

Prof. Dr. Uwe Semmelmann, Universität Stuttgart

Riemannsche Geometrie

Stuttgart, Sommersemester 2011

Version: 26. Juli 2011

Für Hinweise auf Druckfehler und Kommentare jeder Art bin ich dankbar.¹ Viel Spaß!

¹Prof. Dr. Uwe Semmelmann, Universität Stuttgart, uwe.semmelmann@mathematik.uni-stuttgart.de;
Jan-Cornelius Molnar, jan.molnar@studentpartners.de

Inhaltsverzeichnis

1	Hauptfaserbündel und assoziierte Faserbündel	5
1-A	Lokal triviale Faserung	5
1-B	Hauptfaserbündel	8
1-C	Assoziierte Faserbündel	14
1-D	Vektorbündel	18
1-E	Lineare Algebra von Vektorbündeln	22
1-F	Bündelmetriken	24
1-G	Reduktion der Strukturgruppe	26
2	Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln	33
2-A	Definitionen und Beispiele	33
2-B	Zusammenhangsformen	37
2-C	Existenz von Zusammenhängen	41
2-D	Lokale Zusammenhangsformen	43
2-E	Zusammenhänge und kovariante Ableitungen	48
3	Das Differential eines Zusammenhangs	53
3-A	Differentialformen mit Werten in Vektorbündeln	53
3-B	Das absolute Differential eines Zusammenhangs	55
3-C	Die Krümmung eines Zusammenhangs	63
■	U(1)-Zusammenhänge	68
3-D	Lokale Beschreibung der Krümmung und Transformationsverhalten	71
3-E	Krümmung und Integrabilität	73
3-F	Der klassische Krümmungstensor	74
3-G	Torsion	77
4	Parallelverschiebung, Geodätische und Exponentialabbildung	81
4-A	Parallelverschiebung in Hauptfaserbündeln	81
4-B	Parallelverschiebung in Vektorbündeln	95
4-C	Parallelverschiebung im Tangentialbündel	97

4-D	Parallele Schnitte und Parallelverschiebung	105
4-E	Geodätische	108
4-F	Die Exponentialabbildung	112
4-G	Normalkoordinaten	117
4-H	Der Geodätische Fluss	119
4-I	Geodätische und Exponentialabbildung auf Lie-Gruppen	120
4-J	Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten	122
5	Holonomietheorie	125
5-A	Die Holonomie-Gruppe	125
5-B	Flache Zusammenhänge und Holonomie	133
5-C	Parallele Schnitte und Holonomie	134
5-D	Holonomiegruppen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten	137
5-E	Riemannsche Produkte und Holonomie	140
5-F	Klassifikation der Holonomiegruppen	145
6	Charakteristische Klassen	147
6-A	Konstruktion	148
6-B	Charakteristische Klassen in Vektorbündeln	154
6-C	Invariante Polynome auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$	156
6-D	Chern-Klassen und Chern-Charakter	158
6-E	Charakteristische Klassen reeller Vektorbündel	164
6-F	Multiplikative Folgen	168
6-G	Indexsätze	169
7	Differentialoperatoren	173
7-A	Elemente der linearen Algebra	173
7-B	Differentialoperatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	174
7-C	Der Laplace-Operator auf Funktionen	179
7-D	Anwendung: Der Laplace-Operator auf der Sphäre	183
7-E	Ausblick: Symmetrische Räume	188
7-F	Der Laplace-Operator auf Differentialformen	189
7-G	Hodge-Theorie	191
7-H	Die Weizenböck-Formeln	193
7-I	Charakterisierung von Killing Vektorfeldern	203
	Literaturverzeichnis	211

1 Hauptfaserbündel und assoziierte Faserbündel

1-A Lokal triviale Faserung

- 1.1 **Definition** Sei $\pi : E \rightarrow M$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten E und M und F eine weitere Mannigfaltigkeit. Man nennt das Tupel $(E, \pi, M; F)$ **lokal-triviale Faserung vom Fasertyp F** , falls es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von x und einen Diffeomorphismus

$$\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F \quad (*)$$

gibt mit $\text{pr}_1 \circ \phi_U = \pi$. \times

Eigenschaft (*) nennt man **lokale Trivialität** und die Abbildungen ϕ_U **lokale Trivialisierungen**. E heißt **Totalraum**, M **Basis** und π **Projektion**. Für jedes $x \in M$ ist die **Faser** $E_x := \pi^{-1}(x) \subset E$ eine Untermannigfaltigkeit von E und unter dem Diffeomorphismus

$$\phi_{U,x} = \text{pr}_2 \circ \phi_U|_{E_x} : E_x \rightarrow F$$

diffeomorph zu F . Insbesondere sind alle Fasern E_x für $x \in M$ zueinander diffeomorph.

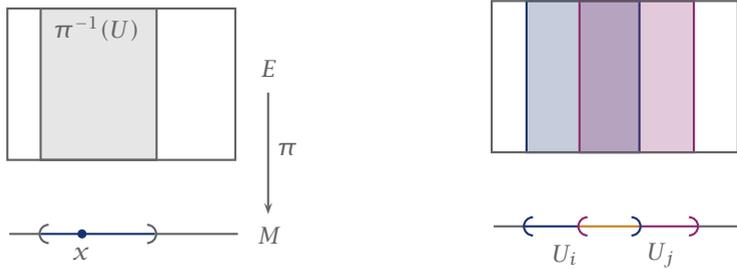
BEISPIEL 1 Die triviale Faserung $E = M \times F$, wobei π dann der Projektion auf den ersten Faktor entspricht. \blacksquare

Analog zu Kartenwechseln auf Mannigfaltigkeiten, kann man nun Abbildungen definieren, die zwischen den lokalen Trivialisierungen wechseln.

- 1.2 **Definition** Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M und $\phi_i := \phi_{U_i}$ die zugehörigen lokalen Trivialisierungen von E . Dann heißt die Abbildung

$$\phi_i \circ \phi_k^{-1} : (U_i \cap U_k) \times F \rightarrow (U_i \cap U_k) \times F$$

Übergangsfunktion zwischen den Bündelkarten (U_i, ϕ_i) und (U_k, ϕ_k) . \times



1.1 Zur lokalen Faserung und zur Übergangsabbildung.

Durch diese Definition werden Abbildungen

$$\phi_{ik} : U_i \cap U_k \rightarrow \text{Diff}(F), \quad x \mapsto \phi_{i,x} \circ \phi_{k,x}^{-1}$$

induziert. Später werden wir sehen, dass das Bündel bereits vollständig durch die ϕ_{ik} beschrieben wird. Das ermöglicht die Konstruktion von Bündeln durch Vorgabe der ϕ_{ik} und eine Klassifikation der Bündel über M .

1.3 Lemma Die Abbildungen ϕ_{ik} erfüllen die *Kozyklen-Bedingung*,

a) $\phi_{ii} = \text{id}$,

b) $\phi_{ik}(x) \circ \phi_{kj}(x) = \phi_{ij}(x)$, auf $U_i \cap U_j \cap U_k$.

1.4 Definition Zwei lokal triviale Faserungen $(E, \pi, M; F)$ und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M; \tilde{F})$ heißen *isomorph*, falls ein Diffeomorphismus

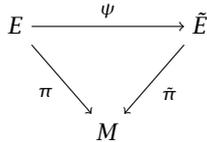
$$\psi : E \rightarrow \tilde{E}$$

existiert, mit $\tilde{\pi} \circ \psi = \pi$. \times

Ein solcher Diffeomorphismus überführt Fasern in Fasern. Insbesondere sind F und \tilde{F} isomorph.

1.5 Bemerkung. Eine Faserung heißt *trivial*, falls sie isomorph ist zu $(M \times F, \text{pr}_1, M; F)$.

BEISPIEL 2 a.) Eine Überlagerung $p : \tilde{M} \rightarrow M$ ist eine lokal triviale Faserung mit diskreter Faser.



1.2 Kommutatives Diagramm für isomorphe Faserungen.

- b.) Vektorbündel, wie der Tangentialraum $(TM, \pi, M; \mathbb{R}^n)$ oder das Formenbündel $(\Lambda^k TM, \pi, M; \Lambda^k \mathbb{R}^n)$, sind lokal triviale Faserungen. Euklidische Vektorräume bilden ihre Faser.
- c.) *Rahmenbündel.* Gegeben eine Mannigfaltigkeit M , definiert man

$$E = P_{GL_n} := \{p : p \text{ ist Basis von } T_x M, \text{ für ein } x \in M\}.$$

Dann ist E eine Mannigfaltigkeit und durch $(E, \pi, M; F)$ eine lokal triviale Faserung gegeben, wobei π die Fußpunktabbildung ist, d.h.

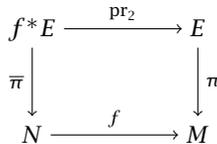
$$\pi(p) = x, \quad \text{falls } p = \{e_1, \dots, e_n\} \text{ Basis von } T_x M.$$

Die Faser E_x ist gerade die Menge aller Basen von $T_x M$ und folglich ist $F = GL_n$.

- d.) *Pullback-Bündel.* Sei $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung und $(E, \pi, M; F)$ eine lokal triviale Faserung. Man definiert nun

$$f^*E := \{(y, e) \in N \times E : f(y) = \pi(e)\} \subset N \times E,$$

mit Projektionsabbildung $\bar{\pi}(y, e) = y$. Für den Spezialfall einer Untermannigfaltigkeit $i : N \hookrightarrow M$ ist gerade $i^*E = E|_N$. \rightarrow



1.3 Kommutatives Diagramm für Pullback-Bündel.

- 1.6 **Definition** Ein *glatter Schnitt* einer lokal trivialen Faserung $(E, \pi, M; F)$ ist eine glatte Abbildung

$$s : M \rightarrow E \quad \text{mit } \pi \circ s = \text{id}_M.$$

D.h. für alle $x \in M$ ist $s(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$. Der *Raum aller Schnitte* wird mit $\Gamma(E)$ bezeichnet. \times

Die Existenz glatter Schnitte, d.h. $\Gamma(E) \neq \emptyset$, ist nicht per se gesichert, sondern an topologische und geometrische Bedingungen an die Faserung geknüpft. Für hinreichend kleine Umgebungen $U \subset M$ existieren jedoch immer lokale Schnitte.

- 1.7 **Definition** Sei $U \subset M$ eine offene Umgebung in M . Ein Schnitt in $E_U := E|_U = \pi^{-1}(U)$ heißt *lokaler Schnitt* von E über U . Der Raum der lokalen Schnitte über U wird mit $\Gamma(U, E)$ bezeichnet. \times

- 1.8 **Bemerkung.** Ist der Fasertyp ein euklidischer Raum, d.h. $F \cong \mathbb{R}^n$, so existiert ein allgemeiner Fortsetzungssatz: Sei $A \subset M$ abgeschlossen und $s : A \rightarrow E$ glatt — d.h. $s : A^\circ \rightarrow E$ ist glatt und für jedes $x \in \partial A$ existiert eine Umgebung $U \subset M$ von x , so dass $s : U \rightarrow E$ ebenfalls glatt ist —, dann existiert eine glatte globale Fortsetzung von s zu

$$\tilde{s} : M \rightarrow E, \quad \tilde{s}|_A = s.$$

Da es immer möglich ist, einen Schnitt zu finden, der in einem Punkt glatt ist, lässt sich auch $\Gamma(E) \neq \emptyset$ immer garantieren. \rightarrow

1-B Hauptfaserbündel

Von besonderem Interesse sind Faserungen, auf denen eine Lie-Gruppe wirkt, die mit der Faserung verträglich ist.

- 1.9 **Definition** Sei G eine Lie-Gruppe und $\pi : P \rightarrow M$ eine glatte Abbildung. Das Tupel $(P, \pi, M; G)$ heißt *G-Hauptfaserbündel (G-HFB) auch G-Prinzipalbündel* über M , falls gelten:

- 1.) Die Gruppe G wirkt von rechts auf P und die Wirkung ist *fasertreu*, d.h.

$$P_x \cdot g \subset P_x, \quad \text{für alle } x \in M \text{ und } g \in G,$$

und die Gruppenwirkung ist *einfach transitiv* auf den Fasern, d.h. für $x \in M$ und zu $p, q \in P_x$ gegeben existiert genau ein $g \in G$, so dass $p \cdot g = q$.

2.) Es gibt einen Bündelatlas $\{(U, \phi_U)\}$ aus G -äquivalenten Bündelkarten, d.h.

$$\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G, \quad \phi_U(p) = (\pi(p), s_U(p)),$$

ist ein äquivalenter Diffeomorphismus, wobei $s_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ glatt, und

$$\phi_U(p \cdot g) = \phi_U(p) \cdot g = (\pi(p), s_U(p)g), \quad \forall g \in G, \quad p \in \pi^{-1}(U),$$

d.h. es gilt $s_U(p \cdot g) = s_U(p) \cdot g$ für alle $g \in G, p \in \pi^{-1}(U)$. \times

In der Eichfeldtheorie nennt man die Wahl der Bündelkarten $\{U, \phi_U\}$ auch Wahl einer **Eichung**.

1.10 *Notation.* Um ein G -Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ zu bezeichnen, schreiben wir auch oft nur $\pi : P \rightarrow M$ bzw. lassen die Projektion ganz weg und bezeichnen das G -Hauptfaserbündel mit $P \rightarrow M$. \rightarrow

1.11 *Bemerkungen.* A. Die Rechtswirkung von G lässt sich auch als eine Darstellung

$$r : G \rightarrow \text{Diff}(P), \quad g \mapsto r_g,$$

beschreiben, d.h. $r_e = \text{id}$ und $r_g \circ r_h = r_{h \cdot g}$. Um die Notation kurz zu halten, setzen wir zur Abkürzung $r_g(p) := p \cdot g$.

B. M ist der G -Quotientenraum von P ,

$$M = P/G = P/\sim, \quad p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow \exists g : p_2 = p_1 \cdot g.$$

Man hätte das Hauptfaserbündel auch über diese Äquivalenzrelation als Quotientenraum definieren können. Insbesondere wirkt G nach dieser Definition frei auf P . Die Faser $\pi^{-1}(x)$ ist dann die G -Bahn durch einen Punkt $p \in E$ mit $\pi(p) = x$ und die Abbildung

$$G \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad g \mapsto p \cdot g$$

ist ein Diffeomorphismus, d.h. alle Fasern P_x sind diffeomorph zu G . \rightarrow

Zwei lokal triviale Faserungen $\pi : E \rightarrow M$ und $\tilde{\pi} : \tilde{E} \rightarrow M$ heißen isomorph, falls es einen Diffeomorphismus $\psi : E \rightarrow \tilde{E}$ gibt, der Fasern in Fasern überführt. Bei Hauptfaserbündeln ist es sinnvoll zusätzlich noch zu fordern, dass dieser Isomorphismus mit der G -Wirkung verträglich ist.

- 1.12 **Definition** Zwei G -Hauptfaserbündel über der Basis M , $(P, \pi, M; G)$ und $(\tilde{P}, \tilde{\pi}, M; G)$ heißen **isomorph**, falls es einen G -äquivalenten Isomorphismus $\psi : P \rightarrow \tilde{P}$ gibt, der die Fasern erhält, d.h. $\psi(p \cdot g) = \psi(p) \cdot g$ und $\tilde{\pi} \circ \psi = \pi$. Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\psi} & \tilde{P} \\ & \searrow \pi & \swarrow \tilde{\pi} \\ & M & \end{array} \quad \times$$

- 1.13 **Bemerkung.** Ein G -Hauptfaserbündel heißt **trivial**, falls es isomorph ist zum trivialen Bündel $(M \times G, \text{pr}_1, M; G)$, d.h. falls eine globale Trivialisierung existiert.

BEISPIEL 3 a.) Für jede Lie-Gruppe G ist das triviale G -Hauptfaserbündel definiert durch $P = M \times G \rightarrow M$ mit der G -Wirkung $(x, g) \cdot h := (x, g \cdot h)$.

b.) Das **Rahmenbündel** ist definiert durch

$$P_{\text{GL}_n} := \{p = (e_1, \dots, e_n) : (e_1, \dots, e_n) \text{ Basis von } T_x M \text{ für ein } x \in M\},$$

mit der GL_n -Wirkung $(e_1, \dots, e_n) \cdot g = (e'_1, \dots, e'_n)$,

$$e'_j = \sum_i g_{ji} e_i.$$

Die Fasern $P_x = \pi^{-1}(x)$ sind dann gerade alle Vektorraum-Basen von $T_x M$, d.h. $P_x \cong \text{GL}_n$, für $n = \dim M$.

Die lokale Trivialität wird beschrieben durch die Abbildungen

$$s_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow \text{GL}_n,$$

für $U \subset M$ offen, mit

$$s_U(x, e_1, \dots, e_n) = (\text{dx}_i(e_j))_{ij},$$

wobei $(\text{dx}_i(e_j))_{ij}$ die Transformationsmatrix beschreibt, die die Basis (e_1, \dots, e_n) in die Standardbasis überführt.

- c.) **Homogene Räume.** Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, dann ist G/H ein homogener Raum und durch

$$\pi : G \rightarrow G/H, \quad g \mapsto [g]$$

ist ein H -Hauptfaserbündel $\pi : G \rightarrow G/H$ gegeben. Die Gruppenwirkung entspricht gerade der Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $H \subset G$.

d.) Die n -dimensionale Sphäre lässt sich als homogener Raum auffassen,

$$S^n = O(n+1)/O(n).$$

Somit ist $O(n+1) \rightarrow S^n$ ein $O(n)$ -Hauptfaserbündel.

e.) Jede Mannigfaltigkeit M besitzt eine universelle Überlagerung $\tilde{M} \rightarrow M$, d.h. die Fundamentalgruppe von \tilde{M} ist trivial $\pi_1(\tilde{M}) = 1$. Durch die universelle Überlagerung ist ein $\pi_1(M)$ -Hauptfaserbündel $\tilde{M} \rightarrow M$ gegeben.

f.) *Hopf-Faserung.* Man betrachtet die $2n+1$ -dimensionale Sphäre eingebettet in \mathbb{C}^{n+1} und identifiziert jeden Punkt auf der Sphäre mit einer Geraden in der komplexen Ebene,

$$\pi : S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n, \quad \nu \mapsto [\nu].$$

Man erhält ein $U(1)$ -Hauptfaserbündel $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$; alle Fasern sind diffeomorph zu $S^1 \cong U(1)$. Somit ist $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ ein $U(1)$ -Hauptfaserbündel und die Gruppenwirkung ist gerade die Standard-Skalarmultiplikation in \mathbb{C}^{n+1} ,

$$r_z(\nu) = \nu \cdot z, \quad z \in S^1 \subset \mathbb{C}, \quad \nu \in S^{2n+1}. \quad \blacksquare$$

Die Standardüberdeckung von \mathbb{CP}^n lässt sich in homogenen Koordinaten ausdrücken als

$$U_i := \{[z_0 : \dots : z_i : \dots : z_n] : z_i \neq 0\}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Man definiert nun Abbildungen

$$s_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U(1), \quad (z_0, \dots, z_n) \mapsto \frac{z_i}{|z_i|}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Diese spielen gerade die Rolle der $s_U = \text{pr}_2 \circ \phi_U$ in der Definition des Hauptfaserbündels.

1.14 **Definition** Sei P ein G -Hauptfaserbündel über M und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M . Man definiert nun Abbildungen

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G, \quad g_{ij}(x) := s_{U_i}(p)s_{U_j}(p)^{-1},$$

für $x \in M$ und $\pi(p) = x$. \times

Die Abbildungen g_{ij} sind wohldefiniert, denn falls $\pi(p) = x = \pi(q)$, so existiert genau ein $g \in G$, so dass $q = p \cdot g$ und folglich ist

$$\begin{aligned} s_{U_i}(q)s_{U_j}(q)^{-1} &= s_{U_i}(p \cdot g)s_{U_j}(p \cdot g)^{-1} = s_{U_i}(p)gg^{-1}s_{U_j}(p)^{-1} \\ &= s_{U_i}(p)s_{U_j}(p)^{-1}. \end{aligned}$$

Nach dem folgenden Lemma entsprechen die Übergangsfunktionen des Hauptfaserbündels $P \rightarrow M$ gerade den Linkstranslationen mit g_{ij} :

1.15 **Lemma** Seien U_i, U_j Umgebungen einer offenen Überdeckung von M . Dann gilt,

a) $g_{ij}(x) = \phi_{U_i, U_j}(x)(e)$, für alle $x \in M$.

b) $\phi_{U_i, U_j}(x)(g) = g_{ij}(x) \cdot g$, für alle $x \in M$ und $g \in G$. \times

Beweis. Aufgrund der Äquivarianz gilt $\phi_U(p \cdot g) = \phi_U(p) \cdot g$ für die lokalen Trivialisierungen. Dies gilt auch für die $\phi_{U,x} := \text{pr}_2 \circ \phi_U|_{P_x}$, denn die G -Wirkung ist fasertreu. Dadurch ist die G -Wirkung auf P durch die lokalen Trivialisierungen festgelegt,

$$p \cdot g := \phi_{U,x}^{-1}(\phi_{U,x}(p) \cdot g), \quad p \in P, \quad g \in G. \quad (*)$$

Insbesondere ist $\phi_{U,x}^{-1}(h \cdot g) = \phi_{U,x}^{-1}(h) \cdot g$ für $g, h \in G$.

a): Wir haben bereits gesehen, dass die Definition der $g_{ij}(x) := s_{U_i}(p) \cdot s_{U_j}(p)^{-1}$ unabhängig vom gewählten $p \in P_x$ ist. Wähle daher p so, dass $s_{U_j}(p) = e$. Dann ist

$$p = s_{U_j}^{-1}(e) = \phi_{U_j, x}^{-1}(e).$$

Eine kurze Rechnung ergibt,

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) &= s_{U_i}(p)s_{U_j}(p)^{-1} = s_{U_i}(p) = \phi_{U_i, x}(p) \\ &= \phi_{U_i, x}(\phi_{U_j, x}^{-1}(e)) = \phi_{U_i, U_j}(x)(e). \end{aligned}$$

b): Analog erhält man die zweite Behauptung:

$$\begin{aligned} g_{ij}(x) \cdot g &= \phi_{U_i, x}(\phi_{U_j, x}^{-1}(e)) \cdot g \\ &= \phi_{U_i, x}(\phi_{U_j, x}^{-1}(e) \cdot g) \\ &= \phi_{U_i, x}(\phi_{U_j, x}^{-1}(g)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Die Abbildungen g_{ij} haben ähnliche Eigenschaften wie die Übergangsfunktionen $\phi_{U_i U_j}$. In der Literatur findet man daher für die g_{ij} oftmals ebenfalls die Bezeichnung Übergangsfunktionen. Sie erfüllen auch die Kozyklenbedingung:

1.16 **Lemma** Die Abbildungen $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ für eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M sind G -Kozyklen, d.h.

$$a) \quad g_{ii}(x) = e \text{ für alle } x \in U.$$

$$b) \quad g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) = g_{ik}(x) \text{ für } x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Insbesondere gilt $g_{ij}(x)^{-1} = g_{ji}(x)$. \times

1.17 **Satz** Sei G eine Lie-Gruppe und $\pi : P \rightarrow M$ glatt. Das Tupel $(P, \pi, M; G)$ ist ein G -Hauptfaserbündel genau dann, wenn es einen Bündelatlas $\{U_i, \phi_{U_i}\}$ und G -Kozyklen g_{ij} gibt, so dass die Kozyklen ϕ_{ij} durch Linkstranslation mit g_{ij} gegeben sind. Die G -Wirkung auf P ist dann gegeben durch

$$p \cdot g = \phi_{U_i, x}^{-1}(\phi_{U_i, x}(p) \cdot g), \quad \pi(p) = x. \quad \times$$

Die Kozykleigenschaft bildet quasi die „Verklebungsvorschrift“ nach der man aus den g_{ij} ein Bündel erhält.

Beweis. \Rightarrow : Folgt direkt aus Lemma 1.15.

\Leftarrow : Man erhält die $\phi_{U_i, x}$ aus den g_{ij} und definiert die G -Wirkung durch obige Formel. Dann ist diese fasertreu und einfach transitiv, denn die $\phi_{U_i, x}$ sind Diffeomorphismen. Offensichtlich sind auch die ϕ_{U_i} nach dieser Definition G -äquivariant. Somit ist $(P, \pi, M; G)$ ein Hauptfaserbündel. ■

1.18 **Lemma** Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen lokalen Schnitten und lokalen Trivialisierungen. Insbesondere ist ein Hauptfaserbündel genau dann trivial, wenn es einen globalen Schnitt besitzt. \times

Beweis. \Rightarrow : Gegeben sei ein lokaler Schnitt σ_U . Für $x \in U$ ist $\sigma_U(x) \in P_x$ und folglich existiert für jedes $p \in P_x$ ein eindeutiges $g \in G$, so dass

$$p = \sigma_U(x) \cdot g.$$

Man definiert nun als lokale Trivialisierung

$$\phi_U(p) := \phi_U(\sigma_U(x)) \cdot g = (x, g).$$

Die Glattheit von ϕ_U folgt aus der Glattheit von σ_U .

⇐: Gegeben sei eine lokale Trivialisierung $\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$. Zu $x \in U$ definiert man nun

$$\sigma_U := \phi_U^{-1}(x, e),$$

dann ist σ_U glatt und $\sigma_U(x) \in P_x$. ■

1.19 *Bemerkung.* Es gilt die Beziehung $\sigma_U(x) = \sigma_V(x) \cdot g_{UV}(x)$ für alle $x \in U \cap V$.

BEISPIEL 4 Sei $P = P_{\text{GL}_n}$ das Rahmenbündel über einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M . Eine Karte (U, α) von M , definiert einen zugehörigen lokalen Schnitt

$$\sigma_U(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Das Rahmenbündel P_{GL_n} ist also genau dann trivial, wenn M parallelisierbar ist, d.h. wenn n global definierte punktweise linear unabhängige Vektorfelder existieren. In diesem Fall sind auch das Tangentialbündel und das Formenbündel trivial. Die Trivialität des Rahmenbündels ist also eine sehr starke Forderung.

Von den Sphären sind lediglich die zwei Lie-Gruppen S^1 und S^3 , sowie die S^7 parallelisierbar. Außerdem ist jede Lie-Gruppe parallelisierbar. ■

1-C Assoziierte Faserbündel

Hauptfaserbündel sind wichtige Objekte der Differentialgeometrie, aus denen man viele interessante Vektorbündel als assoziierte Faserbündel wiedergewinnen kann. Eigenschaften wie der Zusammenhang übertragen sich — einmal für das Hauptfaserbündel definiert — dann auf diese Vektorbündel. Exemplarisch behandeln wir in diesem Abschnitt das Tangentialbündel.

Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel, dann ist $P = \dot{\bigcup}_{x \in M} P_x$ und alle Fasern P_x sind diffeomorph zu G . Wirke G außerdem von links auf einer Mannigfaltigkeit F , d.h. es existiert eine Abbildung

$$l : G \rightarrow \text{Diff}(F), \quad g \mapsto l_g, \quad \text{mit } l_e = \text{id} \quad \text{und} \quad l_{g \cdot h}(\nu) = l_g \circ l_h(\nu).$$

Schreiben wir $l_g(\nu) = g \cdot \nu$, dann wirkt G von rechts auf $P \times F$ durch,

$$(p, \nu) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot \nu), \quad p \in P, \nu \in F, g \in G$$

Man definiert nun $E = (P \times F)/G = P \times_G F$, wobei die Punkte in E Äquivalenzklassen $[p, \nu]$ unter folgender Äquivalenzrelation sind

$$(p, \nu) \sim (p \cdot g, g^{-1} \cdot \nu) \quad \text{für alle } g \in G.$$

Man identifiziert also alle Punkte in $P \times F$, die in einer G -Bahn liegen. Die Projektion von E auf M ist dann gegeben durch $\hat{\pi} : E \rightarrow M, [p, \nu] \mapsto \pi(p)$.

1.20 **Satz** Das Tupel $(E, \hat{\pi}, M; F)$ ist eine lokal triviale Faserung über M mit Faser F . Man sagt E ist das zum G -Hauptfaserbündel P assoziierte Faserbündel. \times

Beweis. Sei $x \in M$ und (U, ϕ_U) eine Bündelkarte um $\pi^{-1}(x)$ von P ,

$$\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G, \quad p \mapsto (\pi(p), s_U(p)).$$

Man definiert nun als lokale Trivialisierung von E ,

$$\psi_U : \hat{\pi}^{-1}(U) = E_U \rightarrow U \times F, \quad [p, \nu] \mapsto (\pi(p), s_U(p) \cdot \nu).$$

Dann ist ψ_U wohldefiniert, da G fasertreu und s_U G -äquivariant ist. \blacksquare

1.21 **Bemerkung.** Die Kozyklen von $E = P \times_G F$ sind gegeben durch die Linkswirkung $l_{g_{ij}(x)}$ der Kozyklen von P .

