Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Prof. U. Semmelmann Sommersemester 2014

Spingeometrie und Dirac-Operatoren
Übungsblatt 3

1. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe vom Index 2. Zeigen Sie, dass die Einschränkung einer irreduziblen G-Darstellung auf H entweder wieder irreduzibel oder die Summe zweier irreduzibler H-Darstellungen gleicher Dimension ist.

2. Überprüfen Sie, dass das Spinor-Bündel einer Spin-Mannigfaltigkeit ein Clifford-Bündel ist. Das heißt, zeigen Sie die Verträglichkeit von Skalarprodukt, Clifford-Multiplikation und kovarianter Ableitung.

3. Sei W eine $\mathbb{C}l(n)$-Darstellung, die r-fache Summe der Spinor-Darstellung Δ ist, dh. $W = \Delta \otimes V$ mit $V \cong \mathbb{C}^r$. Beweisen Sie die Identifizierung

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}l(n)}(W) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \ .$$

4. Sei (M, g) eine Spin-Mannigfaltigkeit mit Spinor-Bündel S. Beweisen Sie folgende Formeln für die Krümmung R^S von S:

$$R^S_{X,Y}\phi = \tfrac{1}{2}R(X \wedge Y) \cdot \phi \ .$$

und

$$-\tfrac{1}{2}\mathrm{Ric}(X) \cdot \phi = \sum_k e_k \cdot R^S_{X,e_k}\phi$$

für beliebige Vektorfelder X, Y und Spinoren $\phi \in \Gamma(S)$. Dabei bezeichnet $e_1, \ldots, e_n$ eine lokale ONB des Tangentialbündels.