

② Die Spin - Gruppe

Definition: Eine Algebra A (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt $\mathbb{Z}_2$ -graduirt oder auch Super-Algebra, wenn

$$A = A_0 \oplus A_1$$

direkte Summe zweier UR A_0, A_1

mit: $A_0 \cdot A_0 \subset A_0$

$$A_0 \cdot A_1 \subset A_1$$

$$A_1 \cdot A_1 \subset A_0$$

$$A_1 \cdot A_0 \subset A_1$$

Bezeichnung: • $A_0 =$ gerader Teil von A

$A_1 =$ ungerader Teil von A

• $A_0 \cup A_1 =$ Menge der homogenen Elemente

• $x \in A_i$ dann ist $\deg(x) = i$ Grad von x , $\deg(0) = 0$

• Graduierungs - Automorphismen:

$$\varepsilon: A \rightarrow A$$

$$\varepsilon(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$$

$$\varepsilon^2 = 1, \quad A_i = \varepsilon^i A_0 \text{ von } \varepsilon$$

Bemerkung: $A_0 \subset A$ ist eine Unteralgebra

Sp. u. u. g.?

Lemma: Die Clifford - Algebra eines euklidischen Vektorraums V ist $\mathbb{Z}_2$ -graduirt, dabei sind die Elemente von V ungerade

Beweis: Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von V

man definiert: $\mathcal{C}\ell(V)_0 := \text{span} \{ e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \mid k \equiv 0 \pmod{2} \}$

$\mathcal{C}\ell(V)_1 := \text{span} \{ e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \mid k \equiv 1 \pmod{2} \}$

$\Rightarrow$ die Bedingungen sind erfüllt:

$$\mathcal{C}\ell(V)_i \cdot \mathcal{C}\ell(V)_j \subset \mathcal{C}\ell(V)_{i+j} \quad i, j \in \mathbb{Z}_2$$

Definition: Der Superkommutator in A ist definiert durch

(A : Super-Algebra)

$$[x, y]_s := x \cdot y - (-1)^{\deg x \cdot \deg y} y \cdot x$$

auf homogenen Elementen x, y und dann bilinear auf A fortgesetzt.

$$\bullet \quad Z_s(A) := \{x \in A \mid [x, y]_s = 0 \quad \forall y \in A\}$$

Super-Zentrum

Lemma: Sei V ein euklidischer Vektorraum, dann gilt

$$Z_s(\mathcal{C}(V)) = \mathbb{R}$$

$$Z_s(\mathcal{C}(V) \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C}$$

Beweis: $e_1, \dots, e_n$ ONB von V , $x \in Z_s(\mathcal{C}(V))$

$$x = a + e_1 b$$

a, b : Linearkombination von Elementen ohne e_1

o.B.d.A.: x homogen

(sonst folgende Redz für einzelne Komponenten von x)

$$\Rightarrow \deg(x) = \deg(a) = \deg(b) + 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x \cdot e_1 &= a \cdot e_1 + e_1 b \cdot e_1 \\ &= (-1)^{\deg(x)} (e_1 \cdot a - e_1^2 b) \\ &= (-1)^{\deg(x)} (e_1 a + b) \end{aligned}$$

$$e_1 \cdot x = e_1 a - b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [x, e_1]_s &= x \cdot e_1 - (-1)^{\deg x} e_1 x = (-1)^{\deg(x)} (b + b) \\ &= 0 \quad \text{da } x \in Z_s(\mathcal{C}(V)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 0 \quad \text{d.h. } x \text{ enthält nicht das Element (den Vektor) } e_1$$

$$\Rightarrow b \text{ ist skalar} \quad (\text{induktiv})$$

Bezeichnung: Volumenelement in $\mathcal{C}\ell(V)$ V VR mit Orientierung

$$\omega_V := e_1 \cdot \dots \cdot e_n$$

$e_1, \dots, e_n$
positive ONS von V

(unabhängig von Wahl der positiven ONS!)

Lemma:

- $\omega_V^2 = (-1)^{n(n+1)/2}$

- $\omega_V \cdot x = x \cdot \omega_V \cdot (-1)^{n-1} \quad \forall x \in V$

$$\omega = \omega_V$$

Bemerkung: $n = 2m$

$$\Rightarrow \xi(x) = \omega x \cdot \omega^{-1} \quad \text{wobei} \quad \omega^{-1} = (-1)^m \omega$$

d.h. der Graduiungsautomorphismus ist ein innerer Automorphismus

- $n = 2m + 1$

$$n = 2m$$

$$\Rightarrow \omega \in \mathbb{Z}(\mathcal{C}\ell(V)) = \text{span}\{1, \omega\} \quad ; \quad \Rightarrow \mathbb{Z}(\mathcal{C}\ell(V)) = \text{span}\{1\}$$

- jeder Vektor $v \in V \subset \mathcal{C}\ell(V)$, $v \neq 0$, ist invertierbar in $\mathcal{C}\ell(V)$

$$\text{da} \quad v \cdot v = -\|v\|^2 \quad \Rightarrow \quad v^{-1} = -\frac{v}{\|v\|^2}$$

ab jetzt: $V = \mathbb{R}^n$!