BEISPIEL 5 a.) Das Tangentialbündel ist assoziiert zum Rahmenbündel. Genauer gilt für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M

$$TM \cong P_{GL_n} \times_{GL_n} \mathbb{R}^n,$$

mit der Gruppenwirkung

$$GL_n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (g, \nu) \mapsto g \cdot \nu.$$

Sei dazu $m \in M$ und $p = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von $T_m M$, d.h. $p \in P_m$. Dann ist der Diffeomorphismus gegeben durch

$$P_{GL_n} \times_{GL_n} \mathbb{R}^n \ni [p, \nu] \mapsto \sum_{i=1}^n \nu_i e_i \in T_m M, \quad \nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n.$$

b.) Analog ist auch das Formenbündel zum Rahmenbündel assoziiert. Die Gruppenwirkung von GL_n auf $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ ist dabei gegeben durch

$$\rho_k : GL_n \rightarrow \text{Aut}(\Lambda^k \mathbb{R}^n), \quad g \cdot (\nu_1 \wedge \dots \wedge \nu_k) := (g \cdot \nu_1 \wedge \dots \wedge g \cdot \nu_k).$$

Die Abbildung ρ_k ist eine Darstellung von GL_n auf $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ und man hat,

$$\Lambda^k TM \cong P_{GL_n} \times_{\rho_k} \Lambda^k \mathbb{R}^n.$$

Die Äquivalenzklassen sind bezüglich der Darstellung zu verstehen als

$$[p, \nu] \sim [p \cdot g, \rho(g)^{-1} \nu], \quad p \in P_x, g \in G.$$

c.) Viele interessante Vektorbündel erhält man als assoziierte Faserbündel, indem man das G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ festhält und nur die Darstellung variiert. ■

1.22 *Bemerkung.* Sei P ein G -Hauptfaserbündel und E zu P assoziiert mit Fasertyp F . Sei $x \in M$, dann gilt $E_x \cong F$. Für jedes $p \in P_x$ ist nun der sogenannte Faserdiffeomorphismus gegeben durch,

$$[p] : F \rightarrow P_x \times_G F = E_x, \quad \nu \mapsto [p, \nu]. \quad \dashv$$

Offensichtlich gilt $[p \cdot g] = [p] \cdot l_g$ für alle $p \in P, g \in G$.

1.23 **Lemma** Sei $E = P \times_G F$ ein zum G -Hauptfaserbündel P assoziiertes Faserbündel mit Fasertyp F , dann besteht eine bijektive Beziehung zwischen Schnitten in E und G -äquivalenten Funktionen,

$$\Gamma(E) \cong \mathcal{C}^\infty(P, F)^G := \left\{ f : P \rightarrow F : f(p \cdot g) = g^{-1} f(p) \text{ für } p \in P, g \in G \right\}. \quad \times$$

Beweis. \supset : Sei $\bar{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, F)^G$, dann definiert man für $x \in M$,

$$s(x) := [p, \bar{s}(p)], \quad \text{für ein } p \in P_x.$$

Der Schnitt $s : M \rightarrow E$ ist wohl definiert, d.h. unabhängig von der Wahl von $p \in E_x$, denn für $q \in P_x$ beliebig existiert ein $g \in G$, so dass $q = p \cdot g$ und es gilt

$$[q, \bar{s}(q)] = [p \cdot g, \bar{s}(p \cdot g)] = [p \cdot g, g^{-1} \bar{s}(p)] = [p, \bar{s}(p)].$$

Weiterhin ist s glatt, denn \bar{s} ist glatt, und somit ist s ein Schnitt in E .

\subset : Sei $s \in \Gamma(E)$, dann ist $s(x) \in E_x$ und man definiert für $p \in P_x$,

$$\bar{s}(p) = [p]^{-1}(s \circ \pi(p)).$$

Dann ist die Funktion $\bar{s} : P \rightarrow F$ G -äquivariant, denn für $p \in P$ und $g \in G$ ist

$$\bar{s}(p \cdot g) = [p \cdot g]^{-1}(s \circ \pi(p \cdot g)) = g^{-1}[p]^{-1}(s \circ \pi(p)) = g^{-1}\bar{s}(p).$$

Somit ist $\bar{s} \in \mathcal{C}^\infty(P, F)^G$. ■

BEISPIEL 6 Die Schnitte im Tangentialbündel sind gerade die Vektorfelder auf M . Nach dem vorigen Lemma gilt $\chi(M) \cong \mathcal{C}^\infty(P_{\text{GL}_n}, \mathbb{R}^n)^{\text{GL}_n}$. Um dies zu veranschaulichen, wähle Karten (U, x) und (V, y) um $m \in M$, dann sind durch

$$p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{p} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right),$$

zwei Basen von $T_m M$ gegeben. Zwischen den Koordinatenvektorfeldern besteht die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n a_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a_{ji} = \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = \left. \frac{\partial(x_j \circ y^{-1})}{\partial y_i} \right|_0,$$

mit der sich die Basen ineinander überführen lassen,

$$\tilde{p} = p \cdot g, \quad g = (a_{ji})_{1 \leq j, i \leq n}.$$

Sei nun X ein Vektorfeld auf M , dann besitzt dieses bezüglich den Karten x bzw. y die lokale Darstellung,

$$X|_{U \cap V} = \sum_{i=1}^n \nu_i \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} \nu_i \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (*)$$

Man kann X somit wie folgt eine Abbildung f zuordnen

$$X \mapsto f, \quad f(\tilde{p}) = (\nu_1, \dots, \nu_n).$$

Nach Gleichung (*) ist f außerdem G -äquivariant, denn $f(p) = g \cdot f(\tilde{p})$. Somit ist $f \in \mathcal{C}^\infty(P_{\text{GL}_n}, \mathbb{R}^n)^{\text{GL}_n}$. Die Funktion f beschreibt das Vektorfeld X eindeutig, indem es vorgibt, wie ein Basiswechsel, die Koeffizienten von X verändert. ■

- 1.24 **Satz** Sei M eine Mannigfaltigkeit und G eine Lie-Gruppe, die von links auf einer Mannigfaltigkeit F wirkt. Weiter sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M und

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$$

eine Familie von G -Kozyklen. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine lokal triviale Faserung $(E, \hat{\pi}, M; F)$ deren Kozyklen durch Linkstranslation der $g_{ij}(x)$ gegeben sind. \times

Beweis. Konstruktion von E . Man definiert zunächst

$$\hat{E} = \bigcup_i U_i \times F,$$

und für $(x_i, \nu_i) \in U_i \times F$, $(x_k, \nu_k) \in U_k \times F$ eine Äquivalenzrelation

$$(x_i, \nu_i) \sim (x_k, \nu_k) \Leftrightarrow x_i = x_k = x \text{ und } \nu_k = g_{ki}\nu_i.$$

Setzt man $E = \hat{E}/\sim$ und $\hat{\pi}([x, \nu]) = x$, so ist $\pi : E \rightarrow M$ eine lokal triviale Faserung mit lokalen Trivialisierungen

$$\psi_i : E_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F, \quad [x_i, \nu] \mapsto (x_i, \nu).$$

Sei $x \in M$, dann sind durch Konstruktion die *Kartenwechsel* gegeben durch,

$$\psi_{ix} \circ \psi_{kx}^{-1}(\nu) = g_{ik}(x)\nu.$$

Analog erhält man das G -Hauptfaserbündel P , indem man in obiger Konstruktion F durch G ersetzt. Dann ist E zu P assoziiert, d.h. die Abbildung

$$P \times_G F \rightarrow E, \quad [[x, g], \nu] \mapsto [x, g \cdot \nu]$$

ist ein Isomorphismus.

Es verbleibt, die Eindeutigkeit von E zu zeigen. \blacksquare

1-D Vektorbündel

- 1.25 **Definition** Ein *Vektorbündel vom Rang r* ist eine lokal triviale Faserung $(E, \pi, M; V)$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) Der Fasertyp V ist ein r -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

2.) Für den Bündelatlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ und $x \in M$ sind die Abbildungen

$$\phi_{i,x} = \phi_i|_{E_x} : E_x \rightarrow V$$

Vektorraumisomorphismen. \times

Ein Vektorbündel ist also eine Faserung deren Faser ein Vektorraum ist und deren lokale Trivialisierungen eingeschränkt auf die Fasern Vektorraumisomorphismen ergeben.

1.26 **Bezeichnung.** Für $r = \text{rk}(E) = 1$ nennt man E ein **Geradenbündel** (auch **Linienbündel**). \rightarrow

Ähnlich wie bei den Hauptfaserbündeln, ist es sinnvoll für die Isomorphie zweier Vektorbündel zusätzlich zu fordern, dass auch die lineare Struktur übertragen wird.

1.27 **Definition** Zwei Vektorbündel $(E, \pi, M; V)$ und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M; V)$ heißen **isomorph**, wenn es einen fasertreuen Diffeomorphismus

$$\psi : E \rightarrow \tilde{E}$$

gibt, so dass $\psi_x = \psi|_{E_x} : E_x \rightarrow \tilde{E}_x$ für jedes $x \in M$ ein Vektorraumisomorphismus.

Allgemeiner heißt eine differenzierbare, fasertreue Abbildung $\psi : E \rightarrow \tilde{E}$ **Homomorphismus der Vektorbündel**, wenn alle ψ_x lineare Abbildungen sind. \times

1.28 **Lemma** Seien $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und zwei Vektorbündel

$$E_1 = P \times_{\rho_1} V_1, \quad E_2 = P \times_{\rho_2} V_2,$$

definiert durch die Darstellungen

$$\rho_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1), \quad \rho_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2).$$

Jede G -äquivariante Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ induziert einen Homomorphismus von Vektorbündeln

$$\hat{f} : E_1 \rightarrow E_2, \quad [p, v] \mapsto [p, f(v)]. \quad \times$$

Beweis. Die Abbildung \hat{f} ist wohldefiniert, denn seien $g \in G$, $p \in P$ und $\nu \in V_1$, so ist $[p, \nu] = [p \cdot g, \rho_1(g^{-1})\nu]$ und es gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}([p \cdot g, \rho_1(g^{-1})\nu]) &= [p \cdot g, f(\rho_1(g^{-1})\nu)] = [p \cdot g, \rho_2(g^{-1})f(\nu)] \\ &= [p, f(\nu)] = \hat{f}([p, \nu]).\end{aligned}$$

Weiterhin ist \hat{f} per definitionem fasertreu und \hat{f} eingeschränkt auf eine Faser linear, da f linear. ■

1.29 *Bemerkung.* Der Raum der Schnitte $\Gamma(E)$ wird ein $C^\infty(M)$ -Modul, indem man für einen Schnitt s in E und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(M)$ definiert,

$$(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s(x), \quad x \in M. \quad \rightarrow$$

1.30 **Definition** Ein Vektorbündel heißt *trivial*, falls es isomorph ist zum trivialen Bündel $E = M \times \mathbb{K}^n \rightarrow M$ ist. \times

BEISPIEL 7 a.) Das Tangentialbündel ist ein Vektorbündel

$$TM \cong P_{GL_n} \times_{GL_n} \mathbb{R}^n,$$

denn der Fasertyp ist der euklidische Vektorraum \mathbb{R}^n .

b.) Das Formenbündel ist ein Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k}$

$$\Lambda^k T_M \cong P_{GL_n} \times_{\rho} \Lambda^k \mathbb{R}^n,$$

denn $\Lambda^k \mathbb{R}^n$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

c.) Betrachte den n -dimensionalen komplex projektiven Raum

$$\mathbb{C}P^n = \{L \subset \mathbb{C}^{n+1} : L \text{ Unterraum der Dimension } 1\}.$$

Das **kanonische Linienbündel** (auch **tautologisches Bündel**) ist gegeben durch

$$\gamma_n := \{(L, \xi) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} : \xi \in L\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n,$$

mit der Projektion $\pi(L, \xi) = L$ und Fasern

$$\pi^{-1}(L) = \{\xi \in \mathbb{C}^{n+1} : \xi \in L\} = L.$$

Lemma γ_n ist ein komplexes Vektorbündel vom Rang 1. \times

Betrachte das $U(1)$ -Hauptfaserbündel (Hopf-Bündel)

$$S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n, \quad z \mapsto [z],$$

wobei $z \sim z \cdot \lambda$ für $\lambda \in U(1)$. Jede irreduzible Darstellung von $U(1)$ ist beschrieben durch einen Index $k \in \mathbb{Z}$,

$$\rho_k : U(1) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}), \quad \rho_k(z) \cdot v = z^k v, \quad \text{für } z \in U(1), v \in \mathbb{C}.$$

Alle Bündel die man als assoziierte Bündel aus dem Hopf-Bündel erhält haben die Gestalt

$$S^{2n+1} \times_{\rho_k} \mathbb{C} = \gamma_n^k = \begin{cases} \gamma_n^{\otimes k}, & k > 0, \\ \overline{\gamma_n}^{\otimes k}, & k < 0, \\ \text{trivial}, & k = 0, \end{cases}$$

wobei $\gamma_n^{\otimes k} = \underbrace{\gamma_n \otimes \dots \otimes \gamma_n}_{k\text{-mal}}$.

Eine Überdeckung von S^{2n+1} lässt sich in homogenen Koordinaten beschreiben als

$$U_j = \{[z_0 : \dots : z_n] : z_j \neq 0\}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Zu dieser Überdeckung finden sich lokale Schnitte des Hopf-Bündels der Form $\sigma_j : U_j \rightarrow S^{2n+1}$ mit

$$\sigma_j([w_0 : \dots : w_n]) = \left(\frac{w_0}{w_j}, \dots, \frac{w_{j-1}}{w_j}, 1, \frac{w_{j+1}}{w_j}, \dots, \frac{w_n}{w_j} \right) \cdot \left(1 + \sum_{k \neq j} \left| \frac{w_k}{w_j} \right|^2 \right)^{-1/2}.$$

Damit lassen sich die lokalen Trivialisierungen des tautologischen Bündels angeben durch

$$\phi_i : \gamma_n|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}, \quad (L, \xi) \mapsto (L, z), \quad \xi = \sigma_i(L) \cdot z.$$

Die Abbildungen ϕ_i sind bijektiv, glatt und linear Isomorphismen in den Fasern. Die Übergangsfunktionen

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C} \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}, \quad (L, z) \mapsto (L, g_{ij}(L) \cdot z)$$

sind ebenfalls glatt und somit ist γ_n assoziiert zu dem Hauptfaserbündel, das durch die g_{ij} erzeugt wird. ■

Sei nun P ein G -Hauptfaserbündel, V ein Vektorraum und ρ eine G -Darstellung, d.h. $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V) = \text{GL}(V)$ ist ein Gruppen-Homomorphismus. Dann wirkt G auf V durch $g \cdot v := \rho(g)v$.

1.31 **Lemma** $E_\rho := P \times_\rho V$ ist ein Vektorbündel. \times

Beweis. Die lokalen Trivialisierungen von P sind gegeben durch

$$\phi_U : P_U \rightarrow U \times G, \quad p \mapsto (\pi(p), s_U(p)).$$

Man erhält nun die lokalen Trivialisierungen von E durch

$$\psi_U : E_U \rightarrow U \times V, \quad [p, v] \mapsto (\pi(p), \rho(s_U(p))v).$$

Die Vektorraumstruktur auf E_x ist dann gegeben durch

$$\lambda[p, v] + \mu[p, w] = [p, \lambda v + \mu w], \quad v, w \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Dadurch werden die Faserdiffeomorphismen zu Vektorraumisomorphismen,

$$[p] : V \rightarrow E_x, \quad v \mapsto [p, v]. \quad \blacksquare$$

1.32 **Lemma** Jedes Vektorbündel ist assoziiert zu einem G -Hauptfaserbündel mit linearer Strukturgruppe G , d.h. G ist eine Untergruppe der GL_n . \times

Beweis. Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Fasertyp V und $G = \text{GL}(V)$. Sei $\{(U_i, \psi_i)\}$ ein Bündelatlas von E , dann sind für jedes $x \in M$ die Abbildungen $\psi_{i,x} \circ \psi_{k,x}^{-1}$ lineare Isomorphismen von V . Folglich bilden die Kozyklen nach G ab,

$$g_{ij} : U_i \cap U_k \rightarrow G.$$

Nach Satz ?? existiert ein zum G -Hauptfaserbündel assoziiertes Faserbündel mit G -Kozyklen g_{ij} . Da dieses bis auf Isomorphie eindeutig ist, folgt die Behauptung. \blacksquare

1-E Lineare Algebra von Vektorbündeln

Da die Fasern der Vektorbündel selbst Vektorräume sind, lassen sich einige Konstruktionen der Linearen Algebra direkt auf Vektorbündel verallgemeinern. Dazu wendet man die Konstruktion zunächst auf den Fasern an und betrachtet das Ergebnis dann als Faser der Konstruktion für das Vektorbündel.

1.33 **Definition** Seien $(E, \pi, M; V)$ und $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, M; \tilde{V})$ zwei Vektorbündel.

1.) Man definiert die *Whitney-Summe* als

$$E \oplus \tilde{E} = \bigcup_{x \in M} E_x \oplus \tilde{E}_x,$$

mit Projektion $\hat{\pi} : E \oplus \tilde{E} \rightarrow M$, $e_x \oplus \tilde{e}_x \mapsto x$. Die lokalen Trivialisierungen sind gegeben durch

$$\hat{\pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times (V \oplus \tilde{V}), \quad e_x \oplus \tilde{e}_x \mapsto (\pi(x), \phi_{U,x}(e_x) \oplus \tilde{\phi}_{U,x}(\tilde{e}_x)).$$

2.) Das *Tensorprodukt* ist definiert als,

$$E \otimes \tilde{E} = \bigcup_{x \in M} E_x \otimes \tilde{E}_x,$$

mit Projektion und lokalen Trivialisierungen wie oben.

3.) Das zu E *duale Bündel* E^* ist definiert durch,

$$E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*.$$

4.) Das *Homomorphismenbündel* ist definiert durch,

$$\text{Hom}(E, \tilde{E}) = \bigcup_{x \in M} \text{Hom}(E_x, \tilde{E}_x)$$

und es gilt $\text{Hom}(E, \tilde{E}) = E^* \otimes \tilde{E}$. \times

Für einen komplexen Vektorraum V definiert man den *konjugierten Vektorraum* \bar{V} , indem man die abelschen Gruppenoperationen von V übernimmt und als skalare Multiplikation definiert

$$\mathbb{C} \times \bar{V} \rightarrow \bar{V}, \quad (\lambda, \nu) \mapsto \bar{\lambda}\nu,$$

wobei diese Multiplikation wieder in V aufzufassen ist.

1.34 **Definition** Das zu einem Vektorbündel E *konjugierte Bündel* ist definiert durch

$$\bar{E} := \bigcup_{x \in M} \bar{E}_x.$$

BEISPIEL 8 Sei P ein G -Hauptfaserbündel und sind zwei Vektorbündel gegeben als

$$E = P \times_{\rho} V, \quad \tilde{E} \times_{\tilde{\rho}} V,$$

mit Darstellungen

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V), \quad \tilde{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}(\tilde{V}).$$

Dann ist die Whitney-Summe gegeben durch $E \oplus \tilde{E} = P \times_{\rho \oplus \tilde{\rho}} V$, mit der Darstellung

$$\rho \oplus \tilde{\rho} : G \rightarrow \mathrm{GL}(V), \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \rho(g) & \\ & \tilde{\rho}(g) \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

1-F Bündelmetriken

Lemma 1.32 des vorletzten Abschnittes besagt, dass jedes Vektorbündel zu einem G -Hauptfaserbündel mit linearer Strukturgruppe assoziiert ist. Für reelle oder komplexe Vektorbündel kann man diese Aussage noch verschärfen, denn dann ist das Vektorbündel sogar zu einem $O(n)$ bzw. $U(n)$ -Hauptfaserbündel assoziiert.

- 1.35 **Definition** Sei $E \rightarrow M$ ein reelles oder komplexes Vektorbündel. Eine **Bündelmetrik** auf E ist ein Schnitt $h \in \Gamma(E^* \otimes \bar{E}^*)$, so dass h_x für jedes $x \in M$ eine nicht-ausgeartete und symmetrische (für E reell) bzw. hermitesche (für E komplex) Bilinearform ist. \times
- 1.36 **Satz** Auf jedem reellen oder komplexen Vektorbündel existiert eine positiv definite Bündelmetrik. \times

Beweis. Sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit M und $E \rightarrow M$ ein reelles oder komplexes Vektorbündel vom Fasertyp V mit Trivialisierungen

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times V.$$

Sei weiter e_1, \dots, e_n eine Basis in V , dann definiert man lokale Schnitte

$$s_{i,a} = U_i \rightarrow E, \quad s_{i,a}(x) = \phi_i^{-1}(x, e_a),$$

für $a = 1, \dots, n$. Für jedes $x \in U_i$ bilden die Schnitte $s_{i,1}(x), \dots, s_{i,n}(x)$ eine Basis der Faser E_x . Durch Festlegung einer Orthonormalbasis wird nun lokal auf U_i eine Bündelmetrik induziert,

$$h_i : U_i \rightarrow E_{U_i}^* \otimes \bar{E}_{U_i}^*, \quad h_i(x)(s_{i,a}(x), s_{i,b}(x)) = \delta_{a,b}, \quad 1 \leq a, b \leq n.$$

Man wählt nun eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\{f_i\}$, die lokal endlich ist, und setzt

$$h := \sum_i f_i h_i.$$

Dann ist h auf ganz M definiert und für jedes $x \in M$ sind nur endlich viele $f_i(x)$ von Null verschieden. Somit ist h ein Schnitt in $\Gamma(E^* \otimes \bar{E}^*)$ und die Symmetrie bzw. Hermitizität der h_i übertragen sich auf h . Außerdem ist h nicht ausgeartet, da die h_i positiv definit sind. ■

BEISPIEL 9 Die Riemannsche Metrik ist eine Bündelmetrik auf dem Tangentialbündel. Während nach dem vorangegangenen Satz stets eine positiv definite Bündelmetrik gegeben ist, ist die Existenz von Bündelmetriken beliebiger Signatur an topologische Bedingungen an die Mannigfaltigkeit M geknüpft. ■

1.37 **Satz** Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang n .

a) Ist E reell, so ist E assoziiert zu einem $O(n)$ -Hauptfaserbündel.

b) Ist E komplex, so ist E assoziiert zu einem $U(n)$ -Hauptfaserbündel. ✕

Beweis. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang n . Zu $x \in M$ definiere P_x als die Menge der Orthonormalbasen in E_x . Dann ist durch

$$P = \bigcup_{x \in M} P_x \rightarrow M$$

ein Hauptfaserbündel gegeben.

a): Ist das Vektorbündel reell, so sind alle Fasern E_x isomorph zu einem reellen Vektorraum V . Zu je zwei Orthonormalbasen über E_x existiert genau eine orthogonale Abbildung, die die Orthonormalbasen ineinander überführt. Somit wirkt $O(n)$ einfach transitiv auf den Fasern P_x , also ist $P \rightarrow M$ ein $O(n)$ -Hauptfaserbündel. Der Diffeomorphismus, der E zu P assoziiert, ist gegeben durch

$$P \times_{O_n} \mathbb{R}^n \rightarrow E, \quad [(s_1, \dots, s_n), (\nu_1, \dots, \nu_n)] \mapsto \sum_{i=1}^n \nu_i s_i,$$

für eine Basis (s_1, \dots, s_n) in E_x und $(\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$.

b): Ist das Vektorbündel komplex, so sind alle Fasern E_x isomorph zu einem unitären Vektorraum V . Somit wirkt $U(n)$ einfach transitiv auf den Fasern P_x und E ist zu einem $U(n)$ -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ assoziiert. ■

BEISPIEL 10 a.) *Konstruktion von Bündelmetriken in assoziierten Vektorbündeln.* Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

eine Darstellung auf V . Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ein G -invariantes Skalarprodukt auf V , d.h.

$$\langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_V = \langle v, w \rangle_V, \quad \text{für alle } g \in G, v, w \in V.$$

Für einen reellen Vektorraum V impliziert dies im $\rho \subset O(n)$. Ist V dagegen komplex, so folgt im $\rho \subset U(n)$.

Nun existiert auf $E = P \times_{\rho} V$ eine Bündelmetrik so, dass für $e_a = [p, v_a]$ für ein beliebiges $p \in P_x$ und $v_a \in V$, $a = 1, 2$ gilt

$$h(x)(e_1, e_2) := \langle v_1, v_2 \rangle_V.$$

Die Bündelmetrik hängt nicht von der Wahl von p ab, denn für ein anderes $q \in P_x$ existiert ein $g \in G$, so dass $q = p \cdot g$ und damit $[q, v_a] = [p, \rho(g)^{-1}v_a]$. Mit der G -Invarianz von $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, folgt nun

$$\langle \rho(g)^{-1}v_1, \rho(g)^{-1}v_2 \rangle_V = \langle v_1, v_2 \rangle_V = h(x)(e_1, e_2).$$

Somit ist h wohldefiniert.

b.) Das vorangegangene Beispiel ist typisch: Ein unter der Darstellung invariantes Objekt auf dem Vektorraum induziert ein Objekt auf dem Bündel. ■

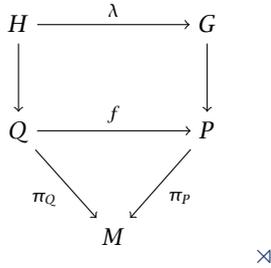
1-G Reduktion der Strukturgruppe

Ein Vektorbündel vom Rang n ist in natürlicher Weise assoziiert zu einem GL_n -Hauptfaserbündel. Ist es außerdem reell bzw. komplex, so ist es zusätzlich assoziiert zu einem O_n - bzw. U_n -Hauptfaserbündel, wobei O_n und U_n Untergruppen der GL_n sind. Dieser Zusammenhang soll nun formalisiert werden.

1.38 **Definition** Sei $\pi_P : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $\lambda : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus von Lie-Gruppen. Eine λ -Reduktion von P ist ein H -Hauptfaserbündel $\pi_Q : Q \rightarrow M$ und eine Abbildung $f : Q \rightarrow P$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) f ist fasertreu, d.h. $\pi_P \circ f = \pi_Q$.

2.) $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h)$ für alle $q \in Q$ und $h \in H$.

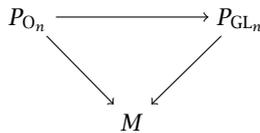


⊗

1.39 *Bemerkung.* Ist $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe und $\lambda = i : H \hookrightarrow G$ die Inklusion, so nennt man die λ -Reduktion auch einfach Reduktion von P auf ein H -Hauptfaserbündel Q . Die Strukturgruppe von P wird also reduziert auf die Untergruppe $H \subset G$. In diesem Fall ist Q sogar ein Unterbündel von P . \rightarrow

BEISPIEL 11 Sei $P_{GL_n} \rightarrow M$ das Rahmenbündel von M .

a.) *Riemannsche Mannigfaltigkeiten.* Eine Riemannsche Metrik g auf M definiert eine Reduktion von P_{GL_n} auf ein P_{O_n} -Hauptfaserbündel, wobei $i : O_n \hookrightarrow GL_n$ eine Lie-Untergruppe ist.



Sei umgekehrt $f : Q = P_{O_n} \rightarrow P_{GL_n}$ eine O_n -Reduktion von P_{GL_n} . Dann definiert (Q, f) wie folgt eine Riemannsche Metrik auf M : Seien $x \in M$ und $q \in Q_x$, dann ist $f(q) = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ eine Basis von $T_x M$. Man definiert die Metrik g nun punktweise durch die Festsetzung

$$g(x)(\nu_i, \nu_j) = \delta_{ij}.$$

Damit ist g wohldefiniert, denn für eine andere Wahl von $\tilde{q} \in P_x$, ist $\tilde{q} = q \cdot g$ und

$$f(\tilde{q}) = f(q \cdot g) = f(q) \cdot g = (\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n),$$

ist eine zu $f(q)$ orthogonal konjugierte Basis von $T_x M$ und erzeugt somit dieselbe Metrik g .

Zusammenfassend existiert genau dann eine Riemannsche Metrik auf M , wenn P_{GL} eine O_n -Reduktion besitzt.

- b.) *Orientierbare Mannigfaltigkeiten.* Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn sich P_{GL_n} auf $P_{GL_n^+}$ reduzieren lässt, wobei

$$GL_n^+ := \{A \in GL_n : \det A > 0\}.$$

Das Hauptfaserbündel $P_{GL_n^+}$ ist gerade die Menge aller Basen in P_{GL_n} mit positiver Orientierung.

Ist (M, g) außerdem eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so ist M genau dann orientierbar, wenn eine Reduktion von P_{GL_n} auf $P_{SO_n} \hookrightarrow P_{O_n} \hookrightarrow P_{GL_n}$ existiert.

