \mathcal{C}(n) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\Delta)$

• Δ ist die einzige irreduzible Darstellung

• $\dim \text{End}(\Delta) = (2^m)^2 = 2^n = \dim \mathcal{C}(n) \otimes \mathbb{C}$?

Folgerung: $\Delta \cong \Lambda^* P$

Beweis: $\dim \Delta = 2^m = \dim \Lambda^* P$

Bemerkung: • Δ hat ein hermitesches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit

$$\langle v \cdot s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, v \cdot s_2 \rangle = 0$$

für $s_1, s_2 \in \Delta$, $v \in \mathbb{C}^n$ und $v \cdot s = \lambda(v)s$.

da: Δ ist eine komplexe Darstellung der endlichen Gruppe E_n

$\Rightarrow \exists \langle \cdot, \cdot \rangle$ mit $\lambda(E_n) \subset U(\Delta)$ unitäre Gruppe

$\rightarrow \lambda(e_i)$ ist schiefsymmetrisch

denn: $A = \lambda(e_i)$: $A \cdot \bar{A}^T = E$, $A \cdot A = -E$
 $\Rightarrow \bar{A}^T = -A$

$\triangleq$ 1. Teil der Def. eines Clifford-Moduls

• Sei W eine endlich-dimensionale Darstellung von $\mathbb{C}\ell(n) \otimes \mathbb{C}$, dann gilt

$$\mathbb{C}\ell(n) = \mathbb{C}\ell(n) \otimes \mathbb{C}$$

$$W = \Delta \oplus \dots \oplus \Delta \quad r\text{-mal}$$

$$\rightarrow W = \Delta \otimes V, \quad V = \mathbb{C}^r \quad \text{"Koeffizientenraum"}$$

$$\text{wobei } V \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}\ell(n)}(\Delta, W)$$

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathbb{C}}(W) &= \mathbb{C}\ell(n) \otimes \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \\ &= \mathbb{C}\ell(n) \otimes \text{End}_{\mathbb{C}\ell(n)}(W) \end{aligned}$$

Definition: Sei F ein Clifford-Modul Homomorphismus einer Darstellung $W = \Delta \otimes V$ von $\mathbb{C}\ell(n)$. Die relative Spur ist definiert als die Spur des $\mathbb{C}$ -linearen Endomorphismus von V der F entspricht unter der Identifizierung

$$\text{tr}^{W/\Delta}(F)$$

$$\text{End}_{\mathbb{C}\ell(n)}(W) = \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$$

*: Endomorphismus!

Bemerkung: • Δ ist auch eine irreduzible Darstellung von $\text{Pin}(n)$

da jeder Summand wäre dann auch wieder eine Darstellung von $\text{Cl}(n)$

- $\lambda | \text{Spin}(n)$ ist entweder irreduzibel oder die Summe zweier irreduzibler nicht-äquivalenter Darstellungen der gleichen Dimension

da $\text{Spin}(n) \subset \text{Pin}(n)$ Normalteiler vom Index 2

$n=2m!$

- $\omega \in \text{Cl}(n) : \omega^2 = (-1)^m, \omega \cdot x = \varepsilon(x) \omega \quad \forall x \in \text{Cl}(n)$

$\Delta_{\pm}$ seien die ± 1 -Eigenräume von $i^m \cdot \omega$

$\Rightarrow \text{Cl}(n)_0$ erhält die Aufspaltung $\Delta = \Delta_+ \oplus \Delta_-$
 $\text{Cl}(n)_1$ vertauscht die Summanden

$\rightarrow \Delta_{\pm}$ sind irreduzible Darstellungen der Spin-Gruppe $\text{Spin}(n) \subset \text{Cl}(n)_0$

nach (*)

Bezeichnung: Halb-Spin-Darstellungen