Hauptseminar: Der Laplace-Operator

Uwe Semmelmann (IGT)

31. Januar 2018

Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

$$\Delta f \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \;=\; \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) \qquad \text{für} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

$$\Delta f \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \;=\; \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,(f)) \qquad \text{für} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) \qquad \text{für} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

Der Laplace-Operator auf (M, g)

$$\Delta f = d^* d f \qquad \text{für} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(M)$$

Der Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$

$$\Delta f \;=\; -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \;=\; -\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,(f)) \qquad \text{für} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

Der Laplace-Operator auf (M, g)

$$\Delta f \;=\; d^*\,d\,f \qquad \text{für} \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \Omega^0(M)$$

und allgemeiner

$$\Delta\,\omega \;=\; d^*\,d\,\omega + d\,d^*\,\omega \qquad \text{für} \qquad \omega \in \Omega^p(M) = \Gamma(\Lambda^p T^* M)$$

Ziel des Seminars

- Studium und Präsentation einiger ausgewählter Eigenschaften des Laplace-Operators Δ auf (kompakten) Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g).

Ziel des Seminars

- Studium und Präsentation einiger ausgewählter Eigenschaften des Laplace-Operators Δ auf (kompakten) Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g).

- Gezeigt werden soll das Zusammenspiel von Analysis, Geometrie, Topologie und Algebra (Darstellungstheorie).

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

1. Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

1. Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator
2. Das Spektrum des Laplace-Operator auf Sphären und Tori

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

1. Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator
2. Das Spektrum des Laplace-Operator auf Sphären und Tori
3. Das Gegenbeispiel von Milnor: isospektral $\neq$ isometrisch

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

1. Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator
2. Das Spektrum des Laplace-Operator auf Sphären und Tori
3. Das Gegenbeispiel von Milnor: isospektral $\neq$ isometrisch
4. Eigenwert-Abschätzungen:

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

1. Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator
2. Das Spektrum des Laplace-Operator auf Sphären und Tori
3. Das Gegenbeispiel von Milnor: isospektral $\neq$ isometrisch
4. Eigenwert-Abschätzungen:
    - Lichnerowicz-Obata: $\mathrm{Ric} \geq c \;\Rightarrow\; \lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\, c$

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Funktionen

1. Der Laplace-Operator als elliptischer Differential-Operator
2. Das Spektrum des Laplace-Operator auf Sphären und Tori
3. Das Gegenbeispiel von Milnor: isospektral $\neq$ isometrisch
4. Eigenwert-Abschätzungen:
    - Lichnerowicz-Obata: $\mathrm{Ric} \geq c \;\Rightarrow\; \lambda_1 \geq \frac{n}{n-1} c$
    - Cheeger-Ungleichung: $\lambda_1 \geq \frac{1}{4} \frac{\mathrm{vol}(S)}{\min(\mathrm{vol}(M_+), \mathrm{vol}(M_-))}$

Vortragsthemen: Laplace-Operator auf Formen

1. Hodge-Theorie: $\mathrm{Ker}\,\Delta|_{\Omega^p(M)} \cong H^p_{dR}(M)$
2. Bochner-Laplace-Operator und Weitzenböck Formeln, z.B.

$$\Delta = \nabla^*\nabla + \mathrm{Ric} \qquad \text{auf} \qquad \Omega^1(M)$$

3. Bochner-Methode, z.B.

$$\mathrm{Ric} > 0 \quad \Rightarrow \quad H^1_{dR}(M) = 0$$

Literatur zum Seminar

- Uwe Semmelmann: *Differential-Operatoren auf Mannigfaltigkeiten*, Vorlesungsskript 2013
- M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet: *Le Spectre d‘une Variété Riemannienne*, Springer Verlag, LNM 194 (1971)
- I. Chavel: *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press (1984)
- P. Petersen: *Riemannian Geometry*, Springer Verlag, GTM 171 (2006)

Vorkenntnisse, Kontakt, Fragen, Anmeldung:

- Vorkenntnisse: Lineare Algebra und Analysis, Topologie, Differentialgeometrie (+ evtl. Riemannsche Geometrie)
- Anmeldung per Email: uwe.semmelmann@mathematik.uni-stuttgart.de
- Vortragsliste auf der homepage (demnächst)
- Vortragsvergabe und Vorbesprechung: im Anschluss an diese Veranstaltung in 7.544 bzw. per Email.