- c.) *Riemannsche Produkte.* Sei $M^n = N_1^a \times N_2^b$ mit $a + b = n$, dann ist das Tangentialbündel von M die Whitney-Summe der Tangentialbündel von N_1 und N_2 ,

$$TM = TN_1 \oplus TN_2.$$

Somit reduziert sich P_{GL_n} auf P_G mit

$$G = \begin{pmatrix} GL_a & 0 \\ 0 & GL_b \end{pmatrix}.$$

- d.) *Fastkomplexe Mannigfaltigkeiten.* Eine Mannigfaltigkeit M ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, wenn ihre Karten auf offene Teilmengen des \mathbb{C}^n abbilden und die Kartenwechsel biholomorphe Abbildungen sind. Eine größere Klasse bilden die fastkomplexen Mannigfaltigkeiten, für die ein Endomorphismus $J \in \text{End}(TM)$ existiert mit $J^2 = -\text{Id}$. Durch J_x wird jeder Tangentialraum $T_x M$ zu einem komplexen Vektorraum. Diese Mannigfaltigkeiten haben notwendigerweise gerade Dimension und solch ein J existiert genau dann, wenn das Tangentialbündel TM ein komplexes Vektorbündel ist.

Eine Mannigfaltigkeit M^{2n} ist genau dann fastkomplex, wenn sich $P_{GL_{2n}}$ auf P_G reduziert mit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A, B \in GL_n \right\} \cong GL_n(\mathbb{C}).$$

Ist M^{2n} außerdem Riemannsch, dann ist M genau dann fastkomplex, wenn sich $P_{GL_{2n}}$ auf P_{U_n} reduziert, wobei die unitäre Gruppe U_n als $U_n = O_{2n} \cap G$ zu verstehen ist.

e.) *Spin Strukturen.* Die nichttriviale zweifache Überlagerung der SO_n

$$\lambda : \text{Spin}_n \xrightarrow{2x} \text{SO}(n)$$

ist eine Lie-Gruppe, die sogenannte **Spin-Gruppe** Spin_n . Sie ist zusammenhängend für $n \geq 2$ und einfach zusammenhängend für $n \geq 3$, d.h. $\pi_1(\text{Spin}_n) = 1$. Eine **Spin-Struktur** auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^n, g) ist eine λ -Reduktion von P_{SO_n} auf

$$P_{\text{Spin}_n} \rightarrow P_{\text{SO}_n}.$$

Nicht jede orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit trägt eine solche Struktur. Ihre Existenz ist an topologische Bedingungen geknüpft, die man als Orientierbarkeit 2. Ordnung verstehen kann.

Es gibt Darstellungen von Spin_n die keine Darstellungen von SO_n sind. Mit ihnen lassen sich neue Bündel, sogenannte **Spinor Bündel** definieren. In der Quantenelektrodynamik interpretiert man Elementarteilchen wie das Elektron als Schnitte in diesen Spinor Bündeln.

f.) *Triviales Hauptfaserbündel.* Wie jede Gruppe besitzt die GL_n die triviale Untergruppe $\{e\} \subset G$. Sei $f : Q \rightarrow P$ eine $\{e\}$ -Reduktion von P . Dann ist jede Faser Q_x für $x \in M$ diffeomorph zu $\{e\}$ und folglich

$$Q = \bigcup_{x \in M} Q_x = M \times \{e\} \cong M.$$

Die lokalen Trivialisierungen von Q haben die Form

$$\phi_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \cong U \times \{e\}$$

und somit existiert ein globaler Schnitt von Q

$$\sigma : M \rightarrow Q, \quad x \mapsto \hat{x} = \{x\} \times \{e\}.$$

Durch $s = f \circ \sigma : M \rightarrow P$ ist somit ein globaler Schnitt von P gegeben und folglich ist P trivial.

Existiert umgekehrt ein globaler Schnitt $s : M \rightarrow P$, dann definiert die Abbildung

$$f : Q = M \times \{e\} \rightarrow P, \quad (x, e) \mapsto s(x)$$

eine $\{e\}$ -Reduktion von P , denn $\pi_P \circ f(x, e) = \pi_P \circ s(x) = x = \pi_Q(x, e)$.

Somit ist P genau dann trivial, wenn P eine $\{e\}$ -Reduktion besitzt. ■

1.40 *Bemerkung.* Das Rahmenbündel lässt sich auch auffassen als

$$P_{GL_n} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : f \text{ ist ein linearer Isomorphismus}\},$$

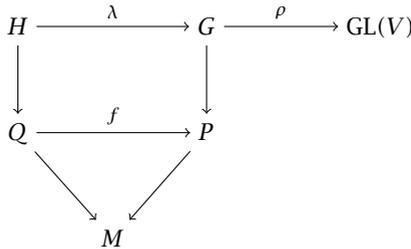
denn eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie Basen von \mathbb{R}^n in Basen von $T_x M$ überführt. Analog dazu betrachtet man auch

$$P_{O_n} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : f \text{ ist Isometrie}\},$$

$$P_{GL_n^+} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M : f \text{ ist orientierbarer Isomorphismus}\}. \quad \rightarrow$$

1.41 **Satz** Sei $\lambda : H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus von Lie-Gruppen, $\rho : G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung von G über einem Vektorraum V und $P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit einer λ -Reduktion (Q, f) . Dann gilt

$$P \times_{\rho} V \cong Q \times_{\rho \circ \lambda} V.$$



×

BEISPIEL 12 Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann besitzt M eine Reduktion $P_{O_n} \hookrightarrow P_{GL_n}$ und es gilt

$$TM = P_{GL_n} \times_{\rho} \mathbb{R}^n \cong P_{O_n} \times_{\rho \circ \lambda} \mathbb{R}^n,$$

mit $\rho = \text{id}$ und $\lambda = i : O_n \hookrightarrow GL_n$. ■

Beweis des Satzes. Wir geben direkt die Abbildung

$$\psi : Q \times_{\rho \circ \lambda} V \rightarrow P \times_{\rho} V, \quad [q, v] \mapsto [f(q), v],$$

an, und weisen im folgenden nach, dass es sich dabei um einen Vektorbündel-Isomorphismus handelt. Sei dazu $x \in M$ fest.

ψ ist wohldefiniert. Sei $\tilde{q} \in Q_x$ eine andere Wahl von q , so existiert ein $h \in H$ mit $\tilde{q} = q \cdot h$ und $[q, \nu] = [q \cdot h, \rho(\lambda(h))^{-1}\nu]$. Folglich ist

$$[f(q \cdot h), \rho(\lambda(h))^{-1}\nu] = [f(q) \cdot \lambda(h), \rho(\lambda(h))^{-1}\nu] = [f(q), \nu] = \psi([q, \nu]).$$

ψ ist linear auf Fasern. Dies ist offensichtlich der Fall, denn

$$\psi(\lambda[q, \nu] + \mu[q, w]) = [f(q), \lambda\nu + \mu w] = \lambda\psi([q, \nu]) + \mu\psi([q, w]),$$

für $q \in Q_x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $\nu, w \in V$.

ψ ist injektiv. Da ψ fasertreu ist, genügt es die Injektivität auf einer Faser zu zeigen. Sei also $\psi([q, \nu]) = \psi([\tilde{q}, \tilde{\nu}])$ für $q, \tilde{q} \in Q_x$ und $\nu, \tilde{\nu} \in V$. Dann ist $\tilde{q} = q \cdot h$ und nach Annahme

$$\psi([q, \nu]) = [f(q), \nu] = [f(\tilde{q}), \rho(\lambda(h))^{-1}\nu] \stackrel{!}{=} [f(\tilde{q}), \tilde{\nu}].$$

Somit ist $\tilde{\nu} = \rho(\lambda(h))^{-1}\nu$ und folglich

$$[q, \nu] = [q \cdot h, \rho(\lambda(h))^{-1}\nu] = [\tilde{q}, \tilde{\nu}].$$

ψ ist surjektiv. Sei $[p, \nu] \in P \times_{\rho} V$ für ein $p \in P_x$. Wähle $q \in Q_x$ beliebig, dann existiert ein $g \in G$, so dass $f(q) = p \cdot g$. Folglich ist

$$\psi([q, \rho(g^{-1})\nu]) = [f(q), \rho(g^{-1})\nu] = [p \cdot g, \rho(g^{-1})\nu] = [p, \nu].$$

Es verbleibt zu zeigen, dass ψ tatsächlich eine glatte Abbildung ist, was in lokalen Trivialisierungen nachzuweisen ist. ■

2 Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln

Im vergangenen Semester haben wir für Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M den vom \mathbb{R}^n wohlbekannten Begriff der Ableitung zum Differential df verallgemeinert. Anschließend haben wir Differentialformen $\omega \in \Omega^k(M)$ betrachtet und auch für diese ein Differential

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

gefunden, das für $k = 0$ mit dem Differential von Funktionen übereinstimmt. Nun haben wir erkannt, dass k -Formen wiederum spezielle Schnitte in einem Vektorbündel sind. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, das Differential auch auf solche Objekte zu verallgemeinern. Dabei spielt der Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel eine zentrale Rolle, denn dieser induziert ein Differential auf allen assoziierten Faserbündeln.

2-A Definitionen und Beispiele

Sei wieder $(P, \pi, M; G)$ ein G -Hauptfaserbündel über einer Mannigfaltigkeit M .

2.1 **Definition** Eine *differenzierbare Distribution Δ vom Rang r* auf einer Mannigfaltigkeit N ist ein Unterbündel von TN vom Rang r . \times

2.2 **Bemerkung.** Äquivalent dazu ist die Definition, dass Δ eine differenzierbare Zuordnung

$$\Delta : N \rightarrow TN, \quad u \mapsto \Delta_u$$

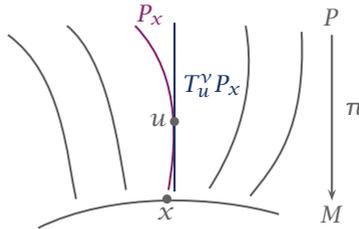
ist, wobei Δ_u einen r -dimensionalen Unterraum von T_uN beschreibt. Die Differenzierbarkeit der Distribution ist hier so zu verstehen, dass Δ lokal durch differenzierbare Vektorfelder aufgespannt wird. \rightarrow

Die Projektion $\pi : P \rightarrow M$ des Hauptfaserbündels ist eine Submersion, d.h. das Differential $d\pi$ ist surjektiv. Aus dem Satz vom regulären Wert folgt nun, dass jede Faser $P_x = \pi^{-1}(x)$ für $x \in M$ eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit von M ist. Insbesondere ist dann $T_u P_x \subset T_u P$ ein Unterraum für alle $u \in P$.

2.3 **Definition** Sei $x \in M$ und $u \in P_x$, dann heißt der Unterraum

$$T_u^\vee P := T_u P_x \subset T_u P$$

vertikaler Tangentialraum an P im Punkt u . \times



2.1 **Zum vertikalen Tangentialraum.**

Die Strukturgruppe G des Hauptfaserbündels ist eine Lie-Gruppe. Ihr Tangentialraum an das Einselement $e \in G$ lässt sich mit den linksinvarianten Vektorfeldern auf G identifizieren,

$$T_e G \cong \mathfrak{g} := \{X \in \Gamma(TG) : l_g^* X = X\}.$$

Wir suchen nun eine ähnliche Identifikation für den vertikalen Tangentialraum.

2.4 **Definition** Wirke eine Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit N . Bezeichne \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G , dann ist das **fundamentale Vektorfeld** zu $X \in \mathfrak{g}$ definiert durch

$$\tilde{X}(u) := \left. \frac{d}{dt} u \cdot \exp(tX) \right|_{t=0}, \quad u \in N,$$

wobei $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ die Exponentialabbildung bezeichnet. \times

2.5 **Satz** Für jedes $u \in P$ gelten:

a) $T_u^\vee P = \ker d\pi_u$.

b) Die Abbildung $\mathfrak{g} \rightarrow T_u^\vee P, X \mapsto \tilde{X}(u)$ ist ein linearer Isomorphismus und insbesondere ist

$$T_u^\vee P = \{ \tilde{X}(u) : X \in \mathfrak{g} \}. \quad \times$$

Beweis. a): Sei $x \in M$ und $u \in P_x$. Zu $X \in T_u^\vee P$ betrachte eine Kurve γ in P_x durch u mit $\dot{\gamma}(0) = X$, dann gilt $\pi \circ \gamma \equiv x$ und folglich

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \pi \circ \gamma(t) \right|_{t=0} = d\pi_u(\dot{\gamma}(0)) = d\pi_u(X).$$

Somit ist $T_u^\vee P \subset \ker d\pi_u$. Sei $U \subset M$ eine Umgebung von x , dann gilt lokal $P_U \cong U \times G$, sowie insbesondere $P_x \cong G$. Folglich ist

$$\dim T_u P = \dim T_x M + \dim T_e G = \dim M + \dim T_u^\vee P.$$

Andererseits ist $\pi : P \rightarrow M$ eine Submersion, also gilt

$$\dim \ker d\pi_u + \dim M = \dim T_u P.$$

Somit ist $\dim \ker d\pi_u = \dim T_u^\vee P$ und daher $\ker d\pi_u = T_u^\vee P$.

b): Sei $x \in M$ und $u \in P_x$. Für $X \in \mathfrak{g}$ ist $u \cdot \exp(tX) \in P_x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und somit ist $\tilde{X}(u) \in T_u^\vee P$. Weiterhin ist die Abbildung

$$f_u : \mathfrak{g} \rightarrow T_u^\vee P, \quad X \mapsto \tilde{X}(u)$$

linear und da $\dim G = \dim T_u^\vee P$ genügt es zu zeigen, dass f_u injektiv ist. Sei also $f_u(X) = \tilde{X}(u) = 0$, dann ist für $t \in \mathbb{R}$

$$\left. \frac{d}{dt} u \cdot \exp(tX) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{ds} u \cdot \exp((t+s)X) \right|_{s=0} = dR_{\exp(tX)}(\tilde{X}(u)) = 0.$$

Folglich ist $u \cdot \exp(tX) \equiv u$ für alle $t \in \mathbb{R}$, jedoch ist die Exponentialabbildung ein lokaler Diffeomorphismus um 0 und folglich $X = 0$. Somit ist f_u injektiv. ■

2.6 Korollar Die Zuordnung

$$T^\vee P : P \rightarrow TP, \quad u \mapsto T_u^\vee P$$

definiert eine rechtsinvariante Distribution auf P . Man nennt $T^\vee P$ das *vertikale Tangentialbündel von P* . \times

Beweis. Sei $u \in P$, dann lässt sich nach dem vorigen Satz der vertikale Tangentialraum schreiben als $T_u^\gamma P = \ker d\pi_u$. Weiterhin lässt sich $\ker d\pi_u$ lokal mit Hilfe von Koordinaten als Spann von glatten Vektorfeldern darstellen. Weiter ist die Dimension von $\ker d\pi_u$ punktweise konstant und folglich ist $T_u^\gamma P$ eine Distribution.

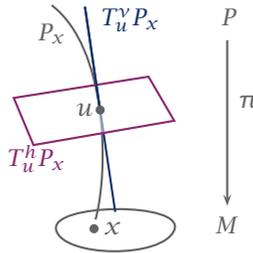
Für die Rechtsinvarianz ist zu zeigen, dass $dR_g T_u^\gamma P = T_{u \cdot g}^\gamma P$ für jedes $g \in G$. Sei also $X \in T_u^\gamma P$ und betrachte eine Kurve γ durch u , die ganz in P_x verläuft mit $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist für $g \in G$,

$$dR_g(X) = \left. \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) \right|_{t=0}, \quad \tilde{\gamma}(t) = R_g \circ \gamma(t),$$

und $\tilde{\gamma}$ ist eine Kurve durch $u \cdot g$, die aufgrund der Fasertreue der G -Wirkung ebenfalls ganz in P_x verläuft, mit $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = dR_g(X)$. Somit ist $dR_g(X) \in T_{u \cdot g}^\gamma P$ und da $dR_g^{-1} = dR_{g^{-1}}$ folgt die Rechtsinvarianz von $T^\gamma P$. ■

2.7 *Bemerkung.* Für jedes $X \in \mathfrak{g}$ ist das fundamentale Vektorfeld $\tilde{X} : P \rightarrow T^\gamma P$ global definiert, glatt und nullstellenfrei. Insbesondere ist das vertikale Tangentialbündel $T^\gamma P$ somit parallelisierbar. \rightarrow

2.8 **Definition** Sei $u \in P$, dann nennt man einen zu $T_u^\gamma P \subset T_u P$ komplementären Unterraum *horizontal*. \times



2.2 **Zum horizontalen und vertikalen Tangentialraum.**

2.9 **Definition** Ein *Zusammenhang* auf dem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist eine rechtsinvariante Distribution bestehend aus horizontalen Tangentialräumen

$$T^h P : P \rightarrow TP, \quad u \mapsto T_u^h P,$$

d.h. T_u^h ist komplementär zu $T_u^\gamma P$ und $dR_g(T_u^h P) = T_{u \cdot g}^h P$ für alle $g \in G$ und $u \in P$. $T^h P$ nennt man *horizontales Tangentialbündel*. \times

- 2.10 *Bemerkungen.* A. Während $T^vP \subset TP$ kanonisch durch π induziert wird, involviert die Definition von $T^hP \subset TP$ die Wahl eines Vektorraumkomplements, welches nicht eindeutig gegeben ist. Insbesondere ist dadurch die Wahl eines Zusammenhangs auf P nicht kanonisch.
- B. Sei $u \in P_x$ für ein $x \in M$, dann ist das Differential der Projektion $d\pi_u : T_u^hP \rightarrow T_xM$ injektiv und somit ein Isomorphismus. \rightarrow

2-B Zusammenhangsformen

Sei N eine Mannigfaltigkeit und $\Omega^k(N)$ bezeichne die Menge der k -Formen auf N mit Werten in \mathbb{R} . Allgemeiner betrachten wir nun für einen reellen Vektorraum V die Menge $\Omega^k(N, V)$ der k -Formen auf N mit Werten in V .

Auf einer Lie-Gruppe G , lässt sich mit der Links- und Rechtsmultiplikation die Konjugation mit einem Gruppenelement $g \in G$ bilden,

$$\alpha_g = L_g \circ R_{g^{-1}}, \quad h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}.$$

Dann ist $\alpha_g(e) = e$ für jedes $g \in G$ und folglich ist das Differential $(d\alpha_g)_e$ ein Isomorphismus. Das Differential heißt **adjungierte Darstellung** von G auf \mathfrak{g} und man schreibt

$$\text{Ad}(g) := (d\alpha_g)_e.$$

- 2.11 **Definition** Eine **Zusammenhangsform** auf einem Hauptfaserbündel $(P, \pi, M; G)$ ist eine 1-Form $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit Werten in \mathfrak{g} und folgenden Eigenschaften:

- 1.) $R_g^*A = \text{Ad}(g^{-1})A$ für alle $g \in G$,
- 2.) $A(\tilde{X}) = X$ für jedes $X \in \mathfrak{g}$.

Unser Ziel ist es nun eine bijektive Beziehung zwischen Zusammenhangsformen und Zusammenhängen zu beschreiben. Dafür benötigen wir noch folgendes

- 2.12 **Lemma** Sei $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g}$, dann gilt

$$dR_g(\tilde{X}) = \text{Ad}(\widetilde{g^{-1}})X. \quad \times$$

Beweis. Sei $u \in P_x$ für $x \in M$, dann rechnet man direkt nach

$$\begin{aligned} dR_g(\tilde{X})(u) &= (dR_g)_{ug^{-1}}(\tilde{X}(ug^{-1})) = (dR_g)_{ug^{-1}} \left(\left. \frac{d}{dt} ug^{-1} \cdot \exp(tX) \right|_{t=0} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} ug^{-1} \cdot \exp(tX) \cdot g \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} u \cdot \alpha_g \circ \exp(tX) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} u \cdot \exp(t\text{Ad}(g^{-1}X)) \right|_{t=0} = \text{Ad}(\widetilde{g^{-1}})X(u). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.13 **Satz** *Zusammenhänge und Zusammenhangsformen auf einem G -Hauptfaserbündel $\pi : P \rightarrow M$ stehen in bijektiver Beziehung zueinander:*

a) Sei $T^hP : P \rightarrow TP$, $u \mapsto T_u^hP$ ein Zusammenhang auf P , dann wird durch

$$A_u(\tilde{X}(u) + Y_h) = X,$$

für $u \in P$, $X \in \mathfrak{g}$ und $Y_h \in T_u^hP$ eine Zusammenhangsform auf P definiert.

b) Sei $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform auf P , dann wird durch

$$T^hP : P \rightarrow TP, \quad u \mapsto T_u^hP := \ker A_u$$

ein Zusammenhang auf P definiert. \times

Beweis. a): Wir überprüfen die Bedingungen für Zusammenhangsformen nach Definition 2.11. Für jedes $X \in \mathfrak{g}$ und $u \in P$ ist nach Definition

$$A(\tilde{X}(u)) = A(\tilde{X}(u) + Y_h) = X,$$

indem man $Y_h = 0$ setzt. Sei nun Y_h horizontal in u , dann ist nach Voraussetzung für jedes $g \in G$, $dR_g(Y_h)$ horizontal in $u \cdot g$. Somit ist nach dem vorigen Lemma,

$$\begin{aligned} R_g^*A(\tilde{X}(u) + Y_h) &= A(dR_g(\tilde{X}(u)) + dR_g(Y_h)) = A(\text{Ad}(\widetilde{g^{-1}})X(u \cdot g) + dR_g(Y_h)) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})X = \text{Ad}(g^{-1})A(\tilde{X}(u) + Y_h). \end{aligned}$$

Somit ist $R_g^*A = \text{Ad}(g^{-1})A$.

b): Es ist zu zeigen, dass $\ker A$ eine horizontale, rechtsinvariante, differenzierbare Distribution auf P ist.

$\ker A$ ist horizontal. Sei $u \in P$ und $Y \in \ker A_u \cap T_u^vP$. Dann ist insbesondere $Y \in T_u^vP$ und lässt sich folglich schreiben als $Y = \tilde{Y}(u)$. Somit gilt

$$0 = A_u(Y) = A(\tilde{Y})(u) = Y.$$

Daher sind A_u und $T_u^\vee P$ tatsächlich disjunkt. Weiterhin ist $A_u : T_u^\vee P \rightarrow \mathfrak{g}$ nach der Formel $A(\tilde{X}) = X$ surjektiv und folglich

$$\dim \ker A_u = \dim T_u P - \dim \mathfrak{g} = \dim T_u P - \dim T_u^\vee P.$$

Also ist $T_u P = \ker A_u \oplus T_u^\vee P$ und \ker_u ist horizontal.

$\ker A$ ist *rechtsinvariant*. Es ist zu zeigen, dass $dR_g(\ker A_u) = \ker A_{u \cdot g}$ für jedes $g \in G$. Sei also $Y \in \ker A_u$, so verifiziert man sofort, dass

$$A_{ug}(dR_g(Y)) = (R_g^* A)_u(Y) = \text{Ad}(g^{-1})A_u(Y) = 0,$$

also ist $\ker A_u \subset \ker A_{u \cdot g}$. Weiterhin ist $\ker A_u$ horizontal, also folgt mit der Dimensionsformel, dass $\dim \ker A_u = \dim \ker A_{u \cdot g}$ und folglich gilt $\ker A_u = \ker A_{u \cdot g} = dR_g \ker A_u$.

$\ker A$ ist *differenzierbar*. Sei (W, x_1, \dots, x_n) eine Karte um $u \in P$, (e_1, \dots, e_r) eine Basis von \mathfrak{g} und $Y \in T_u P$. In lokalen Koordinaten schreibt sich nun

$$Y = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}(u), \quad \xi_i \in \mathbb{R},$$

sowie analog

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^r A_{ij} e_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

mit glatten Funktionen A_{ij} . Dann ist $Y \in \ker A_u$ genau dann, wenn

$$A_u(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r \xi_i A_{ji}(u) e_j = 0.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für ξ_i und da die A_{ji} glatt sind, hängt die Lösung ebenfalls glatt von u ab. Also wird $\ker A$ lokal durch glatte Vektorfelder aufgespannt. ■

BEISPIEL 13 *Der kanonisch flache Zusammenhang.* Wir betrachten das triviale G -Hauptfaserbündel $(P = M \times G, \text{pr}_1, M; G)$ über einer Mannigfaltigkeit M . An einem Punkt $p = (x, g) \in P$ ist der vertikale Tangentialraum gegeben durch

$$T_{(x,g)}^\vee P = T_{(x,g)}(\{x\} \times G) \cong T_g G,$$

Die G -Wirkung auf P ist einfach durch die Multiplikation in der zweiten Komponente gegeben,

$$(x, g) \cdot h = (x, g \cdot h), \quad (x, g) \in P, \quad h \in G.$$

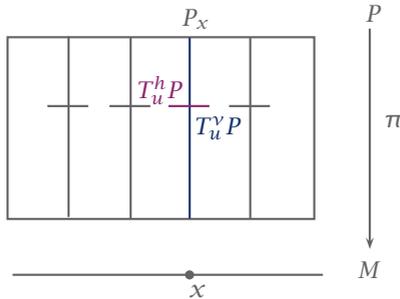
Somit berechnet sich das fundamentale Vektorfeld für ein $Y \in \mathfrak{g}$ zu

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(x, g) &= \left. \frac{d}{dt} (x, g) \cdot \exp(tY) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (x, g \cdot \exp(tY)) \right|_{t=0} \\ &= (0, dL_g(Y)) \in T_x M \oplus T_g G \cong T_{(x, g)} P. \end{aligned}$$

Wählt man als horizontalen Tangentialraum den zu $T_{(x, g)}^\vee P = T_{(x, g)}(\{x\} \times G)$ komplementären Tangentialraum

$$T_{(x, g)}^h P := T_{(x, g)}(M \times \{g\}) \cong T_x M,$$

erhält man einen Zusammenhang auf P , den sogenannten **kanonischen flachen Zusammenhang**. ■



2.3 Zum kanonischen Zusammenhang.

Nach Satz 2.13 induziert der kanonische flache Zusammenhang eine Zusammenhangsform. Diese wollen wir nun genauer untersuchen.

2.14 **Definition** Sei $\mu_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ die durch

$$(\mu_G)_g(X) := dL_{g^{-1}}(X), \quad g \in G, \quad X \in T_g G,$$

definierte 1-Form auf G mit Werten in \mathfrak{g} . Sie heißt **kanonische 1-Form** oder auch **Maurer-Cartan-Form** von G . ✕

2.15 **Lemma** Die Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ des kanonischen flachen Zusammenhangs ist gegeben durch

$$A_{(x,g)} : T_x M \oplus T_g G \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (X, Y) \mapsto \mu_G(Y). \quad \times$$

Beweis. Nach Satz 2.13 existiert eine Zusammenhangsform auf $P = M \times G$ und ist gegeben durch

$$A_{(x,g)}(\tilde{Z}(x, g) + X_h) = Z,$$

für alle $Z \in \mathfrak{g}$ und $X_h \in T_{(x,g)}^h P \cong T_x M$. Für das fundamentale Vektorfeld berechnet sich zu gegebenem $X \in T_g G \cong T_{(x,g)}^v P$ eine Lösung der Gleichung

$$\tilde{Z}(x, g) = dL_g(Z) \stackrel{!}{=} X$$

zu $Z = dL_{g^{-1}}(X) \in \mathfrak{g}$. Somit ist

$$A_{(x,g)}(X + Y_h) = A_{(x,g)}(\tilde{Z}(x, g) + Y_h) = Z = \mu_G(X). \quad \blacksquare$$

2-C Existenz von Zusammenhängen

Für das triviale G -Hauptfaserbündel konnten wir nun konkret einen Zusammenhang angeben und seine Zusammenhangsform mit Hilfe der Maurer-Cartan-Form von G beschreiben. Ob ein allgemeines Hauptfaserbündel überhaupt einen Zusammenhang besitzt, haben wir noch nicht geklärt. Jedoch ist jedes Hauptfaserbündel lokal trivial. Dies wollen wir nun ausnutzen, um lokal auf dem Hauptfaserbündel einen Zusammenhang zu definieren und diesen dann mit der Zerlegung der Eins zu einem Zusammenhang auf dem ganzen Hauptfaserbündel zu verkleben.

