Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Prof. U. Semmelmann | Sommersemester 2014

Spingeometrie und Dirac-Operatoren

Übungsblatt 4

1. Sei M eine $2m$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, auf der ein Clifford-Bündel S existiert, das faserweise isomorph zur Spin-Darstellung ist, dh. für das gilt $\mathrm{End}(S) \cong \mathbb{C}l(TM)$. Beweisen Sie, dass dann M eine Spin^c-Struktur besitzt. Bemerkung: Das ist Frage 4.36 in dem Buch von J. Roe, siehe dort für weitere Hinweise.

2. Sei M eine Spin^c-Mannigfaltigkeit mit Spin^c-Struktur P und Spin^c-Spinor-Bündel $S^c = P \times_\rho \Delta$. Weiter sei Q das Rahmenbündel und $p = (e_1, \ldots, e_n)$ ein lokaler Schnitt in Q, dh. eine lokale ONB von TM. Bezeichen $\tilde{p}$ den Lift von p zu einem lokalen Schnitt in P. Dann schreibt sich jeder Spinor lokal als $\Psi = [\tilde{p}, \psi]$. Sei $P_{U(1)}$ das zur Spin^c-Struktur assoziierte $U(1)$-Hauptfaserbündel und γ ein lokaler Schnitt in $P_{U(1)}$. Sei schliesslich ω eine Zusammenhangs-1-Form auf $P_{U(1)}$ mit Krümmungsform $\Omega = d\omega$, die pullback einer imaginärwertigen 2-Form Ω auf M ist. Zeigen Sie, dass dann für die vom Levi-Civita-Zusammenhang und von ω induzierte kovariante Ableitung auf S^c die folgende lokale Formel gilt:

$$\nabla^{S^c}_X \Psi = [\tilde{p}, X(\psi)] + \frac{1}{2} \sum_{i<j} g(\nabla_X e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \Psi + \frac{1}{2} \omega(\gamma_* X) \Psi \ .$$

Zeigen Sie auch, dass sich die Krümmung von ∇ berechnet durch:

$$R^{S^c}_{X,Y} \Psi = \frac{1}{2} \mathcal{R}(X \wedge Y) \cdot \Psi + \frac{1}{2} \Omega(X, Y) \cdot \Psi \ .$$

3. Überprüfen Sie, dass die in der Vorlesung definierte Abbildung $F : U(m) \to \mathrm{Spin}^c(2m)$ ein wohl-definierter Gruppen-Homomorphismus ist, dh. das F insbesondere eine Abbilung nach $\mathrm{Spin}^c(2m)$ ist. Zeigen Sie auch, dass F einen Lift der Abbildung $f : U(m) \to SO(2m) \times S^1$ definiert.

4*. Sei X eine Spin-Mannigfaltigkeit und $M^{2m} \subset X$ eine orientierte Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1, mit Normalenvektor N. Beweisen Sie, dass die Einschränkung des Spinor-Bündels von X auf M isomorph zum Spinor-Bündel $S = S_+ \oplus S_-$ von M ist, wobei die Clifford-Multiplikation mit N gegeben ist durch $N \cdot (\psi_+ + \psi_-) = (-1)^m i (\phi_+ - \phi_-)$.

Zeigen Sie damit, dass das Spinor-Bündel $S = S_+ \oplus S_-$ der Sphäre trivial ist. Überprüfen Sie, zB durch Berechnung des Chern-Charakters, dass die Halbspinor-Bündel $S_\pm$ nicht-trivial sind.