Universität Stuttgart

Institut für Geometrie und Topologie

Prof. U. Semmelmann Sommersemester 2014

Spingeometrie und Dirac-Operatoren
Übungsblatt 2

1. Berechnen Sie die Clifford-Algebren in kleinen Dimensionen, d.h. zeigen Sie

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{C}, \quad \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}, \quad \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \ .$$

2. Seien $\alpha, \beta \in \Lambda^2 V \cong \mathrm{so(V)}$ zwei 2-Formen. Die Clifford-Multiplikation mit k-Formen ist definiert durch die Festlegung $(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}) \cdot s = e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_k} \cdot s$ für eine ONB e_i und $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq \dim V$. Finden Sie eine Formel, die $\alpha \cdot \beta \cdot s$ ausdrückt als Linearkombination von $(\alpha \wedge \beta) \cdot s$, $\langle \alpha, \beta \rangle s$ und $[\alpha, \beta] \cdot s$. Hier steht $[\cdot, \cdot]$ für die Lie-Klammer in $\mathrm{so}(V)$ und man nutzt die oben angegebene Identifizierung. Nutzen Sie die gefundene Formel, um noch einmal die Summe $\sum R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot e_l$ zu berechnen.

3. Sei (M, g, J) eine Kähler Mannigfaltigkeit, dh. die fast-komplexe Struktur J sei parallel bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs von g. Sei S das Clifford-Bündel $S = \Lambda^{0,*} TM$. Zeigen Sie dann den Satz aus der Vorlesung, d.h. dass sich der Dirac-Operator von S schreiben lässt als:

$$D \ = \ \sqrt{2}\,(\bar{\partial} \ + \ \bar{\partial}^*) \ .$$

4. Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ isomorph ist zu folgender Untergruppe H von $U(2) \times U(2)$:

$$H = \{(A, B) \in U(2) \times U(2) | det(A) = det(B)\} \ .$$