2.16 **Satz** Auf jedem Hauptfaserbündel existiert ein Zusammenhang. \times

Beweis. Sei $(P, \pi, M; G)$ ein beliebiges G -Hauptfaserbündel und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M , so dass P über $\{U_i\}$ trivial ist, d.h.

$$P_{U_i} = \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times G.$$

Weiterhin sei $\{f_i\}$ eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Da P_{U_i} trivial ist, existiert ein kanonisch flacher Zusammenhang auf P_{U_i} mit Zusammenhangsform $A_i \in \Omega^1(P_{U_i}, \mathfrak{g})$. Wir definieren nun eine 1-Form $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ durch

$$A := \sum_i (f_i \circ \pi) A_i.$$

Da die f_i lokal endlich sind, ist A wohldefiniert. Sei nun $X \in \mathfrak{g}$ und $p \in P$, dann gilt

$$A(\tilde{X}(p)) = \sum_i (f_i \circ \pi)(p) \cdot A_i(\tilde{X}(p)) = \sum_i (f_i \circ \pi)(p) \cdot X = X,$$

denn $\sum_i f_i \circ \pi(p) = 1$. Sei weiter $Y \in T_p P$ und $g \in G$, dann ist

$$\begin{aligned} (R_g^* A)_p(Y) &= A_{p \cdot g}(dR_g(Y)) = \sum_i f_i \circ \pi(p \cdot g) A_{i,p \cdot g}(dR_g(Y)) \\ &= \sum_i f_i \circ \pi(p \cdot g) \text{Ad}(g^{-1}) A_{i,p}(Y) \\ &= \text{Ad}(g^{-1}) \sum_i f_i \circ \pi(p) A_{i,p}(Y) \\ &= \text{Ad}(g^{-1}) A_p(Y), \end{aligned}$$

denn $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$. Somit ist A eine Zusammenhangsform auf P . ■

BEISPIEL 14 *Ein Zusammenhang auf dem Hopfbündel.* Wir betrachten die Hopf-Faserung

$$(S^3, \pi, \mathbb{C}P^1; S^1), \quad \mathbb{C}P^1 \cong S^2,$$

mit Strukturgruppe $G = S^1 \cong U(1) = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ und Lie-Algebra $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$. Die 3-Sphäre schreiben wir als

$$S^3 = \{(w_1, w_2) : |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2,$$

so dass ihr Tangentialraum im Punkt $p = (w_1, w_2) \in S^3$ beschrieben ist durch

$$T_{(w_1, w_2)} S^3 \subset T_{(w_1, w_2)} \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^2.$$

Seien nun $d\omega_j$ und $d\bar{w}_j$ die durch

$$d\omega_j(X_1, X_2) = X_j, \quad d\bar{w}_j(X_1, X_2) = \bar{X}_j,$$

definierten 1-Formen auf S^3 und $A : TS^3 \rightarrow i\mathbb{R}$ die 1-Form

$$A_{(w_1, w_2)} := \frac{1}{2} (\bar{w}_1 d\omega_1 - w_1 d\bar{w}_1 + \bar{w}_2 d\omega_2 - w_2 d\bar{w}_2).$$

Dann ist $\overline{A_{(w_1, w_2)}} = -A_{(w_1, w_2)}$ und folglich nimmt A Werte in $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ an. Wir zeigen nun, dass A eine Zusammenhangsform auf dem Hopfbündel definiert.

Zunächst bemerken wir, dass die Strukturgruppe $U(1)$ abelsch und folglich die Konjugation trivial ist, denn für $g, h \in U(1)$ ist $\alpha_g(h) = ghg^{-1} = h$, also $\alpha_g = \text{id}$ und $\text{Ad}(g) = \text{Id}$. Sei nun $X \in T_{(w_1, w_2)}S^3$ und y_1 und y_2 Kurven in \mathbb{C} durch w_1 bzw. w_2 mit $|y_1|^2 + |y_2|^2 = 1$ und

$$X = \frac{d}{dt}(y_1(t), y_2(t)) \Big|_{t=0} = (\dot{y}_1(0), \dot{y}_2(0)) = (X_1, X_2).$$

Für ein $z \in U(1)$ gilt dann

$$dR_z(X) = \frac{d}{dt}(y_1(t)z, y_2(t)z) \Big|_{t=0} = (\dot{y}_1(0)z, \dot{y}_2(0)z) = (X_1z, X_2z).$$

Somit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (R_z^*A)_{(w_1, w_2)}(X) &= A_{(w_1z, w_2z)}(dR_z(X)) = A_{(w_1z, w_2z)}(X_1z, X_2z) \\ &= \frac{1}{2} (\overline{w_1z}X_1z - w_1z\overline{X_1z} + \overline{w_2z}X_2z - w_2z\overline{X_2z}) \\ &= \frac{1}{2} (\overline{w_1}X_1 - w_1\overline{X_1} + \overline{w_2}X_2 - w_2\overline{X_2}) \\ &= A_{(w_1, w_2)}(X_1, X_2) = A_{(w_1, w_2)}(X), \end{aligned}$$

denn $1 = |z|^2 = z\bar{z}$.

Sei weiter $ix \in \mathfrak{g} = i\mathbb{R}$, dann rechnet man direkt nach, dass

$$\begin{aligned} A_{(w_1, w_2)}(\widetilde{ix}(w_1, w_2)) &= A_{(w_1, w_2)}(w_1ix, w_2ix) \\ &= \frac{1}{2} (\overline{w_1}w_1ix - w_1\overline{w_1}ix + \overline{w_2}w_2ix - w_2\overline{w_2}ix) \\ &= \frac{1}{2} i ((|w_1|^2 + |w_2|^2)x + (|w_1|^2 + |w_2|^2)x) \\ &= ix. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2-D Lokale Zusammenhangsformen

Es ist ein wichtiges Hilfsmittel der Differentialgeometrie globale Objekte in lokale Objekte zu zerlegen, die eine gewisse „Verklebungsvorschrift“ erfüllen, und umgekehrt aus diesen lokalen Objekten mit Hilfe der Verklebungsvorschrift die globalen Objekte wiederzugewinnen. So haben wir beispielsweise bereits gezeigt, dass ein G -Hauptfaserbündel eindeutig durch einen Bündelatlas (U_i, ϕ_i) und den G -Kozyklen g_{ij} als Verklebungsvorschrift bestimmt ist. Wir suchen nun eine analoge Zerlegung und Verklebungsvorschrift für den Zusammenhang auf einem G -Hauptfaserbündel.

Sei wieder $(P, \pi, M; G)$ ein G -Hauptfaserbündel. Zunächst beweisen wir ein nützliches Lemma um die Ableitung eines Produktes einer Kurve im Hauptfaserbündel und einer Kurve in der Lie-Gruppe G berechnen zu können.

- 2.17 **Produktformel** Gegeben sei eine Mannigfaltigkeit P auf der eine Lie-Gruppe G von rechts wirkt. Sei $p(t)$ eine Kurve in P mit $p(0) = p$ und $g(t)$ eine Kurve in G mit $g(0) = g$ und $z(t) = p(t) \cdot g(t)$ ihr Produkt. Dann gilt

$$\dot{z}(0) = dR_g(\dot{p}(0)) + \mu_G(\widetilde{g(0)})(p \cdot g). \quad \times$$

Beweis. Wir bezeichnen die glatte G -Wirkung auf P mit

$$\phi : P \times G \rightarrow P, \quad (p, g) \mapsto p \cdot g,$$

und für $p \in P$ und $g \in G$ die Multiplikationen mit

$$R_g : P \rightarrow P, \quad p \mapsto p \cdot g, \quad \varphi_p : G \rightarrow P, \quad g \mapsto p \cdot g.$$

Die Ableitung der Kurve z berechnet sich nun zu

$$\begin{aligned} \dot{z}(0) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(p(t), g(t)) = d\phi_{(p,g)}(\dot{p}(0), \dot{g}(0)) \\ &= d\phi_{(p,g)}(\dot{p}(0), 0) + d\phi_{(p,g)}(0, \dot{g}(0)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(p(t), g) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(p, g(t)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} R_g(p(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_p(g(t)) \\ &= dR_g(\dot{p}(0)) + d\varphi_p(\dot{g}(0)). \end{aligned}$$

Beachtet man, dass $\exp(dL_{g^{-1}} \cdot) = L_{g^{-1}} \circ \exp(\cdot)$, folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mu_G(\widetilde{g(0)})(p \cdot g) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} p \cdot g \exp(s\mu_G(\dot{g}(0))) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_p(\exp(s\dot{g}(0))) \\ &= d\varphi_p(\dot{g}(0)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 2.18 **Definition** Sei $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform auf P , $U \subset M$ eine offene Umgebung und $s : U \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt von P . Die lokale 1-Form

$$A^s := s^* A = A \circ ds \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$$

heißt die *durch s definierte lokale Zusammenhangsform auf U* . \times

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die lokale Zusammenhangsform A^s verändert, wenn man den lokalen Schnitt s durch einen anderen lokalen Schnitt ersetzt. Seien also $U_i, U_j \subset M$ offene Umgebung mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ und $s_i : U_i \rightarrow P$ und $s_j : U_j \rightarrow P$ lokale Schnitte. Dann existiert eine Abbildung

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G,$$

so dass sich die lokalen Schnitte durch Translation mit der Abbildung g_{ij} ineinander überführen lassen

$$s_i(x) = s_j(x) \cdot g_{ij}(x), \quad x \in U_i \cap U_j.$$

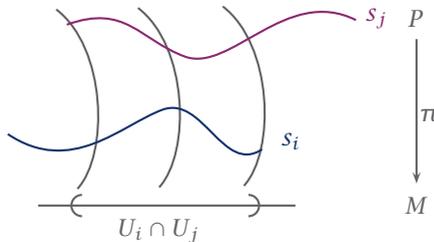
Wir definieren nun die zurückgezogene kanonische 1-Form als

$$\mu_{ij} = g_{ij}^* \mu_G \in \Omega^1(U_i \cap U_j, \mathfrak{g}),$$

d.h. für einen Tangentialvektor $X \in T_x(U_i \cap U_j)$ an einen Punkt $x \in U_i \cap U_j$ ist

$$\mu_{ij}(X) = \mu_G(dg_{ij}(X)).$$

Nach dieser Vorbereitung können wir nun formulieren, wie sich A^s beim Übergang zu einem anderen lokalen Schnitt verhält. Mehr noch, denn wir gewinnen eine Verklebungsvorschrift für die lokalen 1-Formen A^s mit deren Hilfe man die Zusammenhangsform auf dem Hauptfaserbündel aus den lokalen Zusammenhangsformen wiedergewinnen kann.



2.4 Zwei Schnitte in einem Hauptfaserbündel.

2.19 **Satz** a) Sei $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ eine Zusammenhangsform und (s_i, U_i) und (s_j, U_j) lokale Schnitte mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Dann gilt

$$A^{s_i} = \text{Ad}(g_{ij}^{-1}) \circ A^{s_j} + \mu_{ij}.$$

b) Ist umgekehrt eine Überdeckung von P durch lokale Schnitte (s_i, U_i) gegeben sowie eine Familie von 1-Formen $A_i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g})$, so dass auf $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gilt

$$A_i = \text{Ad}(g_{ij}^{-1}) \circ A_j + \mu_{ij}, \quad (*)$$

dann existiert eine Zusammenhangsform A auf P mit $A^{s_i} = A_i$ für alle lokalen Schnitte s_i . \times

2.20 Spezialfälle. A. Sei die Strukturgruppe $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{K})$ eine Matrizen­gruppe, dann ist die Gruppenwirkung auf dem Hauptfaserbündel linear und für alle $g \in G$ und $X \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ gilt

$$dL_g(X) = g \cdot X, \quad \text{Ad}(g)X = gXg^{-1}.$$

Die (*)-Bedingung übersetzt sich somit zu

$$A_i = g_{ij}^{-1} A_j g_{ij} + g_{ij}^{-1} dg_{ij}.$$

B. Ist P trivial, dann existiert ein globaler Schnitt $s : M \rightarrow P$ und die Zusammenhangsform auf ganz P ist bereits durch $A^s \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ gegeben. \circ

Beweis des Satzes. a): Sei $x \in U_i$, dann ist für $X \in T_x M$ die lokale Zusammenhangsform auf U_i definiert durch

$$A^{s_i}(X) := (s_i^* A)(X) = A(ds_i(X)).$$

Weiterhin lässt sich s_j auf $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ mit Hilfe der Kozyklen g_{ij} in s_i überführen

$$s_i = s_j \cdot g_{ij}.$$

Um ds_i über ds_j auszudrücken, betrachte eine Kurve $y(t)$ in M mit $y(0) = x$ und $\dot{y}(0) = X$, dann ist nach dem Produktformel für Kurven

$$\begin{aligned} ds_i(X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_i \circ y(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} s_j \circ y(t) \cdot g_{ij} \circ y(t) \\ &= dR_{g_{ij}(x)} ds_j(X) + \mu_G(\widetilde{dg_{ij}}(X))(s_j(x) \cdot g_{ij}(x)) \\ &= dR_{g_{ij}(x)} ds_j(X) + \widetilde{\mu_{ij}}(X)(s_i(x)). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir schließlich aus den Rechenregeln für Zusammenhangsformen,

$$\begin{aligned} A^{s_i}(X) &= A(ds_i(X)) = A(dR_{g_{ij}(x)}ds_j(x) + \widetilde{\mu_{ij}(X)}(s_i(x))) \\ &= R_{g_{ij}(x)}^*A(ds_j(X)) + A(\widetilde{\mu_{ij}(X)}(s_i(x))) \\ &= \text{Ad}(g_{ij}^{-1}(x))A^{s_j}(X) + \mu_{ij}(X). \end{aligned}$$

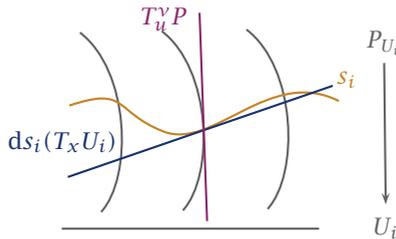
b): Sei also eine Überdeckung von P durch Schnitte (s_i, U_i) gegeben sowie eine Familie von 1-Formen $A_i \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g})$, so dass (*) erfüllt ist. Wir konstruieren zunächst mit den A_i Zusammenhangsformen auf $P_{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$.

Sei dazu $x \in U_i$ und $u = s_i(x)$. Dann ist $P_{U_i} \cong U_i \times G$ über den Diffeomorphismus

$$U_i \times G \rightarrow P_{U_i}, \quad (x, g) \mapsto s_i(x) \cdot g.$$

Somit ist $T_x U_i$ komplementär zu $T_g G \cong T_u^v P_{U_i}$, d.h.

$$T_u P_{U_i} = T_u^v P_{U_i} \oplus ds_i(T_x U_i).$$



2.5 Tangentialvektoren an den Schnitt sind horizontal.

Für festes $u = s_i(x) \in P_{U_i}$ definieren wir nun eine 1-Form $A_u : T_u P_{U_i} \rightarrow \mathfrak{g}$ durch

$$A_u(\tilde{Y}(u) + ds_i(X)) = Y + A_i(X), \quad Y \in \mathfrak{g}, \quad X \in T_x U_i,$$

und setzen diese auf die Faser P_x fort durch die Vorschrift

$$A_{gu} = \text{Ad}(g^{-1}) \circ A_u \circ dR_{g^{-1}}, \quad g \in G.$$

Dann ist A eine Zusammenhangsform auf P_x , denn nach Lemma 2.12 gilt

$$\begin{aligned} A_{ug}(\tilde{Y}(ug)) &= \text{Ad}(g^{-1})A_u(dR_{g^{-1}}(\tilde{Y}(ug))) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})(A_u(\widetilde{\text{Ad}(g)}Y(u))) \\ &= \text{Ad}(g^{-1})\text{Ad}(g)Y = Y. \end{aligned}$$

Weiterhin ist für $a \in G$ und $Z \in T_{ug}P$,

$$\begin{aligned} (R_a^*A)_{ug}(Z) &= A_{uga}(\mathrm{d}R_a(Z)) = \mathrm{Ad}((ga)^{-1})A_u(\mathrm{d}R_{(ga)^{-1}}\mathrm{d}R_a(Z)) \\ &= \mathrm{Ad}(a^{-1})\mathrm{Ad}(g^{-1})A_u(\mathrm{d}R_{g^{-1}}(Z)) = \mathrm{Ad}(a^{-1})A_{ug}(Z). \end{aligned}$$

Für jedes $x \in U_i$ erhalten wir somit eine Zusammenhangsform auf der Faser P_x und somit eine lokale Zusammenhangsform auf P_{U_i} .

Damit durch diese Konstruktion eine Zusammenhangsform auf ganz P gegeben ist, müssen zwei Zusammenhangsformen A und \hat{A} , die auf U_i bzw. U_j definiert sind, auf dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ übereinstimmen. Auf vertikalen Vektoren gilt bereits

$$A_u(\tilde{X}(u)) = X = \hat{A}_u(\tilde{X}(u)), \quad u \in P_{U_i} \cap P_{U_j}.$$

Weiterhin ist die Summe $T_uP_{U_i} = \mathrm{d}s_i(T_xU_i) \oplus T_u^\vee P$ direkt, es genügt daher zu zeigen, dass A und \hat{A} auch auf dem Bild von $\mathrm{d}s_i$ übereinstimmen. Sei also $X \in T_xM$ für ein $x \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ mit $u = s_j(x)$, dann gilt nach obiger Rechnung

$$\begin{aligned} \hat{A}_{ug_{ij}(x)}(\mathrm{d}s_i(X)) &= \hat{A}_{ug_{ij}(x)}(\mathrm{d}R_{g_{ij}(x)}\mathrm{d}s_j(X) + \widetilde{\mu_{ij}(X)}(s_i(x))) \\ &= \mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1}(x))\hat{A}_u(\mathrm{d}s_j(X)) + \mu_{ij}(X) \\ &= \mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1}(x))A_j(X) + \mu_{ij}(X) \\ &= A_i(X) = A_u(\mathrm{d}s_i(X)). \end{aligned}$$

Die lokal auf P_{U_i} definierten Zusammenhangsformen können also zu einer global auf P definierten Zusammenhangsform verklebt werden. ■

2-E Zusammenhänge und kovariante Ableitungen

Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist das Rahmenbündel $\mathrm{GL}(M)$ über M ein GL_n -Hauptfaserbündel und trägt somit einen Zusammenhang. Ist M beispielsweise eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann trägt das Tangentialbündel TM eine kovariante Ableitung ∇ , den Levi-Civita-Zusammenhang. Nun ist das Tangentialbündel außerdem ein zu $\mathrm{GL}(M)$ assoziiertes Vektorbündel und es stellt sich die Frage, in welcher Beziehung Zusammenhänge auf $\mathrm{GL}(M)$ und kovariante Ableitungen auf TM stehen.

2.21 Satz *Es gibt eine bijektive Beziehung zwischen kovarianten Ableitungen auf TM und Zusammenhängen auf $\mathrm{GL}(M)$.*

$$\nabla \text{ kovariante Ableitung auf } TM \rightsquigarrow A \text{ Zusammenhangsform auf } \mathrm{GL}(M). \quad \times$$

Beweis. \rightsquigarrow : Sei $A : TGL(M) \rightarrow \mathfrak{gl}(n)$ eine Zusammenhangsform auf $GL(M)$. Die Standard-Einheitsmatrizen E_{ij} , die eine 1 in der i -ten Zeile und j -ten Spalte haben und sonst nur aus der Null bestehen, bilden eine Basis von $\mathfrak{gl}(n)$. Somit lässt sich A schreiben als

$$A = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij} E_{ij},$$

mit 1-Formen $\omega_{ij} : TGL(M) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei nun

$$s = (s_1, \dots, s_n) : U \rightarrow GL(M)$$

ein lokaler Schnitt in $GL(M)$, dann bilden die Vektorfelder s_1, \dots, s_n in jedem Punkt eine Basis von TM . Wir definieren nun lokal eine kovariante Ableitung auf TU durch

$$\nabla_X s_k := \sum_{i=1}^n \omega_{ik}^s(X) s_i := \sum_{i=1}^n \omega_{ik}(ds(X)) s_i, \quad 1 \leq k \leq n,$$

setzen diese linear auf ganz TU fort und verlangen für $f \in C^\infty(M)$, dass

$$\nabla_X (f s_k) = df(X) s_k + f \nabla_X s_k.$$

Dann ist ∇ tatsächlich eine kovariante Ableitung auf TU , die eventuell noch von der Wahl der s_1, \dots, s_n abhängt. Man zeigt nun, dass für einen anderen Schnitt s' gilt

$$(\nabla_X Y)_s = (\nabla_X Y)_{s'}, \quad X, Y \in \chi(U).$$

Dazu schreibt man $Y = \sum_{k=1}^n \gamma_k s_k = \sum_{l=1}^n \gamma'_l s'_l$ und überprüft

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)_s &= \sum_{k=1}^n \nabla_X \gamma_k s_k = \sum_{k=1}^n (d\gamma_k(X) s_k + \gamma_k \nabla_X s_k) \\ &= \sum_{k=1}^n d\gamma_k(X) s_k + \sum_{i,k=1}^n \gamma_k \omega_{ik}^s s_i. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$(\nabla_X Y)_{s'} = \sum_{l=1}^n d\gamma'_l(X) s'_l + \sum_{j,l=1}^n \gamma'_l \omega'_{jl} s'_j.$$

Verwendet man nun

$$s_k(x) = \sum_{i=1}^n s'_j(x) g_{jk}(x), \quad \gamma_k = \sum_{k,l=1}^n \gamma'_l (g^{-1})_{kl},$$

sowie dass für lineare Strukturgruppen

$$A^s = g^{-1}A^{s'}g + g^{-1}dg,$$

erhält man nach einer längeren Rechnung $(\nabla_X Y)_s = (\nabla_X Y)_{s'}$.

~: Sei nun eine kovariante Ableitung auf TM gegeben, dann erhält man zu einem lokalen Schnitt $s : U \rightarrow GL(M)$ analog zu obiger Definition die 1-Formen ω_{ik} . Diese setzt man nun zu einer lokalen 1-Formen auf U zusammen und verifiziert, dass es sich um eine lokale Zusammenhangsform handelt. Anschließend verklebt man diese lokalen Formen zu einer globalen Form auf $TGL(M)$. ■

2.22 *Bemerkungen.* A. Auf dem Tangentialbündel jeder Mannigfaltigkeit existiert eine kovariante Ableitung.

B. Sei ∇ ein metrischer Zusammenhang auf dem Tangentialbündel, d.h. für $X, Y, Z \in \chi(M)$ gilt

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Dann ist die Metrik parallel und ∇ induziert auf dem Rahmenbündel eine Zusammenhangsform

$$A = \sum_{i,j=1}^n \omega_{ij}E_{ij},$$

mit $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

C. Obiges Konstruktionsschema funktioniert allgemein. Eine Zusammenhangsform A auf dem Hauptfaserbündel induziert in analoger Weise eine kovariante Ableitung auf allen assoziierten Faserbündeln.

Umgekehrt induziert eine kovariante Ableitung auf einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ eine Zusammenhangsform auf dem Rahmenbündel über E . ~

BEISPIEL 15 *Linksinvariante Zusammenhänge auf reductiven homogenen Räumen.* Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist H ebenfalls eine Lie-Gruppe und wirkt durch die Multiplikation in natürlicher Weise von rechts auf G . Der Quotient $M = G/H$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, ein sogenannter **homogener Raum** und $(G, \pi, M; H)$ ist ein H -Hauptfaserbündel.

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{g \cdot h} & G \\
 & & \downarrow \pi \\
 & & M
 \end{array}$$

Man nennt M **reduktiv**, falls es eine Vektorraumzerlegung gibt, so dass

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \text{und} \quad \text{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}.$$

Aus Dimensionsgründen folgt dann sogar $\text{Ad}(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Sei nun M reduktiv, also $T_e G = \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, dann ist $T_g G = dL_g(\mathfrak{g}) \oplus dL_g(\mathfrak{m})$. Betrachte zu $X \in \mathfrak{h}$, das fundamentale Vektorfeld \tilde{X} in G , dann ist für $g \in G$

$$\tilde{X}(g) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot \exp(tX) = dL_g(X).$$

Also ist der vertikale Tangentialraum an einen Punkt $g \in G$ durch Linkstranslation von \mathfrak{h} gegeben, $T_g^\vee G = \{\tilde{X}(g) : X \in \mathfrak{h}\} = dL_g(\mathfrak{h})$. Wir definieren nun

$$T^h : G \rightarrow TG, \quad g \mapsto T_g^h G = dL_g(\mathfrak{m}),$$

dann ist T^h offenbar linksinvariant, denn

$$dL_a(T_g^h G) = dL_{ag}(\mathfrak{m}) = T_{ag}^h G.$$

Außerdem ist $dL_g(\mathfrak{m})$ komplementär zu $T_g^\vee G = dL_g(\mathfrak{h})$ und rechtsinvariant, denn

$$\begin{aligned}
 dR_a(T_g^h G) &= dR_a dL_g(\mathfrak{h}) = dL_g dR_a(\mathfrak{h}) = dL_g dL_a dL_{a^{-1}} dR_a(\mathfrak{h}) \\
 &= dL_{ga} \text{Ad}(a^{-1})(\mathfrak{h}) = dL_{ga} \mathfrak{h}.
 \end{aligned}$$

Somit ist durch die obige Definition von T^h tatsächlich ein horizontales Tangentialbündel an G gegeben. Die zugehörige Zusammenhangsform lässt sich als Projektion der Maurer-Cartan Form schreiben

$$A = \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \mu_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{h}),$$

denn sei $X \in \mathfrak{h}$ und $Y_h \in T_g^h G$, dann gilt nach Definition der Zusammenhangsform

$$A(\tilde{X}(g) + Y_h) = X.$$

Andererseits ist $dL_{g^{-1}}(Y_h) \in \mathfrak{m}$ und damit gilt auch

$$\begin{aligned}
 \text{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \mu_G(\tilde{X}(g) + Y_h) &= \text{pr}_{\mathfrak{h}}(\mu_G(dL_g(X) + Y_h)) = \text{pr}_{\mathfrak{h}}(dL_{g^{-1}} dL_g(X) + dL_{g^{-1}}(Y)) \\
 &= \text{pr}_{\mathfrak{h}}(X) + \text{pr}_{\mathfrak{h}}(dL_{g^{-1}}(Y)) = X. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3 Das Differential eines Zusammenhangs

3-A Differentialformen mit Werten in Vektorbündeln

Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über M .

3.1 **Definition** Eine k -Form ω auf M mit Werten in E ist eine differenzierbare Zuordnung

$$x \in M \mapsto \omega_x, \quad \omega_x : T_x M \times T_x M \rightarrow E_x,$$

mit ω_x multilinear und alternierend. Differenzierbar heißt, dass für $U \subset M$ offen und glatte Vektorfelder X_1, \dots, X_k auf U die Abbildung

$$x \mapsto \omega_x(X_1(x), \dots, X_k(x))$$

ein Schnitt in E_U ist. Den Raum aller k -Formen mit Werten in E bezeichnet man mit $\Omega^k(M, E)$. \times

3.2 **Bemerkungen.** A. Alternativ ist eine k -Form mit Werten in E eine $\mathcal{C}^\infty(M)$ multilineare, alternierende Abbildung

$$\omega : \underbrace{\mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M)}_{k\text{-mal}} \rightarrow \Gamma(E)$$

B. Eine weitere alternative Definition ist $\Omega^k(M, E) = \Gamma(\Lambda^k T^* M \otimes E)$.

C. Die 0-Formen sind gerade die Schnitte in E , d.h. $\Omega^0(M, E) = \Gamma(E)$.

D. Ist das Vektorbündel E trivial und vom Rang r , dann ist $\omega \in \Omega^k(M, E)$ wieder eine vektorwertige k -Form $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_r)$ aus gewöhnlichen k -Formen $\omega_i \in \Omega^k(M, \mathbb{R})$. \rightsquigarrow

Sei nun $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel, V ein Vektorraum und $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine G -Darstellung. Das Vektorbündel E sei weiterhin als assoziiertes Faserbündel

$$E = P \times_{\rho} V$$

gegeben. Wir haben bereits gesehen, dass sich Schnitte in E , also 0-Formen mit Werten in E , gerade mit G -äquivarianten Funktionen identifizieren lassen

$$\begin{aligned} \Gamma(E) &= \mathcal{C}^{\infty}(P, V)^{(G, \rho)} \\ &= \left\{ f : P \rightarrow V : f(p \cdot g) = \rho(g)^{-1} f(p), \quad p \in P, g \in G \right\}. \end{aligned}$$

Man nennt diese Funktionen auch **Schnitte vom Typ ρ** . Wir wollen nun eine analoge Identifikation für allgemeine k -Formen mit Werten in E erarbeiten.