Definition: ① $\text{Pin}(n) = \{v_1 \cdot \dots \cdot v_k \mid v_i \in \mathbb{R}^n, \|v_i\| = 1\}$

multiplicative Untergruppe von $\mathcal{C}\ell(V)$ erzeugt von Einheitsvektoren

② $\text{Spin}(n) = \text{Pin}(n) \cap \mathcal{C}\ell(n)_0$

$\mathcal{C}\ell(n) = \mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^n)$
 $\mathbb{R}^n$ mit Standard-SF

Spinor-Gruppe

Spin-Gruppe

Bemerkung: adjungierte Darstellung $\mathfrak{g} : \text{Pin}(n) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}(n))$
 $\mathfrak{g}(\gamma)x := \gamma \cdot x \cdot \varepsilon(\gamma^{-1})$

nicht wirklich
adjungiert

Lemma: Die adjungierte Darstellung schränkt sich ein
auf einen Homomorphismus

$$\mathfrak{g} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$$

Beweis: $V \in \mathbb{R}^n, \|V\|=1 \rightarrow V^{-1} = -V$ $V \cdot V = -1$

$$\rightarrow -V \cdot x \cdot V^{-1} = V \cdot x \cdot V$$

$$= x - 2\langle x, V \rangle V$$

$$\mathfrak{g}(V)x = -V \cdot x \cdot V^{-1}, x \in V$$

$$\rightarrow \mathfrak{g}(V) \in \text{O}(V) \quad V \in \mathbb{R}^n!$$

= Spiegelung von x an
der Hyperebene $V^\perp$

$$\rightarrow \mathfrak{g}(V_1 \cdots V_k)x = V_1 \cdots V_k \cdot x \cdot \varepsilon(V_1 \cdots V_k)^{-1}$$

$$= \mathfrak{g}(V_1) \cdots \mathfrak{g}(V_k)x$$

bis auf Vorzeichen?!

$$\rightarrow \mathfrak{g}(\text{Pin}(n)) \subset \text{O}(n)$$

$$\rightarrow \mathfrak{g}(\text{Spin}(n)) \subset \text{SO}(n)$$

da $V \in \text{Spin}(n)$, dann ist $\mathfrak{g}(n)$ die
Komposition einer geraden Anzahl
von Spiegelungen

Satz: ① Man hat die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n) \rightarrow 0$$

$$\mathbb{Z}_2 = \pm 1 \in \text{Spin}(n)$$

② $\text{Spin}(n)$ ist eine kompakte Lie-Gruppe
und doppelte Überlagerung von $\text{SO}(n)$

③ $\text{Spin}(n)$ ist zusammenhängend für $n \geq 2$

④ $\text{Spin}(n)$ ist einfach-zusammenhängend für $n \geq 3$

dh. für $n \geq 3$ ist $\text{Spin}(n)$ die universelle
Überlagerung von $\text{SO}(n)$.

zum Beweis: • jedes Element aus SO_n ist Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen

$\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv

• $\gamma \in \ker(\varphi) \Rightarrow [\gamma, v]_s = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \gamma \in \mathbb{Z}_s(\mathcal{C}\ell(n))$

$\mathcal{C}\ell(n)$ erzeugt von Vektoren

$\Rightarrow \gamma \in \mathbb{R}$ skalar

$\mathbb{Z}_2$ einzige Skalare in $\text{Spin}(n)$ sind ± 1

Transposition: $x = v_1 \cdots v_m \in \mathcal{C}\ell(n)$

$x^T := v_m \cdots v_1$

$x \mapsto x^T$ ist ein Anti-Automorphismus von $\mathcal{C}\ell(n)$

$v^T = v^{-1}$ für v Erzeuger von $\text{Pin}(n)$

$\Rightarrow x^T = x^{-1}$ für alle $x \in \text{Pin}(n)$

x skalar: $x^T = x^{-1} = x$

$\Rightarrow x^2 = 1$

• $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n) \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ exakte Homotopie-Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow \pi_1(\mathbb{Z}_2) & \rightarrow & \pi_1(\text{Spin}(n)) & \rightarrow & \pi_1(SO(n)) & \rightarrow & \pi_0(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\lambda} \pi_0(\text{Spin}(n)) \rightarrow \pi_0(SO(n)) \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ 1 & & & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 \\ & & & & \text{für } n \geq 3 & & \end{array}$$

$\mathbb{Z}_2$ 1 ist trivial

dh $+1$ und -1 sind verbindbar in $\text{Spin}(n)$ durch einen glatten Weg.