3.3 Definition Sei $\omega \in \Omega^k(P, V)$, dann heißt ω

- 1.) **horizontal**, falls $\omega(X_1, \dots, X_k) = 0$ wenn ein X_i vertikal ist (d.h. $d\pi(X_i) = 0$), und
- 2.) **vom Typ ρ** , falls für alle $g \in G$

$$R_g^* \omega = \rho(g)^{-1} \omega.$$

Den Raum der horizontalen k -Formen auf P mit Werten in V vom Typ ρ bezeichnet man mit $\Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(P, \rho)}$. \times

BEISPIEL 16 Wir betrachten die Menge der Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ auf dem G -Hauptfaserbündel $\pi : P \rightarrow M$. Sind nun A_1 und A_2 Zusammenhangsformen, dann sind sie nach Voraussetzung vom Typ Ad aber *nicht horizontal*. Jedoch ist ihre Differenz horizontal und daher

$$A_1 - A_2 \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{(G, \text{Ad})}.$$

Umgekehrt sei A eine Zusammenhangsform und $\omega \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{(G, \text{Ad})}$, dann ist $A + \omega$ offenbar wiederum eine Zusammenhangsform.

Somit bilden die Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ auf P einen affinen Raum über dem Vektorraum $\Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathfrak{g})^{(G, \text{Ad})}$. ■

3.4 Satz Der Vektorraum $\Omega^k(M, E)$ der k -Formen auf M mit Werten in E ist isomorph zum Vektorraum $\Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)}$ der horizontalen k -Formen auf P vom Typ ρ . \times

Beweisskizze. Zu Konstruieren ist ein Isomorphismus

$$\Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)}, \quad \omega \mapsto \bar{\omega}.$$

Dazu verwenden wir für $p \in P_x$ zu $x \in M$ den Faserdiffeomorphismus

$$[p]: V \rightarrow E_x, \quad v \mapsto [p, v].$$

Sei $\bar{\omega} \in \Omega^k(P, V)^{(G, \rho)}$ gegeben und $X_1, \dots, X_k \in T_x M$, dann definiert man

$$\omega_x(X_1, \dots, X_k) := [p, \bar{\omega}_p(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)],$$

wobei $\tilde{X}_i \in T_p P$, so dass $d\pi(\tilde{X}_i) = X_i$ und $p \in P_x$ beliebig.

Sei umgekehrt $\omega \in \Omega^k(M, E)$ gegeben und $T_1, \dots, T_k \in T_p P$, dann definiert man

$$\bar{\omega}_p(T_1, \dots, T_k) := [p]^{-1} \omega_{\pi(p)}(d\pi(T_1), \dots, d\pi(T_k)).$$

Es ist nun zu zeigen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und ω und $\bar{\omega}$ tatsächlich glatte Abbildungen sind. Für Details siehe [1, Satz 3.5]. ■

3.5 Definition Das *adjungierte Vektorbündel* zu einem G -Hauptfaserbündel P ist definiert als

$$\text{Ad}(P) := P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}. \quad \times$$

3.6 Bemerkung. Nach obiger Identifikation und der vorangegangenen Bemerkung ist der Raum der Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ auf P ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega^1(M, \text{Ad}(P))$. \rightarrow

3-B Das absolute Differential eines Zusammenhangs

Sei wieder $\pi: P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel, V ein Vektorraum, $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine G -Darstellung und

$$E = P \times_{\rho} V.$$

3.7 Definition Eine *kovariante Ableitung* ∇ auf dem Vektorbündel $\Gamma(E)$ ist eine Abbildung

$$\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E), \quad e \mapsto \nabla e,$$

so dass für $f \in C^\infty(M)$ gilt

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f\nabla e.$$

Schreiben wir $\nabla_X e := (\nabla e)(X)$ für ein Vektorfeld $X \in \chi(M)$, dann ist

$$\nabla_X(fe) = df(X)e + f\nabla_X e. \quad \times$$

Mit den bisherigen Definitionen lässt sich ∇ auf $E = P \times_\rho V$ auch schreiben als

$$\nabla : \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E).$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, für einen Zusammenhang A auf P ein Differential

$$d_A : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, E)$$

auf den E -wertigen Formen zu definieren, so dass ∇ gerade die 0-te Komponente von d_A wird. Dazu werden wir das Differential zunächst auf $\Omega_{\text{hor}}^k(M, V)^{(G, \rho)}$ definieren und anschließend mit Hilfe von Satz 3.4 auf $\Omega^k(M, E)$ übersetzen.

Sei also A ein Zusammenhang auf P , dann zerlegt sich das Tangentialbündel an P in die direkte Summe

$$TP = T^hP \oplus T^\nu P, \quad T^\nu P = \ker(d\pi).$$

Die Projektion auf die horizontale Komponente bezeichnen wir mit pr_h

$$\text{pr}_h : TP \rightarrow T^hP.$$

3.8 **Definition** Sei A ein Zusammenhang auf P , dann heißt die lineare Abbildung

$$D_A : \Omega^k(P, V) \rightarrow \Omega^{k+1}(P, V)$$

, die für Vektorfelder T_1, \dots, T_k in P gegeben ist durch

$$(D_A \omega)(T_1, \dots, T_k) := d\omega(\text{pr}_h(T_1), \dots, \text{pr}_h(T_k)),$$

absolutes Differential von A auf P . \times

Offenbar liegt das Bild von D_A in den horizontalen Formen. Mit Hilfe der Identifikation $\Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)} \cong \Omega^k(M, E)$ wollen wir D_A nun auf E -wertige Formen übersetzen. Dazu ist es jedoch erforderlich, dass D_A auch den Typ ρ erhält.

3.9 **Satz** a) Das absolute Differential erhält horizontale Formen vom Typ ρ , d.h.

$$D_A \big|_{\Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)}} : \Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)} \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P, V)^{(G, \rho)}.$$

b) Sei $\omega \in \Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)}$, dann gilt

$$D_A \omega = d\omega + \rho_*(A) \wedge \omega,$$

wobei für Vektorfelder T_0, \dots, T_k in P der letztere Term gegeben ist durch

$$(\rho_*(A) \wedge \omega)(T_0, \dots, T_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \rho_*(A(T_i)) \omega(\dots, \hat{T}_i, \dots). \quad \times$$

Bevor wir den Satz beweisen können, benötigen wir noch ein Verfahren um Vektorfelder auf M zu horizontalen Vektorfeldern auf P zu „liften“.

3.10 **Definition** Sei X ein Vektorfeld auf M . Der *horizontale Lift* von X ist ein Vektorfeld X^* auf P mit

$$1.) X_p^* \in T_p^h P \quad \text{für } p \in P, \quad \text{und}$$

$$2.) d\pi(X^*) \equiv X. \quad \times$$

3.11 **Proposition** a) Zu jedem Vektorfeld X auf M existiert genau ein horizontaler Lift X^* auf P .

b) Sei T ein horizontales, rechtsinvariantes Vektorfeld auf P , dann existiert genau ein Vektorfeld X auf M mit $X^* = T$.

c) Der horizontale Lift ist rechtsinvariant, d.h.

$$X_{p \cdot g}^* = dR_g(X_p^*), \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } g \in G.$$

d) Der horizontale Lift kommutiert mit vertikalen Vektorfeldern, d.h.

$$[\tilde{Y}, X^*] = 0, \quad \text{für } X \in \chi(M) \text{ und } Y \in \mathfrak{g}. \quad \times$$

Wir werden die Proposition später beweisen.

Beweis des Satzes. a): Das Bild von D_A liegt in den horizontalen Formen, denn sei $\omega \in \Omega^k(P, V)$ und $T_0, \dots, T_k \in T_p P$ mit einem T_i vertikal, dann ist $\text{pr}_h(T_i) = 0$ und folglich

$$(D_A \omega)(T_0, \dots, T_k) = d\omega(\text{pr}_h(T_0), \dots, \text{pr}_h(T_k)) = 0.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass D_A auch den Typ erhält. Sei dazu $\omega \in \Omega^k(P, V)$ vom Typ ρ . Dann ist für $g \in G$ zu zeigen, dass $R_g^* D_A \omega = \rho(g)^{-1} D_A \omega$. Da der horizontale Tangentialraum eine rechtsinvariante Distribution ist, gilt $\text{pr}_h \circ dR_g = dR_g \circ \text{pr}_h$ und folglich

$$\begin{aligned} (R_g^* D_A \omega) &= (D_A \omega) \circ dR_g = d\omega(\text{pr}_h \circ dR_g) = d\omega(dR_g \circ \text{pr}_h) \\ &= (R_g^* d\omega) \circ \text{pr}_h = (d(R_g^* \omega)) \circ \text{pr}_h \\ &= \rho(g)^{-1} \cdot d\omega \circ \text{pr}_h = \rho(g)^{-1} D_A \omega. \end{aligned}$$

Somit erhält D_A horizontale Formen vom Typ ρ .

b): Seien $T_0, \dots, T_k \in T_p P$, dann ist zu zeigen, dass

$$(D_A \omega)(T_0, \dots, T_k) = d\omega(T_0, \dots, T_k) + (\rho_*(A) \wedge \omega)(T_0, \dots, T_k).$$

Aufgrund der Multilinearität genügt es T_i zu betrachten die entweder vertikal oder horizontal sind.

1. *Fall, alle T_i sind horizontal.* Dann ist $\text{pr}_h(T_i) = T_i$ und das absolute Differential entspricht dem gewöhnlichen,

$$D_A \omega(T_0, \dots, T_k) = d\omega(T_0, \dots, T_k).$$

Andererseits ist $A(T_i) = 0$ für alle T_i und somit ist $(\rho_*(A) \wedge \omega)(T_0, \dots, T_k) = 0$, also gilt die Formel.

2. *Fall, mindestens zwei T_i sind vertikal, die übrigen horizontal.* Nach a) ist wieder $D_A \omega$ horizontal und folglich $D_A \omega(T_0, \dots, T_k) = 0$. Außerdem ist ω horizontal, also

$$\omega(\dots, \hat{T}_i, \dots) = 0, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Somit ist $(\rho_*(A) \wedge \omega)(T_0, \dots, T_k) = 0$ und es verbleibt zu zeigen, dass $d\omega(T_0, \dots, T_k) = 0$. Dazu verwenden wir folgende wichtige Formel für das gewöhnliche Differential

$$\begin{aligned} d\omega(T_0, \dots, T_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i T_i(\omega(\dots, \hat{T}_i, \dots)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([T_i, T_j], \dots, \hat{T}_i, \dots, \hat{T}_j, \dots). \end{aligned}$$

In der vorderen Summe sind alle Terme Null, denn ω ist horizontal. Weiterhin sind in der hinteren Summe alle Terme Null bis auf eventuell den Term, für den beide vertikalen Vektoren im Kommutator stehen, d.h.

$$d\omega(T_0, \dots, T_k) = (-1)^{i+j} \omega([T_i, T_j], \dots, \hat{T}_i, \dots, \hat{T}_j, \dots), \quad T_i, T_j \text{ vertikal.}$$

Nun existieren $X_i, X_j \in \mathfrak{g}$, so dass für die fundamentalen Vektorfelder gilt $\tilde{X}_i(p) = T_i$ und $\tilde{X}_j(p) = T_j$. Dann ist aber auch

$$[T_i, T_j] = [\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] \Big|_p = [\widetilde{X_i, X_j}] \Big|_p \in T_p^\vee P,$$

und somit ist auch der verbliebene Term Null.

3. Fall, T_0 ist vertikal und die übrigen sind horizontal. Dann ist $D_A \omega = 0$ und es existiert ein $X \in \mathfrak{g}$, so dass $\tilde{X}(p) = T_0$ und somit

$$(\rho_*(A) \wedge \omega)(T_0, \dots, T_k) = \rho_*(X) \omega(T_1, \dots, T_k).$$

Zu zeigen ist nun, dass $d\omega(T_0, \dots, T_k) = -\rho_*(X) \omega(T_1, \dots, T_k)$. Dazu bezeichne X_1^*, \dots, X_k^* die horizontalen Lifts zu T_1, \dots, T_k , dann ergibt die Formel für das gewöhnliche Differential und die Horizontalität von ω , dass

$$\begin{aligned} d\omega(T_0, \dots, T_k) &= \tilde{X}(\omega(X_1^*, \dots, X_k^*)) + \sum_{i=1}^k (-1)^i \omega([\tilde{X}, X_i^*], \dots, \hat{X}_i^*, \dots) \Big|_p \\ &= \tilde{X}(\omega(X_1^*, \dots, X_k^*)) \Big|_p, \end{aligned}$$

denn $[\tilde{X}, X_i^*] = 0$. Weiterhin ist nach Definition der Lie-Ableitung,

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\omega(X_1^*, \dots, X_k^*)) \Big|_p &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \omega(X_1^*(p \cdot \exp(tX)), \dots, X_k^*(p \cdot \exp(tX))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \omega(dR_{\exp(tX)} X_1^*, \dots, dR_{\exp(tX)} X_k^*) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 (R_{\exp(tX)}^* \omega)(X_1^*, \dots, X_k^*) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \rho(\exp(-tX)) \omega(X_1^*, \dots, X_k^*) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 e^{-t d\rho(X)} \omega(X_1^*, \dots, X_k^*) \\ &= -d\rho(X) \omega(X_1^*, \dots, X_k^*) \\ &= -\rho_*(X) \omega(X_1^*, \dots, X_k^*). \end{aligned}$$

Somit ist der Beweis vollständig. ■

Das absolute Differential ist also ein Differentialoperator 1. Ordnung auf horizontalen Formen vom Typ ρ ,

$$D_A : \Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)} \rightarrow \Omega_{\text{hor}}^{k+1}(P, V)^{(G, \rho)}.$$

Mit Hilfe des Isomorphismus $\Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)} \rightarrow \Omega^k(M, E)$, $\overline{\omega} \mapsto \omega$ können wir nun ein Differential für Formen mit Werten in E definieren.

3.12 **Definition** Sei A ein Zusammenhang auf P , dann ist das *Differential* d_A ein Endomorphismus von $\Omega^*(M, E)$ definiert durch

$$d_A : \Omega^k(M, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(M, E), \quad \overline{d_A \omega} = D_A \overline{\omega},$$

wobei $\overline{\omega}$ über den Isomorphismus aus Satz 3.4 gegeben ist. \times

Das Differential d auf den gewöhnlichen Formen $\Omega^*(M)$ hat die Eigenschaft, dass $d^2 = 0$. Unser Ziel ist es nun, d_A^2 zu berechnen. Wir werden feststellen, dass d_A^2 im Allgemeinen nicht verschwindet.

3.13 **Bemerkungen.** A. Seien $U \subset M$ offen, $\pi(p) = x \in M$ und X_0, \dots, X_k Tangentialvektoren in $T_x M$ mit horizontalen Lifts X_0^*, \dots, X_k^* . Weiterhin sei $\omega \in \Omega^k(M, E)$, dann hat das Differential von ω im Punkt x die Darstellung

$$(d_A \omega)_x(X_0, \dots, X_k) = [p, d\overline{\omega}_p(X_0^*, \dots, X_k^*)] = [p, D_A \overline{\omega}_p(X_0^*, \dots, X_k^*)].$$

Alternativ kann man das Differential auch ohne horizontale Lifts beschreiben. Sei dazu $s : U \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt, dann gilt

$$(d_A \omega)_x(X_0, \dots, X_k) = [s(x), (D_A \overline{\omega})_p(ds(X_0), \dots, ds(X_k))].$$

B. Für gewöhnliche Differentialformen $\sigma, \omega \in \Omega^*(M)$ kennen wir das Dachprodukt $\sigma \wedge \omega \in \Omega^*(M)$. Für zwei bündelwertige Formen $\sigma, \omega \in \Omega^*(M, E)$ lässt sich jedoch $\sigma \wedge \omega$ zunächst nicht sinnvoll definieren. Allerdings operieren die gewöhnlichen Differentialformen auf den bündelwertigen Formen durch

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M, E) \rightarrow \Omega^{k+l}(M, E), \quad (\sigma, \omega) \mapsto \sigma \wedge \omega,$$

wobei das Dachprodukt aus einer gewöhnlichen und einer bündelwertigen Form definiert ist durch

$$\begin{aligned} & (\sigma \wedge \omega)_x(X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sign}(\sigma) \sigma(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \omega(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)}), \end{aligned}$$

für $x \in M$ und $X_1, \dots, X_{k+l} \in T_x M$. Für dieses Dachprodukt gelten die üblichen Rechenregeln. \rightarrow

3.14 **Lemma** Sei A ein Zusammenhang auf P und seien $\sigma \in \Omega^k(M)$ und $\omega \in \Omega^*(M, E)$. Dann gilt

$$d_A(\sigma \wedge \omega) = d\sigma \wedge \omega + (-1)^k \sigma \wedge d_A \omega.$$

Beweis. Seien $\sigma \in \Omega^k(M)$ und $\omega \in \Omega^l(M, E)$. Man überzeugt sich anhand der expliziten Formel für das Dachprodukt und für den Isomorphismus $\overline{\omega} \mapsto \omega$, dass $\overline{\sigma \wedge \omega} = (\pi^* \sigma) \wedge \overline{\omega}$ und für diese gewöhnlichen Differentialformen gilt bei komponentenweiser Anwendung des Differentials,

$$d((\pi^* \sigma) \wedge \overline{\omega}) = (\pi^* d\sigma) \wedge \overline{\omega} + (-1)^k (\pi^* \sigma) \wedge d\overline{\omega}.$$

Seien nun X_1, \dots, X_{k+l} Vektorfelder auf M , dann gilt

$$\begin{aligned} d_A(\sigma \wedge \omega)(X_1, \dots, X_{k+l}) &= [p, d\overline{\sigma \wedge \omega}(X_1^*, \dots, X_{k+l}^*)] \\ &= [p, (\pi^* d\sigma \wedge \overline{\omega} + (-1)^k \pi^* \sigma \wedge d\overline{\omega})(X_1^*, \dots, X_{k+l}^*)] \\ &= [p, (\overline{d\sigma \wedge \omega} + (-1)^k \overline{\sigma} \wedge d\overline{\omega})(X_1^*, \dots, X_{k+l}^*)] \\ &= (d\sigma \wedge \omega + (-1)^k \sigma \wedge d\omega)(X_1, \dots, X_{k+l}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.15 *Bemerkung.* Für den Spezialfall, dass $\sigma \in \Omega^k(M)$ und $e \in \Gamma(E) = \Omega^0(M, E)$ ist $\sigma \wedge \omega \in \Gamma(T^*M \times \dots \times T^*M \otimes E)$ und man schreibt auch

$$d_A(\sigma \otimes e) = d\sigma \otimes e + (-1)^k \sigma \wedge \nabla^A e. \quad \rightarrow$$

3.16 **Definition und Satz** Man nennt die Abbildung

$$\nabla^A := d_A : \Gamma(E) = \Omega^0(M, E) \rightarrow \Omega^1(M, E) = \Gamma(T^*M \otimes E), \quad e \mapsto \nabla^A e,$$

die durch den Zusammenhang A induzierte kovariante Ableitung auf E . Für ein Vektorfeld $X \in \chi(M)$ schreibt man auch kurz $\nabla_X^A e := (\nabla^A e)(X)$. \times

Beweis. Zu zeigen ist, dass ∇^A tatsächlich eine kovariante Ableitung auf E ist. Sei $e \in \Gamma(E)$, dann ist $\nabla^A e \in \Omega^1(M, E)$ ein 1-Form und folglich $\nabla_X^A e = d_A e$ in natürlicher Weise $\mathcal{C}^\infty(M)$ linear in X . Sei nun $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann gilt

$$\nabla_X^A (fe) = d_A(fe)(X) = df(X)e + f d_A e(X) = X(f)e + f \nabla_X^A e.$$

Also definiert ∇^A tatsächlich eine kovariante Ableitung auf E . \blacksquare

- 3.17 **Satz** Seien $e \in \Gamma(E)$ und $X \in \chi(M)$. Dann existiert zu $x \in M$ eine Umgebung U von x , ein glatter Schnitt $s : U \rightarrow P$ und eine glatte Funktion $\nu \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$, so dass für jedes $x \in U$,

$$(\nabla_X^A e)_x = [s(x), d\nu(X(x)) + \rho_*(A^S(X(x)))\nu(x)]. \quad \times$$

Beweis. Sei $x \in M$, dann existiert eine Umgebung $U \subset M$ von x , so dass

$$e|_U = [s, \nu],$$

mit einem glatten Schnitt $s : U \rightarrow P$ und einer glatten Funktion $\nu \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$. Andererseits existiert auch eine glatte Funktion $\bar{e} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)^{(G, \rho)}$, so dass

$$e(x) = [p, \bar{e}(p)],$$

für jedes $p \in P_x$. Folglich ist $\nu(x) = \bar{e}(s(x))$ und man rechnet nach, dass

$$\begin{aligned} (\nabla_X^A e)_x &= (d_A e)_x(X(x)) = [s(x), (D_A \bar{e})_x(ds(X(x)))] \\ &= [s(x), d\bar{e}_x(ds(X(x))) + \rho_*(A_x(ds(X(x))))\bar{e}(s(x))] \\ &= [s(x), d\nu(X(x)) + \rho_*(A^S(X(x)))\nu(x)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 3.18 *Bemerkung.* Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ein G -invariantes Skalarprodukt auf V , dann ist

$$\langle e, \tilde{e} \rangle_E := \langle \nu, \tilde{\nu} \rangle_V,$$

für Schnitte $e = [p, \nu]$, und $\tilde{e} = [p, \tilde{\nu}] \in \Gamma(E)$ eine Bündelmetrik auf E . Sei $U \subset M$ offen und $s : U \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt in P , dann schreibt sich

$$\nabla_X^A e = [s(x), d\nu_x(X_x) + \rho_*(A^S(X_x))\nu(x)],$$

so dass man direkt verifiziert

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X^A e, \tilde{e} \rangle_E + \langle e, \nabla_X^A \tilde{e} \rangle_E &= \langle d\nu(X) + \rho_*(A^S(X))\nu, \tilde{\nu} \rangle_V + \langle \nu, d\tilde{\nu}(X) + \rho_*(A^S(X))\tilde{\nu} \rangle_V \\ &= \langle d\nu(X), \tilde{\nu} \rangle_V + \langle \nu, d\tilde{\nu}(X) \rangle_V + \langle \rho_*(A^S(X))\nu, \tilde{\nu} \rangle_V + \langle \nu, \rho_*(A^S(X))\tilde{\nu} \rangle_V \\ &= X(\langle \nu, \tilde{\nu} \rangle) + \langle \rho_*(A^S(X))\nu, \tilde{\nu} \rangle_V + \langle \nu, \rho_*(A^S(X))\tilde{\nu} \rangle_V. \end{aligned}$$

Nun ist $A^S(X_x) \in \mathfrak{g}$, wobei allgemein für $a \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle d\rho(a)\nu, \tilde{\nu} \rangle_V &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \rho(\exp(ta))\nu, \tilde{\nu} \rangle_V = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \nu, \rho(\exp(-ta))\tilde{\nu} \rangle_V \\ &= -\langle \nu, d\rho(a)\tilde{\nu} \rangle_V, \end{aligned}$$

denn $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ist G -invariant. Somit gilt

$$\left\langle \nabla_X^A e, \tilde{e} \right\rangle_E + \left\langle e, \nabla_X^A \tilde{e} \right\rangle_E = X(\langle v, \tilde{v} \rangle_V) = X(\langle e, \tilde{e} \rangle_E),$$

d.h. die Bündelmetrik ist parallel bezüglich ∇^A . \rightarrow

3.19 **Lemma** Sei A ein Zusammenhang auf P , $e \in \Gamma(E)$ ein Schnitt in E und X ein Vektorfeld in M mit horizontalem Lift X^* . Sei $x \in X$, so gilt für jedes $p \in P_x$

$$(\nabla_X^A e)_x = [p](X^*(\bar{e})_p). \quad \times$$

Beweis. Man rechnet ohne Umwege nach, dass

$$(\nabla_X^A e)_x = d_A e_x(X_x) = [p, D_A \bar{e}(X^*)_p] = [p, d\bar{e}(X^*)_p] = [p, X^*(\bar{e})_p]. \quad \blacksquare$$

3-C Die Krümmung eines Zusammenhangs

3.20 **Definition** Sei A ein Zusammenhang auf P , dann ist

$$F^A := D_A A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$$

die *Krümmung* von A . \times

3.21 **Bemerkung.** Es gilt sogar $F^A \in \Omega_{\text{hor}}^2(P, \mathfrak{g})^{(G, \text{Ad})} \cong \Omega^2(M, \text{Ad}(P))$. Denn das Bild von D_A sind horizontale Formen und A ist vom Typ Ad , wobei D_A den Typ erhält. Also ist $F^A = D_A A$ horizontal und vom Typ Ad , also $F^A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})^{(G, \text{Ad})}$ und $\text{Ad}(P) = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}$, also ist $\Omega_{\text{hor}}^2(P, \mathfrak{g})^{(G, \text{Ad})} \cong \Omega^2(M, \text{Ad}(P))$. \rightarrow

3.22 **Definition und Satz** Sei N eine Mannigfaltigkeit auf der eine Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra \mathfrak{g} wirkt. Weiter sei (a_1, \dots, a_r) eine Basis von \mathfrak{g} und gegeben seien zwei \mathfrak{g} -wertige Formen $\omega \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$ und $\tau \in \Omega^l(N, \mathfrak{g})$ mit

$$\omega = \sum_{i=1}^r \omega^i a_i, \quad \tau = \sum_{i=1}^r \tau^i a_i,$$

wobei $\omega_i \in \Omega^k(N)$ und $\tau^i \in \Omega^l(N)$. Dann ist der *Kommutator* von ω und τ definiert durch

$$[\omega, \tau] := \sum_{i,j=1}^r \omega^i \wedge \tau^j [a_i, a_j] \in \Omega^{k+l}(N, \mathfrak{g}),$$

d.h. $[\cdot, \cdot] : \Omega^k(N, \mathfrak{g}) \times \Omega^l(N, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^{k+l}(N, \mathfrak{g})$. \times

Beweis. Zu zeigen ist, dass die Definition von $[\cdot, \cdot]$ unabhängig von der Wahl der Basis ist. ■

3.23 **Lemma** Seien $\omega \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$ und $\tau \in \Omega^l(N, \mathfrak{g})$. Dann gelten:

$$a) [\omega, \tau] = (-1)^{kl+1}[\tau, \omega].$$

$$b) d[\omega, \tau] = [d\omega, \tau] + (-1)^k[\omega, d\tau].$$

c) Für $\omega \in \Omega^1(N, \mathfrak{g})$ und $X, Y \in \chi(N)$ gilt

$$[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]. \quad \times$$

Beweis. Sei also (a_1, \dots, a_r) eine Basis von \mathfrak{g} und $\omega \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$ und $\tau \in \Omega^l(N, \mathfrak{g})$ bezüglich dieser Basis durch gewöhnliche Differentialformen $\omega^i \in \Omega^k(N)$ bzw. $\tau^i \in \Omega^l(N)$ dargestellt.

a): Es gilt, dass $\omega^i \wedge \tau^j = (-1)^{kl} \tau^j \wedge \omega^i$ sowie $[a_i, a_j] = -[a_j, a_i]$, also

$$[\omega, \tau] = (-1)^{kl+1} \sum_{i,j=1}^r \tau^j \wedge \omega^i [a_j, a_i] = (-1)^{kl+1} [\tau, \omega].$$

b): Weiterhin gilt $d(\omega^i \wedge \tau^j) = d\omega^i \wedge \tau^j + (-1)^k \omega^i \wedge d\tau^j$ und folglich,

$$\begin{aligned} d[\omega, \tau] &= \sum_{i,j=1}^r d(\omega^i \wedge \tau^j) [a_i, a_j] = \sum_{i,j=1}^r (d\omega^i \wedge \tau^j + (-1)^k \omega^i \wedge d\tau^j) [a_i, a_j] \\ &= [d\omega, \tau] + (-1)^k [\omega, d\tau]. \end{aligned}$$

c): Seien $X, Y \in \chi(N)$, dann verifiziert man direkt, dass

$$\begin{aligned} [\omega, \omega](X, Y) &= \sum_{i,j} (\omega^i(X) \omega^j(Y) - \omega^j(X) \omega^i(Y)) [a_i, a_j] \\ &= \left[\sum_i \omega^i(X) a_i, \sum_j \omega^j(X) a_j \right] - \left[\sum_i \omega^i(Y) a_i, \sum_j \omega^j(X) a_j \right] \\ &= [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.24 **Strukturgleichung** Sei A ein Zusammenhang auf P , dann gilt

$$F^A = dA + \frac{1}{2}[A, A]. \quad \times$$

3.25 *Bemerkungen.* A. Ist die Lie-Algebra \mathfrak{g} zu G abelsch, dann ist $[A, A] = 0$ und die Strukturgleichung nimmt eine einfachere Form an,

$$F^A = dA.$$

Insbesondere ist F^A dann exakt. In der Physik spielt die $U(1)$ -Theorie eine fundamentale Rolle. Hier ist $G = U(1)$ also P ein $U(1)$ -Hauptfaserbündel und die Lie-Algebra zu G ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1)$ und damit abelsch.

B. Sei G eine Matrizen­gruppe, d.h. G ist eine Untergruppe der GL_n . Dann lässt sich die Zusammenhangsform als Matrix $A = (A_{ij})$ auffassen mit gewöhnlichen 1-Formen $A_{ij} \in \Omega^1(P)$ als Komponenten. Seien $X, Y \in \chi(P)$, dann schreibt sich der Kommutator als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[A, A](X, Y) &= [A(X), A(Y)]_{\mathfrak{g}} = A(X)A(Y) - A(Y)A(X) \\ &= \left(\sum_k A_{ij}(X)A_{kj}(Y) - A_{ik}(Y)A_{ki}(X) \right)_{ij} \\ &= \left(\sum_k A_{ik} \wedge A_{kj}(X, Y) \right)_{ij} =: A \wedge A(X, Y). \end{aligned}$$

Dadurch hat die Strukturgleichung die Form

$$F^A = dA + A \wedge A.$$

In den allermeisten Anwendungen ist G eine Matrizen­gruppe und dieser Zusammenhang gilt. ∞

Beweis der Strukturgleichung. Aufgrund der Multilinearität genügt es wieder die Formel für Tangentialvektoren zu zeigen, die horizontal bzw. vertikal sind.

a): Seien X, Y horizontal, dann gilt $A(X) = A(Y) = 0$,

$$F^A(X, Y) = dA(\text{pr}_h(X), \text{pr}_h(Y)) = dA(X, Y)$$

und $[A, A](X, Y) = 2[A(X), A(Y)] = 0$.

b): Sei X horizontal und Y vertikal. Dann ist

$$F^A(X, Y) = dA(\text{pr}_h(X), \text{pr}_h(Y)) = 0,$$

und ebenso $[A, A](X, Y) = 2[A(X), A(Y)] = 0$. Sei V^* ein horizontaler Lift von X und $\tilde{Z}_p = Y$ für ein $p \in P$ und $Z \in \mathfrak{g}$. Dann ist $A(X) = 0$ und $A(Y) = Z$ und es gilt

$$dA(X, Y) = V^*(A(\tilde{Z})) - \tilde{Z}(A(V^*)) - A([\tilde{Z}, V^*]) = V^*(Z) = 0,$$

denn Z ist ein konstanter Vektor, also verschwindet die Lie-Ableitung nach V^* .

c): Seien X und Y vertikal, dann ist $F^A(X, Y) = 0$. Seien $\tilde{V}_p = X$ und $\tilde{W}_p = Y$ für ein $p \in P$ und $X, W \in \mathfrak{g}$. Dann ist

$$\frac{1}{2}[A, A](X, Y) = [A(X), A(Y)] = [V, W].$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} dA(X, Y) &= \tilde{V}(A(\tilde{W})) - \tilde{W}(A(\tilde{V})) - A([\tilde{V}, \tilde{W}]) \\ &= \tilde{V}(W) - \tilde{W}(V) - A([\tilde{V}, \tilde{W}]) = -[V, W]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.26 **Bianchi Identität** Sei A ein Zusammenhang auf P , dann gilt

$$D_A F^A = 0. \quad \times$$

Beweis. Aus der Strukturgleichung erhalten wir für das Differential der Krümmung,

$$dF^A = d\left(dA + \frac{1}{2}[A, A]\right) = \frac{1}{2}([dA, A] - [A, dA]) = [dA, A].$$

Somit gilt für das absolute Differential,

$$D_A F^A = dF^A \circ \text{pr}_h = [dA, A] \circ \text{pr}_h = 0,$$

denn A verschwindet auf horizontalen Vektorfeldern. \blacksquare

3.27 *Bemerkung.* Im Beweis der Bianchi Identität haben wir ganz allgemein gezeigt, dass

$$dF^A = [dA, A].$$

Für Matrizen­gruppe geht dies über in

$$dF^A = F^A \wedge A - A \wedge F^A.$$

Um das einzusehen, betrachte

$$dF^A = [dA, A] = [F^A - \frac{1}{2}[A, A], A] = [F^A, A] - \frac{1}{2}[[A, A], A].$$

Wähle nun eine Basis (e_1, \dots, e_r) von \mathfrak{g} , dann ist

$$A = \sum_{i=1}^r A^i e_i, \quad A^i \in \Omega^1(M).$$

und folglich schreibt sich der Kommutator als

$$\begin{aligned} [[A, A], A] &= \sum_{i,k,j=1}^r A^i \wedge A^j \wedge A^k [[e_i, e_j], e_k] \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{i,k,j=1}^r A^i \wedge A^j \wedge A^k [[e_i, e_j], e_k] + A^k \wedge A^i \wedge A^j [[e_k, e_i], e_j] \right. \\ &\quad \left. + A^j \wedge A^k \wedge A^i [[e_j, e_k], e_i] \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{i,k,j=1}^r A^i \wedge A^j \wedge A^k ([[e_i, e_j], e_k] + [[e_k, e_i], e_j] + [[e_j, e_k], e_i]) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

aufgrund der Jacobi-Identität und der Invarianz von $A^i \wedge A^j \wedge A^k$ unter zyklischer Vertauschung. \rightarrow

3.28 **Satz** Sei A ein Zusammenhang auf P , dann gilt für alle $\omega \in \Omega_{\text{hor}}^k(P, V)^{(G, \rho)}$

$$D_A^2 \omega = \rho_*(F^A) \wedge \omega. \quad \times$$

Während das Quadrat des gewöhnlichen Differentials immer verschwindet $d^2 = 0$, involviert das Quadrat des absoluten Differentials D_A^2 die Krümmung des Zusammenhangs A .

Beweis. Nach Satz 3.9 gilt

$$\begin{aligned} d(D_A \omega) &= d(d\omega + \rho_*(A) \wedge \omega) = d^2 \omega + d(\rho_*(A) \wedge \omega) \\ &= (d\rho_*(A)) \wedge \omega + (-1)^k \rho_*(A) \wedge d\omega. \end{aligned}$$

Nach Definition des absoluten Differentials ist $D_A^2 \omega = (d(D_A \omega)) \circ \text{pr}_h$, wobei der Zusammenhang auf horizontalen Formen verschwindet, d.h. $A \circ \text{pr}_h = 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} D_A^2 \omega &= [(d\rho_*(A)) \wedge \omega] \circ \text{pr}_h = (\rho_*(dA) \wedge \omega) \circ \text{pr}_h \\ &= \rho_*(D_A A) \wedge \omega = \rho_*(F^A) \wedge \omega, \end{aligned}$$

denn der Push-forward vertauscht mit dem gewöhnlichen Differential, ω ist horizontal und $(dA) \circ \text{pr}_h = D_A A$. \blacksquare

■ U(1)-Zusammenhänge

Die Eichfeldtheorien in der Physik lassen sich mit Hilfe von Hauptfaserbündeln beschreiben. Die Krümmung des Hauptfaserbündels spielt dabei die Rolle der wirkenden Kraft und die Strukturgruppe spiegelt die Symmetrie der Wechselwirkung wieder. Die Symmetrie der elektromagnetischen Wechselwirkung wird von der U(1) repräsentiert. Im Folgenden wollen wir U(1)-Hauptfaserbündel $\pi : P \rightarrow M$ betrachten. Hier vereinfachen sich einige Konzepte, denn

$$U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad \mathfrak{u}(1) = \text{Lie}(U(1)) = i\mathbb{R},$$

sind abelsch. Insbesondere sind die Konjugation und ihr Differential trivial, d.h. $\alpha_g = \text{id}_{U(1)}$ und $\text{Ad}(g) = \text{id}_{\mathfrak{u}(1)}$ für jedes $g \in U(1)$.

Wie bereits festgestellt, ist der Raum der Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ über P ein affiner Raum über dem Vektorraum $\Omega_{\text{hor}}^1(P, i\mathbb{R})^{(U(1), \text{Ad})}$. Gegeben zwei Zusammenhangsformen $A_1, A_2 \in \mathcal{C}(P)$ ist $\eta = A_1 - A_2 \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, i\mathbb{R})^{(U(1), \text{Ad})}$ eine horizontale Form vom Typ Ad, d.h. für jedes $a \in U(1)$ ist

$$R_a^* \eta = \text{Ad}(a^{-1}) \eta = \eta.$$

Also ist η horizontal und rechtsinvariant. Man definiert nun eine Form $\bar{\eta} \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$ durch,

$$\bar{\eta}_x(V_x) := \eta_p(V_p^*),$$

für $x \in P_x$ und V ein Vektorfeld in M mit horizontalem Lift V^* . Aufgrund der Rechtsinvarianz ist $\bar{\eta}$ wohldefiniert und es gilt offenbar $\eta = \pi^* \bar{\eta}$. Folglich lässt sich die Differenz zweier Zusammenhangsformen immer schreiben als $A_1 - A_2 = \pi^* \bar{\eta}$, mit $\bar{\eta}$ einer gewöhnlichen Differentialform mit Werten in $i\mathbb{R}$.

Sei nun A ein Zusammenhang, dann ist die Krümmung F^A eine horizontale 2-Form vom Typ Ad und daher nach obiger Rechnung ebenfalls rechtsinvariant, also gilt auch

$$F^A = \pi^* \bar{F}^A, \quad \bar{F}^A \in \Omega^2(M, i\mathbb{R}).$$

Da $\mathfrak{u}(1)$ abelsch ist, vereinfacht sich die Strukturgleichung zu

$$F^A = dA + \frac{1}{2}[A, A] = dA,$$

also ist F^A geschlossen und exakt. Im Gegensatz dazu ist $\overline{F^A}$ jedoch im Allgemeinen *nicht exakt* sondern lediglich geschlossen, denn

$$\pi^* d\overline{F^A} = d\pi^* \overline{F^A} = dF^A = 0,$$

und folglich ist ebenfalls $d\overline{F^A} = 0$, denn die Projektion π ist eine Submersion. Somit ist auch $i\overline{F^A}$ geschlossen und außerdem reellwertig, also

$$[iF^A] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{R}).$$

3.29 **Definition und Satz** Sei $A \in \mathcal{C}(P)$ ein Zusammenhang auf P , dann definiert man die *erste reelle Chern-Klasse von P* als

$$c_1(P) := \left[\frac{-1}{2\pi i} \overline{F^A} \right] \in H_{dR}^2(M, \mathbb{R}),$$

und diese Definition ist unabhängig vom gewählten Zusammenhang. \times

Beweis. Sei $A' \in \mathcal{C}(P)$ ein weiterer Zusammenhang auf P , dann ist $A - A' = \pi^* \overline{\eta}$ für ein $\eta \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$. Die Differenz der Krümmungen

$$F^{A'} - F^A = dA' - dA = \pi^* d\overline{\eta} = d\pi^* \overline{\eta}$$

ist folglich exakt, d.h. die Krümmungen $F^{A'}$ und F^A unterscheiden sich nur um eine exakte Form. Daher stimmen ihre entsprechenden de-Rham Kohomologieklassen überein. Es gilt also

$$\left[\frac{-1}{2\pi i} \overline{F^{A'}} \right] = \left[\frac{-1}{2\pi i} \overline{F^A} \right],$$

und dies war zu zeigen. \blacksquare

BEISPIEL 17 Die erste reelle Chern Klasse des Hopf-Bündels. Betrachtet man S^3 als Teilmenge von \mathbb{C}^2 , dann lässt sich eine $U(1)$ -Wirkung beschreiben als

$$S^3 \times U(1) \rightarrow S^3, \quad ((w_1, w_2), z) \mapsto (w_1 \cdot z, w_2 \cdot z).$$

Eine Projektion auf den $\mathbb{C}P^1$ ist nun durch die homogenen Koordinaten gegeben

$$\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad (w_1, w_2) \mapsto [w_1 : w_2].$$

Man nennt das $U(1)$ -Hauptfaserbündel $H = (S^3, \pi, \mathbb{C}P^1; U(1))$ auch Hopf-Bündel. Die Basismannigfaltigkeit $\mathbb{C}P^1$ ist 2-dimensional geschlossen, zusammenhängend und

orientierbar, also gilt $H_{dR}^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Der Isomorphismus kann explizit angegeben werden,

$$H_{dR}^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_{\mathbb{C}P^1} \omega.$$

Wir wollen nun den Wert der ersten reellen Chern Klasse $c_1(H)$ unter diesem Isomorphismus berechnen. Wir haben bereits explizit eine Zusammenhangsform für das Hopfbündel berechnet

$$A : TS^3 \rightarrow i\mathbb{R}, \quad (w_1, w_2) \mapsto \frac{1}{2} (\overline{w_1} dw_1 - w_1 \overline{dw_1} + \overline{w_2} dw_2 - w_2 \overline{dw_2}),$$

mit Funktionen $\omega_i : S^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $(w_1, w_2) \mapsto w_i$. Die Krümmung dieses Zusammenhangs ist nach der Strukturgleichung

$$F^A = dA = -(dw_1 \wedge \overline{dw_1} + dw_2 \wedge \overline{dw_2}).$$

Somit ist der Wert der ersten reellen Chern Klasse

$$c_1(H) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}P^1} \overline{F^A}.$$

Um das Integral zu berechnen definiere auf $U = \mathbb{C}P^1 \setminus \{[w_1 : w_2] : w_2 = 0\}$ die Abbildung

$$\psi : U \rightarrow \mathbb{C}, \quad [w_1 : w_2] \mapsto \frac{w_1}{w_2}.$$

Dann ist ψ wohldefiniert und ein Diffeomorphismus. Weiterhin ist

$$\mathbb{C}P^1 \setminus U = \{[w_1 : 0] : w_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \{[1 : 0]\}$$

ein einziger Punkt. Setzt man für $z \in \mathbb{C}$

$$\tilde{F}_z := -\frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|)^2},$$

dann ist \tilde{F}_z eine 2-Form auf \mathbb{C} . Auf S^3 gilt $|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2 = 1$ und folglich ist

$$\begin{aligned}
 \pi^* \psi^* \tilde{F} &= -\frac{d\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \wedge d\left(\frac{\overline{\omega_1}}{\overline{\omega_2}}\right)}{\left(1 + \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|^2\right)^2} \\
 &= -\frac{\omega_2^{-2} \overline{\omega_2}^{-2} (\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2) \wedge (\overline{\omega_2} d\overline{\omega_1} - \overline{\omega_1} d\overline{\omega_2})}{\left(1 + \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right|^2\right)^2} \\
 &= -(\omega_2 d\omega_1 - \omega_1 d\omega_2) \wedge (\overline{\omega_2} d\overline{\omega_1} - \overline{\omega_1} d\overline{\omega_2}) \\
 &= -\left(|\omega_2|^2 d\omega_1 \wedge d\overline{\omega_1} + |\omega_1|^2 d\omega_2 \wedge d\overline{\omega_2}\right) \\
 &\quad + \omega_2 \overline{\omega_1} d\omega_1 \wedge d\overline{\omega_2} + \omega_1 \overline{\omega_2} d\omega_2 \wedge d\overline{\omega_1} \\
 &= F_A + \omega_1 \overline{\omega_1} d\omega_1 \wedge d\overline{\omega_1} + \omega_2 \overline{\omega_2} d\omega_2 \wedge d\overline{\omega_2} \\
 &\quad + \omega_2 \overline{\omega_1} d\omega_1 \wedge d\overline{\omega_2} + \omega_1 \overline{\omega_2} d\omega_2 \wedge d\overline{\omega_1} \\
 &= F_A + (\overline{\omega_1} d\omega_1 + \overline{\omega_2} d\omega_2) \wedge (\omega_1 d\overline{\omega_1} + \omega_2 d\overline{\omega_2}) \\
 &= F_A + (\overline{\omega_1} d\omega_1 + \overline{\omega_2} d\omega_2) \wedge \overline{(\omega_1 d\overline{\omega_1} + \omega_2 d\overline{\omega_2})} \\
 &= F_A.
 \end{aligned}$$

Damit berechnet man schließlich

$$\begin{aligned}
 c_1(H) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}P^1} \overline{F^A} = -\frac{1}{2\pi i} \int_U \overline{F^A} \\
 &= -\frac{1}{2\pi i} \int_U \psi^* \tilde{F} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \tilde{F} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-dx \wedge dy + dy \wedge dx}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\
 &= \frac{-1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-1}{\pi} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r dr d\varphi}{(1 + r^2)^2} \\
 &= -2 \int_{r=0}^{\infty} \frac{r dr}{(1 + r^2)^2} = \frac{1}{1 + r^2} \Big|_{r=0}^{\infty} \\
 &= -1. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

3-D Lokale Beschreibung der Krümmung und Transformationsverhalten

Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und A ein Zusammenhang auf P . Weiterhin sei $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von M . Zu einem lokalen Schnitt $s_i : U_i \rightarrow P$ in P

existiert eine lokale Zusammenhangsform

$$A^{s_i} := s_i^* A \in \Omega^1(U_i, \mathfrak{g}).$$

Wir suchen nun nach einer lokalen Beschreibung der Krümmung und einem Weg aus den lokalen Beschreibungen der Krümmung die globale Krümmung zurückzuerhalten.

3.30 **Definition** Die *lokale Krümmungsform von A zum lokalen Schnitt* $s_i : U_i \rightarrow P$ ist definiert durch,

$$F^{s_i} := s_i^* F^A \in \Omega^2(U_i, \mathfrak{g}). \quad \times$$

Sei nun $s_j : U_j \rightarrow P$ ein weiterer Schnitt dann existiert ein G -Kozyklus $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, so dass

$$s_j = s_i \cdot g_{ij}.$$

Ein analoges Transformationsverhalten haben die lokalen Krümmungsformen.

3.31 **Lemma** a) $F^{s_j} = \text{Ad}(g_{ij}^{-1})F^{s_i}$ auf $U_i \cap U_j$.

b) Für Matrizen Gruppen gilt

$$F^{s_j} = g_{ij}^{-1} F^{s_i} g_{ij}. \quad \times$$

Beweis. a): Es gilt $s_j = s_i \cdot g_{ij}$ und somit erhalten wir mit der Produktformel 2.17

$$ds_j(X) = dR_{g_{ij}}(ds_i(X)) + dL_{g_{ij}^{-1}}(\widetilde{dg_{ij}}(X)), \quad X \in \mathcal{X}(M).$$

Seien nun X, Y Vektorfelder in M , dann gilt

$$\begin{aligned} F^{s_j}(X, Y) &= F^A(ds_j(X), ds_j(Y)) = F^A(dR_{g_{ij}}(ds_i(X)), dR_{g_{ij}}(ds_i(Y))) \\ &= (R_{g_{ij}}^* F^A)(ds_i(X), ds_i(Y)) = \text{Ad}(g_{ij}^{-1})F^{s_i}(X, Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3.32 **Bemerkung.** Für Matrizen Gruppen übertragen sich die Darstellungen der globalen Krümmung auf die lokalen Krümmungsformen,

$$\begin{aligned} F^S &= dA^S + A^S \wedge A^S, \\ dF^S &= F^S \wedge A^S - A^S \wedge F^S. \quad \rightarrow \end{aligned}$$

BEISPIEL 18 Sei P ein $U(1)$ -Hauptfaserbündel, dann gilt aufgrund der Kommutativität

$$F^S = dA^S, \quad F^{Si} = g_{ji}^{-1} F^{Sj} g_{ji} = F^{Sj}.$$

Somit stimmen alle lokalen Krümmungsformen auf den Durchschnitten überein. Das System $\{F^i\}$ definiert somit wieder eine globale Krümmungsform auf M mit Werten in $i\mathbb{R}$.

Außerdem gilt aufgrund der Kommutativität, dass $dF^S = 0$, weshalb die Bianchi Identität in der Physik auch homogene Feldgleichung genannt wird. Sie entspricht gerade dem ersten Teil der Maxwell Gleichungen. ■

3-E Krümmung und Integrabilität

3.33 **Satz** Seien X, Y horizontale Vektorfelder auf P . Dann gelten

$$a) F^A(X, Y) = -A([X, Y]).$$

$$b) \text{pr}_v([X, Y]) = -F^A(\widetilde{X}, Y). \quad \times$$

Beweis. a): Da X, Y horizontal sind, ist $[A, A](X, Y) = 0$ und daher

$$F^A(X, Y) = dA(X, Y) = X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X, Y]) = -A([X, Y]),$$

da die Zusammenhangsform auf horizontalen Vektorfeldern verschwindet.

b): Es gilt $\text{pr}_v(X) = \widetilde{A(X)}$ und die Behauptung folgt mit a). ■

3.34 *Erinnerung.* Sei N eine Mannigfaltigkeit, dann ist eine Distribution ein Unterbündel $D \subset TN$ des Tangentialbündels an N . Eine Distribution D heißt **involutiv**, falls gilt

$$X, Y \in \Gamma(D) \Rightarrow [X, Y] \in \Gamma(D),$$

und sie heißt **integrabel**, wenn in jedem Punkt $x \in M$ eine Untermannigfaltigkeit N_x von N existiert, so dass

$$T_p N_x = D_p, \quad p \in P.$$

Die größte zusammenhängende Untermannigfaltigkeit mit dieser Eigenschaft heißt dann **maximale Integralmannigfaltigkeit** von D durch x .

Der Satz von Frobenius besagt nun, dass eine Distribution genau dann integrabel ist, wenn sie involutiv ist. \rightarrow

3.35 **Satz** a) Das vertikale Tangentialbündel $T^v P \subset TP$ ist eine involutive Distribution auf P .

b) Das horizontale Tangentialbündel $T^h P \subset TP$ ist integrabel genau dann, wenn $F^A \equiv 0$ ist. \times

Beweis. a): Es gilt $T^v P = \{\tilde{X}(\mathfrak{g}) : X \in \mathfrak{g}\}$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$ für $X, Y \in \mathfrak{g}$. Somit ist der Kommutator vertikaler Vektorfelder wieder vertikal und daher $T^v P$ involutiv.

b): Seien X, Y horizontale Vektorfelder auf P , dann ist ihr Kommutator genau dann horizontal, wenn $\text{pr}_v([X, Y]) = 0$. Nach dem vorangegangenen Satz ist dies jedoch äquivalent dazu, dass $F^A(X, Y) = 0$ ist. Somit muss die Krümmung auf horizontalen Vektorfeldern verschwinden und als horizontale Form verschwindet sie auch auf den vertikalen Vektorfeldern. Also ist $T^h P$ involutiv genau dann, wenn $F^A \equiv 0$. ■

3.36 **Definition** Ein Zusammenhang A auf P heißt *flach*, falls $F^A \equiv 0$. \times

BEISPIEL 19 Der kanonische flache Zusammenhang auf dem trivialen G -Hauptfaserbündel ist tatsächlich flach. ■

3.37 **Satz** Sei A ein Zusammenhang auf P . Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) A ist flach.

(ii) $T^h P \subset TP$ ist integrabel.

(iii) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M , so dass (P_{U_i}, A) isomorph ist zum trivialen G -Hauptfaserbündel über U_i mit dem kanonischen flachen Zusammenhang. \times

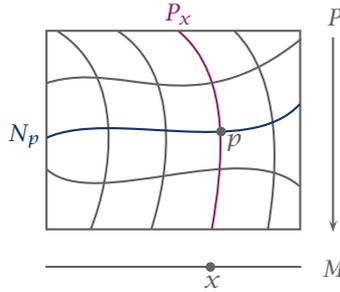
3.38 **Ergänzung** Sei M einfach zusammenhängend, dann ist $(P, \pi, M; G)$ genau dann trivial, wenn $F^A \equiv 0$. \times

3-F Der klassische Krümmungstensor

Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und $E = P \times_\rho V$ ein Vektorbündel. Für eine kovariante Ableitung ∇ auf E kennen wir bereits aus dem vergangenen Semester den klassischen Krümmungsbegriff, nämlich den Krümmungstensor

$$R_{X,Y}^\nabla = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \in \Omega^2(M, \text{End } E).$$

Wir wollen nun untersuchen, wie die 2-Form R mit F^A zusammenhängt.



3.1 Der Totalraum P zerfällt in Fasern P_x und maximale Integralmannigfaltigkeiten N_p .

3.39 **Satz** Sei A ein Zusammenhang auf P . Dann gilt für einen Schnitt $e \in \Gamma(E)$ und Vektorfelder X, Y , dass

$$R_{X,Y}^{\nabla^A} e = [p, \rho_*(F^A(X^*, Y^*))\nu],$$

wobei X^* und Y^* horizontale Lifts von X und Y sind. \times

Beweis. Es gilt $e = [p, \bar{e}]$ mit einer Funktion $\bar{e} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)^{(G,\rho)}$. Somit berechnet sich

$$\begin{aligned} R_{X,Y}^{\nabla^A} e &= [p, X^*(Y^*(\bar{e})) - Y^*(X^*(\bar{e})) - [X, Y]^*(\bar{e})] \\ &= [p, [X^*, Y^*](\bar{e}) - [X, Y]^*(\bar{e})] = [p, \text{pr}_v([X^*, Y^*](\bar{e}))] \\ &= [p, -F^A(\widetilde{X^*, Y^*})(\bar{e})], \end{aligned}$$

nach Satz 3.33. Nun gilt nach Definition des fundamentalen Vektorfeldes und der G -Äquivarianz von \bar{e} ,

$$\begin{aligned} F^A(\widetilde{X^*, Y^*})(\bar{e}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \bar{e}(p \cdot \exp(t F^A(X^*, Y^*))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \rho(\exp(-t F^A(X^*, Y^*)) \bar{e}(p)) \\ &= -d\rho(F^A(X^*, Y^*))(\bar{e}(p)). \end{aligned}$$

Mit $\bar{e}(p) = \nu$ folgt somit die Behauptung. \blacksquare

Über den Faserisomorphismus $[p]$ werden somit $R_{X,Y}$ und $\rho_*(F^A(X^*, Y^*))$ identifiziert.

3.40 **Lemma** Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf TM . Sei $P = P_{GL_n}$ das Rahmenbündel über M und A der durch ∇ induzierte Zusammenhang. Dann entspricht die Bianchi-Identität der Krümmung

$$D_A F^A = 0$$

gerade der 2. Bianchi-Identität des Krümmungstensors

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} + (\nabla_Y R)_{Z,X} + (\nabla_Z R)_{X,Y} = 0,$$

für Vektorfelder X, Y, Z in M . \times

Beweis. Seien also Vektorfelder X, Y, Z in M gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned} D_A F^A(X^*, Y^*, Z^*) &= dF^A(X^*, Y^*, Z^*) \\ &= X^*(F^A(Y^*, Z^*)) + Y^*(F^A(Z^*, X^*)) + Z^*(F^A(X^*, Y^*)) \\ &\quad - F^A([X^*, Y^*], Z^*) + F^A([X^*, Z^*], Y^*) - F^A([Y^*, Z^*], X^*) \\ &= X^*(F^A(Y^*, Z^*)) + Y^*(F^A(Z^*, X^*)) + Z^*(F^A(X^*, Y^*)) \\ &\quad - F^A([X, Y]^*, Z^*) + F^A([X, Z]^*, Y^*) - F^A([Y, Z]^*, X^*), \end{aligned} \quad (*)$$

denn es gilt $[X^*, Y^*] = \text{pr}_h([X, Y]^*)$ und F^A ist horizontal. Betrachten wir $R_{Y,Z}$ als Schnitt in $\text{End } TM$, dann gilt

$$\nabla_X(R_{Y,Z}) = [p]X^*(F^*(Y^*, Z^*)).$$

Wenden wir den Faserisomorphismus auf den Ausdruck (*) an, ergibt sich

$$\begin{aligned} [p]D_A F^A(X^*, Y^*, Z^*) &= \nabla_X(R_{Y,Z}) - R_{[X,Y],Z} - \nabla_Y(R_{Z,X}) + R_{[X,Z],Y} + \nabla_Z(R_{X,Y}) - R_{[Y,Z],X} \\ &= \nabla_X(R_{Y,Z}) - R_{\nabla_X Y, Z} + R_{\nabla_Y X, Z} \\ &\quad - \nabla_Y(R_{Z,X}) + R_{\nabla_X Z, Y} - R_{\nabla_Z X, Y} \\ &\quad + \nabla_Z(R_{X,Y}) - R_{\nabla_Y Z, X} + R_{\nabla_Z Y, X}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für die kovariante Ableitung

$$(\nabla_X R)_{Y,Z} = \nabla_X(R_{Y,Z}) - R_{\nabla_X Y, Z} - R_{Y, \nabla_X Z},$$

so dass wir schließlich erhalten

$$[p]D_A F^A(X^*, Y^*, Z^*) = (\nabla_X R)_{Y,Z} + (\nabla_Y R)_{Z,X} + (\nabla_Z R)_{X,Y}.$$

Weil $[p]$ ein Isomorphismus ist, impliziert $D_A F^A \equiv 0$, dass der rechte Ausdruck für alle Vektorfelder X, Y und Z verschwindet. ■

3-G Torsion

Sei $P = P_{\text{GL}_n}$ das Rahmenbündel über einer Mannigfaltigkeit M . Das Tangentialbündel über M

$$TM = P \times_{\rho} \mathbb{R}^n, \quad \rho : \text{GL}_n \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}^n) \cong \text{GL}_n$$

lässt sich als zu P assoziiertes Vektorbündel auffassen, wobei die Darstellung ρ gerade der Identität entspricht. Eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M, TM)$ in M mit Werten in TM lässt sich mit einer horizontalen 1-Form $\bar{\omega} \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathbb{R}^n)^{\text{id}}$ vom Typ id identifizieren. Im Folgenden wollen wir eine spezielle Form dieser Art untersuchen.