$t \mapsto \cos t + e_1 \cdot e_2 \cdot \sin t$

Bemerkung:

- $\text{Spin}(3) \cong \text{SU}(2) = \text{Sp}(1)$
 $\text{Spin}(4) \cong \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$
 $\text{Spin}(5) \cong \text{Sp}(2)$
 $\text{Spin}(6) \cong \text{SU}(4)$
- $\text{Lie}(\text{Spin}(n)) = \underline{\text{spin}}(n) \cong \text{Lie}(\text{SO}(n)) = \underline{\text{so}}(n)$

$V \cong \mathbb{R}^n$!

$$\text{Spin}(n) \subset \mathcal{C}\ell(V)$$

$$\Rightarrow \underline{\text{spin}}(n) \subset \mathcal{C}\ell(V)$$

dh. $\text{Spin}(n)$ kann identifiziert werden mit einem UR von $\mathcal{C}\ell(V)$

Lemma:

• Betrachtet man $\underline{\text{spin}}(n)$ als Teilmenge von $\mathcal{C}\ell(V)$, dann gilt

$$\underline{\text{spin}}(n) = \text{span} \{ e_i \cdot e_j \mid i \neq j \}$$

- In dieser Beschreibung gilt für $\mathcal{S}_* : \underline{\text{spin}}(n) \xrightarrow{\sim} \underline{\text{so}}(n)$:

$$\mathcal{S}_* (e_i \cdot e_j) = 2 e_i \wedge e_j \quad \text{wobei } \underline{\text{so}}(n) \cong \wedge^2 \mathbb{R}^n$$

- Die Lie-Algebrenstruktur auf $\underline{\text{spin}}(n)$ ist gegeben durch:

$$[\alpha, \beta] = \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha \quad \text{für } \alpha, \beta \in \underline{\text{spin}}(n) \subset \mathcal{C}\ell(n)$$

Inbesondere ist $\wedge^2 \mathbb{R}^n \subset \mathcal{C}\ell(n)$ abgeschlossen unter dieser Klammer.

Beweis:

$$\bullet \exp(t \cdot e_i \cdot e_j) = \cos t + e_i \cdot e_j \cdot \sin t \stackrel{(*)}{\in} \text{Spin}(n) \quad \text{da } (e_i \cdot e_j)^2 = -1$$

$$\Rightarrow e_i \cdot e_j \in \underline{\text{Spin}}(n) \quad \forall i \neq j \quad (\text{und in } \underline{\text{spin}}(n)!) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \underline{\text{spin}}(n) = \text{span} \{ e_i \cdot e_j \}$$

aus Dimensionsgründen, da $\dim \underline{\text{spin}}(n) = \dim \underline{\text{so}}(n) = \frac{1}{2} n(n-1)$

- $\mathcal{S}(x)v = x \cdot v x^{-1} = \text{Ad}(x)v \quad \text{für } x \in \text{Spin}(n)$

$$\underline{\text{ru}}(v): \cos t + e_i \cdot e_j \sin t = (\cos \frac{t}{2} e_i + \sin \frac{t}{2} e_j) (-\cos \frac{t}{2} e_i + \sin \frac{t}{2} e_j)$$

Bemerkung:

$$\mathcal{S}_*^{-1}(v \wedge w) = \frac{1}{4} [v, w] = \frac{1}{4} (v \cdot w - w \cdot v)$$

$$g: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$$

man berechnet $g_*(e_i \cdot e_j)$

$$\text{sei } \gamma(t) = \cos(t) + e_i e_j \sin(t)$$

Kurve in $\text{Spin}(n)$

$i \neq j$

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= 1 \\ \dot{\gamma}(0) &= e_i e_j \end{aligned}$$

$$g_*(e_i e_j) \checkmark = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\gamma(t)) v$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) \cdot v \cdot \gamma(t)^{-1}$$

Kurve in $\mathcal{U}(n)$

$$\begin{aligned} \text{NR: } 1 &= \gamma(t) \cdot \gamma(t)^{-1} \Rightarrow 0 = \dot{\gamma}(0) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t)^{-1} \\ &\Rightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t)^{-1} = -\dot{\gamma}(0) = -e_i e_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g_*(e_i e_j) v &= e_i e_j v - v e_i e_j = [e_i e_j, v] \\ &= e_i e_j v + (e_i v + 2\langle v, e_i \rangle) e_j \\ &= e_i e_j v - e_i e_j v - 2e_i \langle v, e_j \rangle + 2\langle v, e_i \rangle e_j \\ &= 2(e_i \wedge e_j) v \end{aligned}$$

Beweis der Bemerkung: $\frac{1}{4} [e_i, e_j] = \frac{1}{4} (e_i e_j - e_j e_i) = \frac{1}{2} e_i e_j$

$$\rightarrow g_*(\frac{1}{4} [e_i, e_j]) = e_i \wedge e_j$$

? Lie-Algebren-Struktur:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)X &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \exp tX g^{-1} & \begin{matrix} g \in \text{Spin}(n) \\ X \in \mathfrak{spin}(n) \end{matrix} \\ &= g X g^{-1} & \text{in } \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \text{ad}(X)Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\exp tX) \cdot Y \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp tX \cdot Y \cdot \exp -tX \\ &= X \cdot Y - Y \cdot X & \text{in } \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$