3.41 **Definition** Die *kanonische 1-Form* $\theta \in \Omega^1(P, \mathbb{R}^n)$ ist definiert als

$$\theta_p(X) := [p]^{-1}(\text{d}\pi(X)), \quad X \in T_p P,$$

wobei $[p] : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p P$ den Faserisomorphismus bezeichnet. \times

Die kanonische 1-Form entspricht im Wesentlichen der Identität, modulo Identifikation.

3.42 **Lemma** a) Die kanonische 1-Form ist horizontal und vom Typ id , d.h.

$$\theta \in \Omega_{\text{hor}}^1(P, \mathbb{R}^n)^{\text{GL}_n} \cong \Omega^1(M, TM) = \Gamma(T^*M \otimes TM) = \Gamma(\text{End } TM).$$

b) Sei X ein Vektorfeld in M und $\bar{X} \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathbb{R}^n)^{\text{GL}_n}$ die zugehörige Funktion über \mathbb{R}^n , dann gilt

$$\theta(X^*) = \bar{X}.$$

c) Für die zu θ gehörige 1-Form $\hat{\theta} \in \Omega^1(M, TM)$ in M gilt $\hat{\theta} = \text{Id}_{TM}$. \times

Beweis. a): Da der vertikale Tangentialraum gerade als der Kern von $\text{d}\pi$ definiert ist, gilt $\text{pr}_h = \text{d}\pi$ und somit ist $\theta = [p]^{-1} \circ \text{d}\pi$ horizontal. Weiterhin gilt für $g \in \text{GL}_n$ und $X \in T_p P$,

$$\begin{aligned} (R_g^* \theta)_p(X) &= \theta_{pg}(\text{d}R_g(X)) = [p \cdot g]^{-1} \text{d}\pi(\text{d}R_g(X)) \\ &= g^{-1} [p]^{-1} \text{d}\pi(X) = g^{-1} \theta_p(X). \end{aligned}$$

Also ist θ auch vom Typ id .

b): Sei nun X ein Vektorfeld in M , dann gilt für $p \in P$

$$\theta(X_p^*) = [p]^{-1} d\pi(X^*) = [p]^{-1} X = \bar{X}.$$

c): Sei $x \in M$ und X ein Vektorfeld in M , dann gilt

$$\hat{\theta}_x(X) = [p, \theta(X_p^*)] = [p, \bar{X}_p] = X_x,$$

und folglich ist $\hat{\theta} = \text{Id}_{TM}$. ■

3.43 **Definition** Die *Torsionsform* des Zusammenhangs A ist definiert durch

$$\Theta^A := D_A \theta. \quad \times$$

Für einen Zusammenhang ∇ auf TM kennen wir bereits die Torsion

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

Durch obige Definition der Torsionsform Θ ist tatsächlich eine Verallgemeinerung der Torsion T auf TM gegeben.

3.44 **Lemma** a) Seien X und Y Vektorfelder in P , dann gilt

$$\Theta(X, Y) = d\theta(X, Y) + A(X)\theta(Y) - \theta(Y)A(X). \quad \times$$

b) Für Vektorfelder X und Y in M und $m \in M$ gilt

$$T_m(X, Y) = [p](\Theta_p(X^*, Y^*)), \quad p \in P_m. \quad \times$$

Beweis. a): Dies folgt direkt aus der Formel für das absolute Differential

$$\begin{aligned} \Theta(X, Y) &= D_A \theta(X, Y) = d\theta(X, Y) + \rho_*(A) \wedge \theta(X, Y) \\ &= d\theta(X, Y) + A(X)\theta(Y) - A(Y)\theta(X), \end{aligned}$$

denn die Darstellung ρ entspricht der Identität.

b): Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ mit zugehörigen Funktionen $\bar{X}, \bar{Y} \in C^\infty(P, \mathbb{R}^n)^{\text{GL}_n}$. Die kovariante Ableitung lässt sich dann schreiben als

$$(\nabla_X Y)_m = [p, d\bar{Y}_p(X^*)] = [p, X^*(\bar{Y})_p] = [p, X^*(\theta(Y))_p].$$

Da θ horizontal ist, folgt $\theta([X^*, Y^*]) = \theta([X, Y]^*)$ und somit ist

$$\begin{aligned} [p](\Theta_p(X^*, Y^*)) &= [p, d\theta_p(X^*, Y^*)] \\ &= [p, X^*\theta(Y^*) - Y^*\theta(X^*) - \theta([X, Y]^*)] \\ &= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])_m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Während das Quadrat des gewöhnlichen Differentials verschwindet $d^2 = 0$, involviert das Quadrat des absoluten Differentials die Krümmung, so dass

$$D_A \Theta = D_A^2 \theta = F^A \wedge \theta.$$

3.45 **Lemma** Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita Zusammenhang auf TM . Sei $P = P_{GL_n}$ das Rahmenbündel über M und A der durch ∇ induzierte Zusammenhang. Dann entspricht die Identität

$$D_A \Theta = F^A \wedge \theta$$

gerade der 1. Bianchi-Identität für den Krümmungstensor R . \times

Beweis. Der Levi-Civita Zusammenhang ist torsionsfrei. Somit verschwindet die Torsionsform $\Theta \equiv 0$ und folglich ist auch $D_A \Theta \equiv 0$. Seien also X, Y, Z Vektorfelder in M . Dann gilt

$$\begin{aligned} (F^A \wedge \theta)(X^*, Y^*, Z^*) &= F^A(X^*, Y^*)\theta(Z^*) + F^A(Y^*, Z^*)\theta(X^*) + F^A(Z^*, X^*)\theta(Y^*) \\ &= F^A(X^*, Y^*)\bar{Z} + F^A(Y^*, Z^*)\bar{X} + F^A(Z^*, X^*)\bar{Y}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt $[p]F^A(X^*, Y^*)\bar{Z} = R_{XY}Z$ und somit ist

$$0 = [p](F^A \wedge \theta)(X^*, Y^*, Z^*) = R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y.$$

Dies ist gerade die 2. Bianchi-Identität für R . \blacksquare

4 Parallelverschiebung, Geodätische und Exponentialabbildung

4-A Parallelverschiebung in Hauptfaserbündeln

Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und ein Zusammenhang auf P sei durch eine Zusammenhangsform $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ gegeben. Eine äquivalente Definition eines Zusammenhangs auf P ist durch eine Zerlegung des Tangentialbündels an P in einen horizontalen und einen vertikalen Teil

$$TP = T^hP \oplus T^\nu P,$$

durch rechtsinvariante Distributionen T^hP und $T^\nu P$ gegeben. „Vertikal“ ist dann so zu verstehen, dass $T^\nu P = \ker d\pi$, und „horizontal“ bedeutet, dass T^hP ein beliebiges Vektorraumkomplement zu $T^\nu P$ ist.

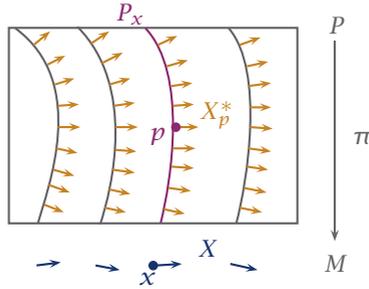
Eine weiteres zur Zusammenhangsform äquivalentes Konzept ist die Parallelverschiebung, die wir im Folgenden beschreiben wollen.

4.1 **Definition** Sei X ein Vektorfeld auf M . Ein Vektorfeld X^* auf P heißt *horizontaler Lift von X* , falls

- 1.) $d\pi(X^*) = X$, und
- 2.) $X_p^* \in T_p^hP$ für alle $p \in P$. \times

Der horizontale Lift eines Vektorfeldes X auf M ist ein horizontales Vektorfeld auf P , das π -verknüpft ist zu X . Der folgende Satz besagt nun, dass solch ein Vektorfeld immer existiert und sogar eindeutig bestimmt ist.

4.2 **Satz** a) Zu jedem Vektorfeld X auf M gibt es einen eindeutig bestimmten horizontalen Lift X^* .



4.1 Vektorfeld X in M mit horizontalem Lift X^*

b) Der horizontale Lift X^* ist rechtsinvariant, d.h.

$$dR_g(X_p^*) = X_{pg}^*, \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } g \in G.$$

c) Sei Z ein horizontales und rechtsinvariantes Vektorfeld auf P . Dann existiert ein Vektorfeld X auf M , so dass $X^* = Z$.

d) Seien X und Y Vektorfelder auf M und $f \in C^\infty(M)$, dann gelten

$$\begin{aligned} (X + Y)^* &= X^* + Y^*, \\ (fX)_p^* &= f(\pi(p)) X_p^*, \\ [X, Y]^* &= \text{pr}_h([X^*, Y^*]). \end{aligned}$$

e) Sei Z ein horizontales Vektorfeld auf P , und \tilde{B} das fundamentale Vektorfeld zu $B \in \mathfrak{g}$. Dann ist der Kommutator horizontal, d.h.

$$[Z, \tilde{B}] \in \Gamma(T^h P).$$

Ist Z sogar ein horizontaler Lift, so verschwindet der Kommutator, d.h. für jedes Vektorfeld X auf M ist

$$[X^*, \tilde{B}] = 0. \quad \times$$

Beweis. a): Durch die Wahl eines Zusammenhanges auf P zerfällt das Tangentialbündel in einen horizontalen und einen vertikalen Teil,

$$TP = T^h P \oplus T^v P.$$

Die Projektion π ist eine Submersion und, da $T^vP = \ker d\pi$ gilt, ist die Einschränkung ihres Differentials

$$d\pi : T^hP \rightarrow TM,$$

ein Isomorphismus. Man definiert nun punktweise den horizontalen Lift als

$$X_p^* := (d\pi|_{T^hP})^{-1}(X_{\pi(p)}).$$

Falls also ein horizontaler Lift zu X existiert, ist er bereits durch diese Formel eindeutig festgelegt. Um die Glattheit von X^* zu zeigen, betrachtet man zu einer offenen Umgebung $U \subset M$ die lokale Trivialisierung

$$\phi : P_U \rightarrow U \times G.$$

Da die lokale Trivialisierung ein Diffeomorphismus ist, ist ihr Differential ein Isomorphismus und man definiert lokal für $p \in P_U$,

$$Y_p := (d\phi)^{-1}(X_{\pi(p)} \oplus 0).$$

Dann ist Y ein glattes Vektorfeld auf P_U und $d\pi(Y) = X$, denn ϕ ist in der ersten Komponente gerade die Projektion auf M . Aufgrund der bereits gezeigten Eindeutigkeit gilt dann lokal $Y = X^*|_{P_U}$ und folglich ist X^* tatsächlich ein glattes Vektorfeld.

b): Der horizontale Tangentialraum ist eine rechtsinvariante Distribution, d.h. für jedes $g \in G$ und $p \in P$ gilt

$$dR_g(X_p^*) \in T_{pg}^hP.$$

Weiterhin wirkt G fasertreu, d.h. $\pi \circ R_g = \pi$. Damit gilt

$$d\pi \circ dR_g(X_p^*) = d\pi(X_p^*) = X_{\pi(p)}.$$

Aus der Eindeutigkeit von X^* folgt nun, dass $dR_g(X_p^*) = X_{pg}^*$ und somit ist X^* rechtsinvariant.

c): Sei Z ein horizontales und rechtsinvariantes Vektorfeld auf P . Dann definiert man punktweise für $m \in M$

$$X_m := d\pi(Z_p),$$

wobei $p \in P_m$ beliebig ist. Für ein anderes $q \in P_m$ gilt $q = p \cdot g$ für ein $g \in G$ und somit aufgrund der Rechtsinvarianz,

$$d\pi(Z_q) = d\pi(dR_g Z_p) = d\pi(Z_p) = X_m,$$

also ist X wohldefiniert. Aus der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts folgt nun, dass $X^* = Z$ gilt.

d): Der ersten beiden Formeln folgen sofort aus der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts. Weiterhin sind X und X^* π -verknüpft und daher sind auch die Kommutatoren π -verknüpft,

$$d\pi(\text{pr}_h([X^*, Y^*])) = d\pi([X^*, Y^*]) = [d\pi(X^*), d\pi(Y^*)] = [X, Y].$$

Somit ist $\text{pr}_h([X^*, Y^*])$ ein horizontaler Lift von $[X, Y]$ und aufgrund der Eindeutigkeit stimmt er mit $[X, Y]^*$ überein.

e): Sei Z ein horizontales Vektorfeld in P und $B \in \mathfrak{g}$. Der Fluss des fundamentalen Vektorfeldes \tilde{B} ist gegeben durch

$$\varphi_t : P \rightarrow P, \quad p \mapsto p \cdot \exp(tB),$$

d.h. $\varphi_t = R_{\exp(tB)}$. Somit gilt für den Kommutator

$$\begin{aligned} [\tilde{B}, Z]_p &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^*(Z_{\varphi(t)}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} dR_{\exp(-tB)}(Z_{p \exp(tB)}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist das Vektorfeld Z horizontal und der horizontale Tangentialraum ist rechtsinvariant. Also ist γ eine Kurve in $T_p^h P$ und daher ist $[\tilde{B}, Z]$ horizontal.

Ist Z außerdem rechtsinvariant, dann vereinfacht sich γ zu

$$\gamma(t) = dR_{\exp(-tB)}(Z_{p \exp(tB)}) = Z_p,$$

ist also konstant und folglich verschwindet der Kommutator. ■

Ein Vektorfeld auf M lässt sich somit in eindeutiger Weise zu einem horizontalen, rechtsinvarianten Vektorfeld auf P liften. Als nächstes wollen wir das Liften von Kurven in M betrachten.

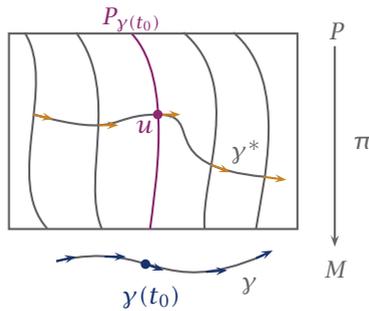
4.3 **Bemerkung zur Notation.** Sofern nicht anders angegeben bezeichne $I = [a, b]$ ein nichtentartetes endliches Intervall und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M .

Eine solche Kurve heißt *glatt*, wenn sie stückweise stetig differenzierbar ist. Für eine solche Kurve existiert dann ohnehin eine Parametrisierung, so dass die Kurve auf dem ganzen Intervall I stetig differenzierbar ist. Im Folgenden seien alle Kurven als glatt vorausgesetzt. \rightarrow

4.4 **Definition** Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M . Eine Kurve $\gamma^* : I \rightarrow P$ heißt *horizontaler Lift von γ* , falls

1.) $\pi(\gamma^*) = \gamma$, und

2.) $\dot{\gamma}^*(t) \in T_{\gamma^*(t)}^h P$ für alle $t \in I$. \times



4.2 **Kurve γ mit horizontalem Lift γ^* .**

4.5 **Satz** Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M , $t_0 \in I$ und $u \in P_{\gamma(t_0)}$. Dann existiert genau ein horizontaler Lift

$$\gamma_u^* : I \rightarrow P$$

von γ mit $\gamma_u^*(t_0) = u$. \times

Die Idee des Beweises beruht darin, das Problem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückzuführen und anschließend einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsatz anzuwenden.

- 4.6 **Allgemeiner EE-Satz** Sei G eine Lie-Gruppe und \mathfrak{g} die zugehörige Lie-Algebra. Weiterhin sei $\nu : I \rightarrow \mathfrak{g}$ eine stetige Kurve und $0 \in I$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte C^1 -Kurve $g : I \rightarrow G$ mit

$$g(0) = e, \quad \dot{g}(t) = \mathrm{d}R_{g(t)}(\nu(t)). \quad \times$$

Beweis. Wir beweisen nur den Fall, dass $I = [0, 1]$ ist. Dazu betrachten wir das Vektorfeld Z auf $G \times I$ definiert durch

$$Z_{(g,s)} := \left(\mathrm{d}R_g(\nu(s)), \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_s \right).$$

Sei $z \in G \times I$, dann existiert für $|t|$ hinreichend klein eine Integralkurve ϕ_t von Z mit

$$\phi_t(e, s) = (g(t), s + t),$$

wobei $g(0) = e$ und $\dot{g}(t) = \mathrm{d}R_g(\nu(t))$. Weiterhin ist $\{e\} \times [0, 1]$ kompakt, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass ϕ_t für alle Anfangswerte aus $\{e\} \times [0, 1]$ und für alle t mit $|t| < \varepsilon$ existiert. Zerlege nun $[0, 1]$ so, dass

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1, \quad |t_k - t_{k-1}| \leq \varepsilon.$$

Dann existiert $\phi_t = (g_1(t), t)$ auf $[0, t_1]$. Weiterhin existiert auf $[0, t_2 - t_1]$ die Lösung

$$\phi_t(e, t_1) = (g_2(t), t_1 + t),$$

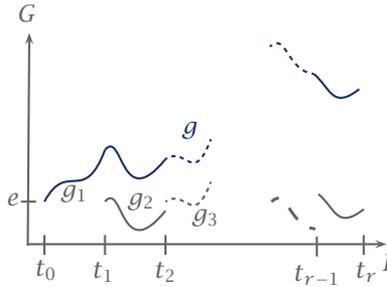
wobei $\dot{g}_2(t) = \mathrm{d}R_{g_2(t)}(\nu(t + t_1))$ und $g_2(0) = e$. Wir setzen nun

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ g_2(t - t_1)g_1(t_1), & t_1 < t \leq t_2. \end{cases}$$

Dann ist g auf $[0, t_2]$ definiert und stückweise differenzierbar. Weiterhin gilt für $t_1 < t \leq t_2$,

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= \mathrm{d}R_{g_1(t_1)}\dot{g}_2(t - t_1) \\ &= \mathrm{d}R_{g_1(t_1)}\mathrm{d}R_{g_2(t-t_1)}\nu(t) \\ &= \mathrm{d}R_{g_2(t-t_1)g_1(t_1)}\nu(t) \\ &= \mathrm{d}R_{g(t)}\nu(t). \end{aligned}$$

Analog setzt man g auf ganz $[0, 1]$ fort. ■



4.3 Zur Konstruktion der Kurvenstücke g_i auf $[0, t_i - t_{i-1}]$ und dem Verkleben zu g .

Beweis des Satzes. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $I = [0, 1]$ und $t_0 = 0$ ist. Da I kompakt ist, ist auch die Spur von γ kompakt. Sie liegt daher in endlich vielen offenen Mengen U_i über denen P lokal trivial ist. Mit Hilfe der lokalen Trivialisierungen

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G,$$

können wir die Kurve γ lokal in U_i zu einer Kurve auf P liften und anschließend mit der G -Wirkung die einzelnen Lifts zu einer differenzierbaren Kurve

$$\delta : I \rightarrow P, \quad \pi(\delta) = \gamma,$$

zusammensetzen, so dass $\delta(0) = u$ ist.

Gesucht ist nun eine Kurve $g : I \rightarrow G$ so, dass

$$\gamma_u^*(t) = \delta(t)g(t)$$

horizontal ist. Die Kurve γ_u^* ist genau dann horizontal, wenn die Spur ihrer Ableitung ganz im Kern der Zusammenhangsform A liegt. Mit der Produktformel berechnen wir

$$\begin{aligned} A(\dot{\gamma}_u^*(t)) &= A(dR_{g(t)}\dot{\delta}(t) + dL_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t)(\gamma_u^*(t))) \\ &= \text{Ad}(g(t)^{-1})A(\dot{\delta}(t)) + dL_{g(t)^{-1}}(\dot{g}(t)) \\ &= dL_{g(t)^{-1}}(dR_{g(t)}A(\dot{\delta}(t)) + \dot{g}(t)). \end{aligned}$$

Da $dL_{g(t)^{-1}}$ ein Isomorphismus ist, verschwindet $A(\dot{\gamma}_u^*(t))$ genau dann, wenn

$$0 = dR_{g(t)}A(\dot{\delta}(t)) + \dot{g}(t).$$

Setzen wir $\nu : I \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $\nu(t) = -A(\dot{\delta}(t))$, dann ist also eine Funktion $g : I \rightarrow G$ gesucht mit

$$g(0) = e, \quad \dot{g}(t) = dR_{g(t)}(\nu(t)).$$

Diese existiert nach dem allgemeinen EE-Satz. ■

4.7 **Definition** Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve in M . Die Abbildung

$$P_\gamma^A : P_{\gamma(a)} \rightarrow P_{\gamma(b)}, \quad u \mapsto \gamma_u^*(b),$$

heißt *Parallelverschiebung bezüglich A in P entlang γ* . ✕

Später können wir mit Hilfe dieser Definition ganz einfach eine Parallelverschiebung in Vektorbündeln, zum Beispiel dem Tangentialbündel, definieren.

4.8 **Bemerkung.** P^A ist unabhängig von der Parametrisierung von γ .

4.9 **Definition** 1.) Seien $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ und $\beta : [c, d] \rightarrow M$ zwei Kurven in M mit $\alpha(b) = \beta(c)$. Die *Hintereinanderausführung* $\beta \star \alpha$ von α und β ist definiert durch

$$\beta \star \alpha(t) := \begin{cases} \alpha(a + 2t(b - a)), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(c + (2t - 1)(d - c)), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

2.) Die zu $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ *inverse* Kurve ist definiert durch,

$$\alpha^- : [0, 1] \rightarrow M, \quad t \mapsto \alpha(b - t(b - a)). \quad \times$$

Die Hintereinanderausführung ist im Allgemeinen nur stückweise stetig differenzierbar, aber nach unserer Definition dennoch eine glatte Kurve.

4.10 **Satz** Seien α und β Kurven in M . Dann gelten:

a) $P_{\beta \star \alpha}^A = P_\beta^A \circ P_\alpha^A$.

b) P_α^A ist ein Diffeomorphismus und $(P_\alpha^A)^{-1} = P_{\alpha^-}^A$.

c) P_α^A ist G -äquivariant, d.h. für jedes $g \in G$ gilt,

$$R_g \circ P_\alpha^A = P_\alpha^A \circ R_g. \quad \times$$

Beweisidee. Eigenschaft a) folgt sofort aus der Definition der Parallelverschiebung. Weiterhin ist der horizontale Lift einer Kurve eindeutig und T^hP ist rechtsinvariant, also folgt auch Eigenschaft c). Für Eigenschaft b) genügt es die Glattheit der Abbildung

$$P_y^A : \pi^{-1}(y(a)) \rightarrow \pi^{-1}(y(b))$$

zu zeigen. Fixiere dazu $p_0 \in \pi^{-1}(y(a))$ und betrachte den Faserdiffeomorphismus

$$[p_0] : G \rightarrow \pi^{-1}(y(a)), \quad g \mapsto p_0 \cdot g.$$

Dann ist $p_1 := P_y^A(p_0) \in P$ und aufgrund der G -Äquivarianz gilt

$$P_y^A(p_0 \cdot g) = P_y^A(p_0) \cdot g,$$

also gilt auch $P_y^A \circ [p_0](g) = [p_1](g)$ und damit

$$P_y^A = [p_1] \circ [p_0]^{-1}.$$

Da die Faserdiffeomorphismen glatte Abbildungen sind, folgt sofort die Glattheit der Parallelverschiebung. ■

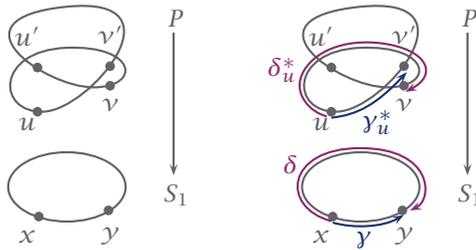
BEISPIEL 20 a.) Wir betrachten die zweifache Überlagerung der S^1 . Zu zwei Punkten x, y in S^1 existieren zunächst je zwei Lifts u, u' und v, v' in der zweifachen Überlagerung. Weiterhin gibt es zwei mögliche Kurven, die x und y verbinden, die kürzere benennen wir γ und die längere δ . Offenbar gilt

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= x, & \gamma(1) &= y, \\ \delta(0) &= x, & \delta(1) &= y. \end{aligned}$$

Weiterhin sind die Fasern der Überlagerung zweielementig, also diskret und folglich hat die Überlagerung dieselbe Dimension wie die S^1 . Somit sind auch ihre Tangentialräume isomorph und aus Dimensionsgründen gilt $T^hP = TP$. Insbesondere ist der gewöhnliche Lift einer Kurve automatisch horizontal. Liften wir also die Kurven γ und δ , zu γ_u^* und δ_u^* , so sind gilt

$$\begin{aligned} \gamma_u^*(0) &= u, & \gamma_u^*(1) &= v', \\ \delta_u^*(0) &= u, & \delta_u^*(1) &= v. \end{aligned}$$

Also ist $\gamma_u^*(1) = v' \neq v = \delta_u^*(1)$. Somit hängt die Parallelverschiebung in S^1 vom gewählten Weg ab!



4.4 Zweifache Überlagerung der S^1 (links), sowie mit den x und y verbinden Kurven samt Lifts (rechts)

b.) Sei $\pi : P_0 = M \times G \rightarrow M$ das triviale G -Hauptfaserbündel versehen mit dem kanonischen flachen Zusammenhang $A_0 = \text{dpr}_2$. Dieser Zusammenhang ist äquivalent dazu, für einen Punkt (x, g) in P den horizontalen Tangentialraum als

$$T_{(x,g)}^h P \cong T_x M$$

festzulegen. Sei nun γ eine Kurve in M mit Anfangspunkt x und Endpunkt y . Der horizontale Lift von γ ist nun einfach gegeben durch

$$\gamma_{(x,g)}^*(t) = (\gamma(t), g).$$

Die Parallelverschiebung entlang γ bezüglich A_0 hat somit die Form

$$P_\gamma^{A_0} : (P_0)_x = \{x\} \times G \rightarrow \{y\} \times G = (P_0)_y, \quad (x, g) \mapsto (y, g).$$

Sie hängt damit offenbar nicht von der Wahl des Weges γ ab, der x und y verbindet. ■

Im Allgemeinen hängt die Parallelverschiebung von der Wahl des Weges ab. Im Extremfall des trivialen Hauptfaserbündels versehen mit dem kanonischen flachen Zusammenhang jedoch nicht. Wir werden sehen, dass die Unabhängigkeit der Parallelverschiebung von der Wahl des Weges bemerkenswerte Konsequenzen hat. Im Fall einer einfach zusammenhängenden Basismannigfaltigkeit ist die Unabhängigkeit außerdem äquivalent dazu, dass die Krümmung des Zusammenhangs verschwindet.

4.11 **Satz** Sei die Parallelverschiebung auf P bezüglich A unabhängig von der Wahl des Weges. Dann existiert ein G -Hauptfaserbündelisomorphismus

$$\phi : P_0 \rightarrow P, \quad \text{mit} \quad \phi^* A = A_0,$$

wobei P_0 das triviale G -Hauptfaserbündel versehen mit dem kanonischen flachen Zusammenhang A_0 bezeichnet. Man schreibt dafür auch (P, A) ist *isomorph* zu (P_0, A_0) .

×

Ist also die Parallelverschiebung unabhängig von der Wahl des Weges, dann ist das Hauptfaserbündel trivial und der Zusammenhang ist ein Pull-back des kanonischen flachen Zusammenhangs, also ebenfalls trivial. Wir haben bereits gezeigt, dass ein Hauptfaserbündel P genau dann trivial ist, wenn ein globaler Schnitt

$$s : M \rightarrow P.$$

existiert. Wir suchen nun nach Bedingungen an den Schnitt s , so dass der Zusammenhang A auf P trivial wird.

4.12 **Lemma** *Das G -Hauptfaserbündel (P, A) ist isomorph zu (P_0, A_0) genau dann, wenn ein globaler, horizontaler Schnitt existiert, d.h. ein Schnitt*

$$s : M \rightarrow P, \quad ds(TM) = T^h P. \quad \times$$

Beweis. \Rightarrow : Sei $\phi : P_0 = M \times G \rightarrow P$ ein Isomorphismus mit $\phi^* A = A_0$. Dann gilt $\ker A = d\phi(\ker A_0)$ und somit gilt für jeden Punkt (x, g) in P ,

$$d\phi(T_{(x,g)}(M \times \{g\})) = T_{\phi(x,g)}^h P.$$

Ein globaler Schnitt von P ist gegeben durch

$$s : M \rightarrow P, \quad s(x) = \phi(x, e).$$

Weiterhin ist $T_x M \cong T_{(x,g)}(M \times \{g\})$ für jedes $g \in G$ und folglich

$$ds(T_x M) = d\phi(T_{(x,e)}(M \times \{e\})) = T_{\phi(x,e)}^h P = T_{s(x)}^h P.$$

Also ist der Schnitt s auch horizontal.

\Leftarrow : Sei $s : M \rightarrow P$ ein A -horizontaler Schnitt, d.h. $ds(TM) = T^h P$. Als Trivialisierung von P wählen wir

$$\phi : P_0 \rightarrow P, \quad (x, g) \mapsto s(x) \cdot g = R_g s(x).$$

Dann ist ϕ Diffeomorphismus, denn s ist ein globaler Schnitt und G wirkt einfach transitiv und frei auf P . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} d\phi(T_{(x,g)}(M \times \{g\})) &= dR_g \circ ds(T_x M) = dR_g(T_{s(x)}^h P) \\ &= T_{s(x)g}^h P = T_{\phi(x,g)} P, \end{aligned}$$

denn $T^h P$ ist eine rechtsinvariante Distribution. ■

Um den Satz zu beweisen, genügt es also einen horizontalen, globalen Schnitt zu konstruieren.

Beweis des Satzes. Sei die Parallelverschiebung unabhängig von der Wahl des Weges. Wir fixieren $x_0 \in M$ und $u_0 \in P_{x_0}$, und definieren einen Schnitt durch

$$s : M \rightarrow P, \quad x \mapsto s(x) := P_\gamma^A(u_0) = \gamma_{u_0}^*(1),$$

wobei $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ ein beliebiger Weg von x_0 nach x sei. Aufgrund der Unabhängigkeit der Parallelverschiebung von der Wahl des Weges ist s wohldefiniert. Weiterhin hängt $\gamma_{u_0}^*(1)$ als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung differenzierbar vom Anfangswert x ab, also ist s differenzierbar. Sei nun $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ eine Kurve durch x mit $\dot{\alpha}(0) = X \in T_x M$, dann gilt

$$ds(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} s \circ \alpha(t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{\gamma \star \alpha}^A(u_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\gamma \star \alpha)_{u_0}^*(t) \in T^h P,$$

wobei γ eine Kurve von x_0 nach x bezeichnet. Somit ist s ein horizontaler, globaler Schnitt in P und nach dem vorangegangenen Lemma ist daher P trivial mit trivialem Zusammenhang. ■

Der Zusammenhang A auf P heißt flach, wenn seine Krümmung verschwindet, d.h. $F^A \equiv 0$. Aus dem Satz von Frobenius folgt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die horizontale Distribution $T^h M$ integrierbar ist. Mit Hilfe des vorangegangenen Satzes können wir die Aussage wie folgt erweitern.

4.13 **Satz** Sei A ein Zusammenhang auf P . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) A ist flach.
- (ii) $T^h P \subset TP$ ist integrierbar.
- (iii) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M , so dass (P_{U_i}, A) isomorph ist zum trivialen G -Hauptfaserbündel über U_i mit dem kanonischen flachen Zusammenhang.
- (iv) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M , so dass die Parallelverschiebung auf jedem P_{U_i} unabhängig von der Wahl des Weges ist.
- (v) Es existiert eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von M und lokale, horizontale Schnitte

$$s_i : U_i \rightarrow P, \quad ds_i(TM) = T^h P. \quad \times$$

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii) war eine Konsequenz aus dem Satz von Frobenius, die wir bereits in Satz 3.35 gezeigt haben.

(iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v): (iii) \Leftrightarrow (v) ist die Aussage des vorangegangenen Lemmas, (v) \Rightarrow (iii) die Aussage des vorangegangenen Satzes und (iv) \Rightarrow (iii) haben wir in Beispiel b.) gezeigt.

(ii) \Rightarrow (iii): Sei also $F^A \equiv 0$. Dann ist T^hP integrabel, d.h. für jeden Punkt $p \in P$ existiert eine maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit N_p so, dass für $q \in N_p$ gilt, $T_q N_p = T_q^h P$. Somit entspricht der Tangentialraum an N_p gerade dem horizontalen Tangentialraum an P , welcher wiederum zu TM isomorph ist. Also haben N_p und M dieselbe Dimension. Weiterhin ist die Projektion

$$\pi : P \rightarrow M$$

eine Submersion und folglich ihre Einschränkung

$$\pi|_{N_p} : N_p \rightarrow M$$

eine Überlagerung, d.h. für eine hinreichend kleine Umgebung $U \subset M$ von $\pi(p)$ ist

$$\pi^{-1}(U) \cap N_p = \bigcup N_i,$$

die disjunkte Vereinigung offener Mengen N_i so, dass

$$\pi|_{N_i} : N_i \rightarrow M$$

ein Diffeomorphismus ist. Man kann somit eine Überdeckung von M und lokale horizontale Schnitte

$$s : U \rightarrow N_i \subset P, \quad s_i := (\pi|_{N_i})^{-1}$$

definieren.

(iii) \Rightarrow (i): Sei eine Überdeckung von P mit horizontalen Schnitten gegeben. Die Krümmung ist eine horizontale 2-Form und verschwindet somit bereits auf vertikalen Vektoren. Wir müssen daher nur zeigen, dass sie auch auf horizontalen Vektoren verschwindet. Wähle dazu $x \in M$ und $p \in P_x$. Dann existiert ein horizontaler, lokaler Schnitt $s_i : U_i \rightarrow P$, so dass $x \in U_i$ und

$$ds_i : T_x U_i \rightarrow T^h P_{U_i}$$

ein Isomorphismus ist. Für horizontale Vektoren $X, Y \in T^h_p P$ existieren dann Urbilder $V, W \in T_x M$ so, dass

$$ds_i(V) = X, \quad ds_i(W) = Y.$$

Nach dem vorangegangenen Satz ist (P, A) lokal isomorph zum trivialen Bündel mit dem kanonischen flachen Zusammenhang, also ist

$$F^{s_i} = s_i^* F^A \equiv 0.$$

Dann gilt aber auch

$$F^A(X, Y) = F^A(ds_i(V), ds_i(W)) = s_i^* F(V, W) = 0.$$

Also verschwindet die Krümmung auch auf den horizontalen Vektorfeldern und ist somit identisch Null. ■

4.14 *Bemerkungen.* A. Alternativ kann man die lokalen Schnitte auch mittels Geodätischen definieren. Zu $x_0 \in M$ existiert eine Normalenumgebung U von x_0 , so dass zwischen x_0 und einem anderen Punkt $x \in U$ eine eindeutig bestimmte Geodätische y existiert. Man definiert dann für ein beliebiges $u \in P_{x_0}$,

$$s : U \rightarrow P, \quad s(x) := P_y^A(u).$$

B. Ist die Basismannigfaltigkeit M einfach zusammenhängend, dann lässt sich die Aussage wie folgt des vorangegangenen Satzes globalisieren. Angenommen die Fundamentalgruppe von M ist trivial, d.h. $\pi_1 M = 1$, dann verschwindet die Krümmung des Zusammenhangs genau dann, wenn die Parallelverschiebung nicht vom gewählten Weg abhängt,

$$F^A \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_y^A \text{ ist unabhängig vom gewählten Weg.}$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, dass $F^A \equiv 0$ die Unabhängigkeit von der Wahl des Weges impliziert.

Seien $x, y \in M$ und γ bzw. δ Wege, die x und y verbinden. Da M einfach zusammenhängend ist, sind γ und δ homotop. Es existiert also eine Homotopie F mit

$$F : I \times I \rightarrow M, \quad F_0(t) = \gamma(t), \quad F_1(t) = \delta(t).$$

Da die Krümmung des Zusammenhangs verschwindet, ist P lokal trivial. Man zerlegt nun $I \times I$ in kleine Kästchen K_i so, dass $P_{F(K_i)}$ trivial ist. Wir betrachten nur den Fall von vier Kästchen (siehe Abbildung ??), der allgemeine Fall folgt

analog. Für jedes Kästchen K_i ist die Parallelverschiebung auf $P_{F(K_i)}$ unabhängig vom gewählten Weg. Somit gilt dann

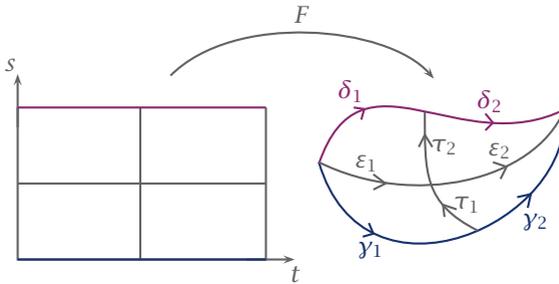
$$P_{\delta_1} = P_{\tau_2} \circ P_{\varepsilon_1} = P_{\tau_2} \circ P_{\tau_1} \circ P_{\gamma_1},$$

$$P_{\delta_2} = P_{\varepsilon_2} \circ P_{\tau_2^-} = P_{\gamma_2} \circ P_{\tau_1^{-1}} \circ P_{\tau_2^-}.$$

Also ist

$$P_{\delta} = P_{\delta_2} \circ P_{\delta_1} = P_{\gamma_2} \circ P_{\tau_1^{-1}} \circ P_{\tau_2^-} \circ P_{\tau_2} \circ P_{\tau_1} \circ P_{\gamma_1}$$

$$= P_{\gamma_2} \circ P_{\gamma_1} = P_{\gamma}. \quad \blacksquare \quad \rightarrow$$



4.5 Zum Beweis der Unabhängigkeit der Wahl des Weges.

4-B Parallelverschiebung in Vektorbündeln

Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit Zusammenhang A und G wirke von links auf einer Mannigfaltigkeit F . Das assoziierte Faserbündel bezeichnen wir mit

$$E = P \times_G F, \quad [p, v] \sim [p \cdot g, g^{-1}v].$$

4.15 **Definition** Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M . Die *Parallelverschiebung in E entlang γ* ist definiert durch

$$P_{\gamma}^E : E_{\gamma(0)} \rightarrow E_{\gamma(b)}, \quad [p, v] \mapsto [P_{\gamma}^A p, v]. \quad \times$$

- 4.16 *Bemerkungen.* A. Durch diese Definition ist die Parallelverschiebung in E tatsächlich wohldefiniert. Sei $[p, \nu] \in E$, dann gilt für $g \in E$ aufgrund der G -Äquivarianz von P_Y^A ,

$$\begin{aligned} P_Y^E[p \cdot g, g^{-1} \cdot \nu] &= [P_Y^A(p \cdot g), g^{-1} \cdot \nu] = [R_g P_Y^A p, g^{-1} \cdot \nu] = [P_Y^A p, \nu] \\ &= P_Y^E[g, \nu]. \quad \circ \end{aligned}$$

- B. Sei y^* ein horizontaler Lift von y , dann gilt

$$P_Y^E = [y^*(b)] \circ [y^*(a)]^{-1},$$

wobei $[p] : F \rightarrow E, \nu \mapsto [p, \nu]$.

Beweis. Setze $p = y^*(a)$, dann genügt es die Aussage für die Äquivalenzklasse $[p, \nu]$ zu zeigen. Dann ist

$$P_Y^A p = y^*(b),$$

und folglich

$$[y^*(b)][y^*(a)]^{-1}[p, \nu] = [y^*(b)]\nu = [y^*(b), \nu] = P_Y^E[p, \nu]. \quad \blacksquare$$

- C. Ist E ein Vektorbündel, dann ist P_Y^E ein Vektorraumisomorphismus. \circ

BEISPIEL 21 Sei $E = TM$ das Tangentialbündel, dann ist $E = P_{GL_n} \times_{GL_n} \mathbb{R}^n$. Weiterhin sei $x \in M$ und $p = (e_1, \dots, e_r)$ eine Basis von $T_x M$. Ein Tangentialvektor $\nu \in T_x M$ lässt sich schreiben als

$$\nu = \sum_{i=1}^r \nu_i e_i.$$

Zu einer Kurve $y : I \rightarrow M$ mit $y(a) = x$, ist die Parallelverschiebung

$$P_Y^A(p) = y_p^*(t) = (e_1(t), \dots, e_r(t))$$

eine Kurve im Rahmenbündel. Die Parallelverschiebung in TM ist nun gegeben durch

$$P_Y^{TM} : T_x M \rightarrow T_{y(t)} M, \quad \nu \mapsto \sum_{i=1}^r \nu_i e_i(t). \quad \blacksquare$$

Ein Zusammenhang auf dem Hauptfaserbündel induziert eine kovariante Ableitung auf den assoziierten Faserbündeln. Diese kovariante Ableitung können wir nun auch mittels der Parallelverschiebung beschreiben.

4.17 **Satz** Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit Zusammenhang A und sei E ein assoziiertes Vektorbündel mit der von A induzierten kovarianten Ableitung ∇^A . Dann gilt für ein Vektorfeld X auf M und einen Schnitt e in E

$$(\nabla_X^A e)_m = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P^E e(\gamma(t)),$$

wobei $P^E : E_{\gamma(t)} \rightarrow E_{\gamma(0)}$ die Parallelverschiebung entlang γ beschreibt und γ eine Kurve in M ist mit $\gamma(0) = m$ und $\dot{\gamma}(0) = X_m$. \times

Beweis. Sei γ^* ein horizontaler Lift von γ , dann ist

$$P^E = [\gamma^*(0)] \circ [\gamma^*(t)]^{-1},$$

und $\dot{\gamma}^*(0) = X_p^*$. Weiterhin gilt $e(\pi(p)) = [p, \bar{e}(p)]$, also ist $e(\gamma(t)) = [\gamma^*(t), \bar{e}(\gamma^*(t))]$ und folglich

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P^E e(\gamma(t)) &= [\gamma^*(0)] \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} [\gamma^*(t)]^{-1}(e(\gamma(t))) \right) \\ &= [\gamma^*(0)] (d\bar{e}(\dot{\gamma}^*(0))) \\ &= [p, d\bar{e}(X_p^*)] = (d_A e)(X_m) \\ &= (\nabla_X^A e)_m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4-C Parallelverschiebung im Tangentialbündel

Für Vektorbündel wie das Tangentialbündel TM über einer Mannigfaltigkeit M gibt es einen direkteren und weniger abstrakten Weg, die Parallelverschiebung zu definieren. Wir wollen dies im Folgenden am Beispiel des Tangentialbündels erarbeiten und zeigen, dass dieser Zugang äquivalent zur Definition von Parallelverschiebung in assoziierten Faserbündeln ist. Allerdings fehlt einem bei diesem Zugang das „big picture“, dass sich nämlich zahlreiche Objekte, einmal für das G -Hauptfaserbündel P definiert, auf die assoziierten Vektorbündel

$$E = P \times_{\rho} V, \quad \rho : G \rightarrow GL(V),$$

übertragen, wobei man bereits viele interessante Vektorbündel erhält, wenn man den Totalraum P festhält und lediglich die Darstellung variiert. Nichts desto trotz bietet der folgende, elementare Zugang ebenfalls seine Vorzüge, weshalb wir ihn auch präsentieren.

4.18 **Definition** Ein *Vektorfeld entlang einer Kurve* $\gamma : I \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung

$$X : I \rightarrow TM,$$

mit $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in I$. Den *Raum aller Vektorfelder entlang γ* bezeichnen wir mit $\chi(\gamma)$. \times

4.19 **Bemerkung.** Der Raum $\chi(\gamma)$ ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} . Für ein Vektorfeld X entlang γ und eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch wiederum

$$fX : I \rightarrow TM, \quad t \mapsto f(t)X(t)$$

ein Vektorfeld entlang γ . Somit ist $\chi(\gamma)$ außerdem ein $C^\infty(I)$ -Modul. \rightarrow

BEISPIEL 22 a.) Betrachten wir zu einer Kurve γ in M die erste Ableitung

$$\dot{\gamma} : I \rightarrow TM,$$

so ist dies offenbar ein Vektorfeld entlang γ .

b.) Schränken wir ein gegebenes Vektorfeld $X \in \chi(M)$ auf die Spur der Kurve γ ein,

$$X_\gamma := X \circ \gamma$$

so ist die Einschränkung X_γ ein Vektorfeld entlang γ . \blacksquare

4.20 **Satz** Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer kovarianten Ableitung ∇ auf TM . Dann existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\frac{\nabla}{dt} : \chi(\gamma) \rightarrow \chi(\gamma),$$

mit den folgenden Eigenschaften:

a) $\frac{\nabla}{dt}$ ist \mathbb{R} -linear.

b) Für alle Vektorfelder $X \in \chi(y)$ und $f \in C^\infty(I)$ gilt

$$\frac{\nabla}{dt}(f \cdot X) = \frac{df}{dt}X + f \frac{\nabla}{dt}X.$$

c) Falls $X_y = X \circ \gamma$ für ein Vektorfeld $X \in \chi(M)$, dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt}(X_y) = \nabla_{\dot{\gamma}}X. \quad \times$$

Die Beweisidee beruht darauf, in lokalen Koordinaten aus den Eigenschaften a)-c) eine explizite, eindeutige und von der Wahl der Koordinaten unabhängige Formel für $\frac{\nabla}{dt}$ herzuleiten. Dann definiert man $\frac{\nabla}{dt}$ mit Hilfe dieser Formel und zeigt wiederum, dass mit dieser Definition die Eigenschaften a)-c) erfüllt sind.

Beweis. Sei (U, α) eine Karte in M und $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve. Da die Spur von γ kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass γ ganz in U liegt. Wir schreiben dann

$$\alpha \circ \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

für die Komponenten von γ . Sei X ein Vektorfeld entlang γ , dann besitzt es die lokale Darstellung

$$X(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Angenommen es gibt solch eine Abbildung $\frac{\nabla}{dt}$. Dann man berechnet für X mit Hilfe der \mathbb{R} -Linearität (a) und der Derivationsregel (b),

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt}X(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\nabla}{dt} \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{df_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} + f_i \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \right). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt nach Eigenschaft (c), dass

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} \right) &= \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)} = \sum_{j=1}^n \dot{\gamma}_j(t) \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{j,k=1}^n \dot{\gamma}_j(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

wobei Γ_{ji}^k die Christoffelsymbole der kovarianten Ableitung ∇ bezeichnen. Somit erhalten wir für $\frac{\nabla}{dt}$ die lokale Darstellung

$$\frac{\nabla}{dt}X = \sum_{i=1}^n \left(\frac{df_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + f_i \sum_{j,k=1}^n \dot{y}_j \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \quad (*)$$

Die Bedingungen (a)-(c) legen somit die Abbildung $\frac{\nabla}{dt}$ in lokalen Koordinaten eindeutig fest. Aus Eigenschaft b) folgt, unter Verwendung von Abschneidefunktionen, dass es keinen Unterschied macht, ob man X zuerst lokalisiert und anschließend ableitet, oder ob man zuerst ableitet und dann lokalisiert. Somit ist es gerechtfertigt, die Definition von $\frac{\nabla}{dt}$ zunächst nur lokal anzugeben. Es verbleibt zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt, und dass durch (*) tatsächlich die Eigenschaften a)-c) erfüllt sind. ■

4.21 *Bemerkung zur Notation.* Anstatt $\frac{\nabla}{dt}$ schreibt man auch

$$\frac{\nabla}{dt}X \equiv \dot{X} \equiv \nabla_{\dot{y}}X.$$

Es gilt dabei zu beachten, dass mit \dot{X} oder $\nabla_{\dot{y}}X$ im Allgemeinen immer $\frac{\nabla}{dt}$ gemeint ist und nicht die Zeitableitung oder die kovariante Ableitung im üblichen Sinne. Eigenschaft (iii) besagt ja gerade, dass $\frac{\nabla}{dt}X = \nabla_{\dot{y}}X$ nur für Vektorfelder $X = X_y$, die durch Einschränkung eines Vektorfeldes M hervorgegangen sind, gilt.

Ist X gerade die erste Ableitung der Kurve y , d.h. $X = \dot{y}$, dann schreibt man auch

$$\frac{\nabla}{dt}X = \dot{X} = \ddot{y}. \quad \rightarrow$$

Ein Zusammenhang ∇ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt metrisch, falls

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

d.h. die Lie-Ableitung nach X ist kompatibel mit der Metrik g und erfüllt eine Art Produktregel. Eine analoge Aussage gilt auch für die Abbildung $\frac{\nabla}{dt}$.

4.22 **Korollar** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ein metrischer Zusammenhang auf TM . Für Vektorfelder $X_1, X_2 \in \chi(y)$ gilt dann

$$\frac{d}{dt}g(X_1, X_2) = g(\dot{X}_1, X_2) + g(X_1, \dot{X}_2). \quad \times$$

Im letzten Semester haben wir gesehen, dass der Zusammenhang ∇ genau dann metrisch ist, wenn die Metrik g parallel ist, d.h.

$$\nabla g \equiv 0.$$

Parallele Objekte haben zahlreiche angenehme Eigenschaften und sind in vielen Situationen leichter zu handhaben. Mit Hilfe des eben erarbeiteten Ableitungsbegriffes, lässt sich Parallelität sehr elementar für Vektorfelder entlang einer Kurve definieren.

4.23 **Definition** Ein Vektorfeld $X \in \chi(y)$ heißt *parallel*, falls $\dot{X} = 0$. \times

BEISPIEL 23 Betrachten wir $M = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardmetrik und dem flachen Zusammenhang. Dann verschwinden alle Christoffelsymbole, d.h. $\Gamma_{ji}^k \equiv 0$ und für ein Vektorfeld entlang y ,

$$X = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

nimmt die Formel (*) die besonders einfache Form

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^n \frac{df_i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

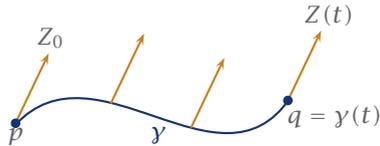
an. Somit ist X genau dann parallel, also $\dot{X} = 0$, wenn die Koeffizientenfunktionen konstant sind, d.h. $\dot{f}_i \equiv 0$. Dies entspricht auch der Vorstellung, denn das Vektorfeld X ändert beim Verlauf entlang y seine Richtung nicht. \blacksquare

4.24 **Lemma** Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine glatte Kurve und $Z_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ für ein $t_0 \in I$. Dann existiert genau ein paralleles Vektorfeld $Z \in \chi(\gamma)$ mit

$$Z(t_0) = Z_0. \quad \times$$

Beweis. Die Bedingung $\dot{X} \equiv 0$ ist nach Gleichung (*) äquivalent zu n gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{f}_i = - \sum_{j,k=1}^n \dot{\gamma}_j \Gamma_{jk}^i f_k, \quad i = 1, \dots, n.$$



4.6 Parallelverschiebung eines Tangentialvektors Z_0 entlang γ .

Diese besitzen nach dem allgemeinen Existenz und Eindeutigkeitsatz eine eindeutige lokale Lösung

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

Außerdem hängen die Lösungen differenzierbar vom Anfangswert ab. Die f_i liefern nun die Koeffizienten des gesuchten Vektorfeldes Z . ■

Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas können wir nun ganz einfach eine Parallelverschiebung im Tangentialbündel definieren. Gegeben sei ein Tangentialvektor $Z_0 \in T_x M$ an einen Punkt $p \in M$. Für einen weiteren Punkt $q \in M$ wählt man nun eine Kurve γ , die x und y verbindet und für die $\dot{\gamma}(0) = Z_0$ gilt. Nun existiert ein eindeutig bestimmtes, paralleles Vektorfeld entlang dieser Kurve γ . Mit diesem Vektorfeld kann man Z_0 von $T_p M$ parallel nach $T_q M$ verschieben.

4.25 **Definition** Sei γ eine Kurve in M , dann heißt die Abbildung

$$\tau : T_{\gamma(t_0)} M \rightarrow T_{\gamma(t)} M, \quad Z_0 \mapsto Z(t),$$

mit $Z \in \chi(\gamma)$ parallel und $Z(t_0) = Z_0$, *Parallelverschiebung entlang γ* . ✕

BEISPIEL 24 Betrachten wir wieder $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik und dem flachen Zusammenhang. Dann ist die Parallelverschiebung gerade durch die gewöhnliche Translation von Vektoren gegeben. ■

Im Allgemeinen hängt die Parallelverschiebung vom Zusammenhang ab und kann beliebig kompliziert werden. Die Menge aller möglichen Parallelverschiebungen lässt sich durch die Holonomiegruppe (siehe Kapitel ??) beschreiben.

4.26 **Bemerkung zur Notation.** Sei γ eine Kurve in M , die x und y verbindet, so bezeichnen wir die Parallelverschiebung entlang γ auch mit

$$\tau \equiv \tau(\gamma) \equiv \tau_{x\gamma} : T_x M \rightarrow T_y M. \quad \rightarrow$$

Die Parallelverschiebung im Hauptfaserbündel P_Y^A beschreibt einen Diffeomorphismus der Fasern. Ein analoges Resultat gilt auch für die so definierte Parallelverschiebung im Tangentialbündel, nur dass τ aufgrund der linearen Struktur sogar ein Isomorphismus ist.

4.27 **Lemma** a) Die Parallelverschiebung ist ein linearer Isomorphismus

$$\tau_{xy} : T_x M \rightarrow T_y M, \quad x, y \in M.$$

b) Sei g eine Metrik auf M . Der Zusammenhang ∇ ist genau dann metrisch, wenn τ_{xy} eine Isometrie ist. \times

Beweis. a): Aufgrund der Eindeutigkeit des parallelen Vektorfeldes an y folgt sofort die Linearität von τ . Außerdem hängen die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung differenzierbar vom Anfangswert ab, also ist τ auch differenzierbar. Letztlich folgt aus der Eindeutigkeit, dass τ_{yx} invers ist zu τ_{xy} und folglich ist τ ein linearer, differenzierbarer Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen an x und y .

b): \Rightarrow : Sei ∇ ein metrischer Zusammenhang auf TM , dann gilt für Vektorfelder X und Y entlang γ , dass

$$\frac{d}{dt} g(X, Y) = g(\dot{X}, Y) + g(X, \dot{Y}).$$

Sind nun X und Y parallel, so verschwindet die rechte Seite und $g(X, Y)$ ist konstant. Wähle also $X_0, Y_0 \in T_x M$, so gilt

$$(\tau_{xy}^* g)(X_0, Y_0) = g(\tau_{xy} X_0, \tau_{xy} Y_0) = g(X(t), Y(t)) = g(X_0, Y_0),$$

denn $X(t)$ und $Y(t)$ sind parallele Vektorfelder entlang γ mit Anfangswert X_0 bzw. Y_0 . Somit ist τ_{xy} eine Isometrie.

\Leftarrow : Sei τ_{xy} eine Isometrie, dann gilt für parallele Vektorfelder X, Y entlang γ ,

$$g(X(t), Y(t)) = (\tau_{pq}^* g)(X_0, Y_0) = g(X_0, Y_0).$$

Somit ist $g(X(t), Y(t))$ konstant. Wähle nun in p eine Orthonormalbasis $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ von $T_p M$ und definiere

$$\partial_i(t) := \tau_{xy}(\partial_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist nach obiger Rechnung auch $(\partial_1(t), \dots, \partial_n(t))$ eine Orthonormalbasis, d.h.

$$g(\partial_i(t), \partial_j(t)) = \delta_{ij}, \quad t \in I.$$

Somit hängt die Entwicklung von $g(X(t), Y(t))$ nur von den Koeffizientenfunktionen ab. Genauer seien

$$X(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \partial_i(t), \quad Y(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t) \partial_j(t),$$

dann gilt für die Metrik

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^n a_i(t) b_j(t) g(\partial_i(t), \partial_j(t)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\dot{f}_i(t) g_j(t) + f_i(t) \dot{g}_j(t) \right) \delta_{ij} \\ &= g(\dot{X}(t), Y(t)) + g(X(t), \dot{Y}(t)). \end{aligned}$$

Seien nun $Z \in T_x M$ und X, Y Vektorfelder auf M . Weiterhin sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve durch x mit $\dot{\gamma}(0) = Z$. Dann gilt nach dem bisher gezeigten,

$$\begin{aligned} Zg(X, Y) &= \left. \frac{d}{dt} g(X, Y) \right|_{t=0} \circ \gamma(t) \\ &= \left. \frac{d}{dt} g_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)}) \right|_{t=0} \\ &= g(\dot{X}_{\gamma(0)}, Y_p) + g(X_p, \dot{Y}_{\gamma(0)}) \\ &= g(\nabla_Z X, Y_p) + g(X_p, \nabla_Z Y), \end{aligned}$$

denn $\dot{X}_{\gamma(0)} = \nabla_{\dot{\gamma}(0)} X = \nabla_Z X$. Also ist ∇ metrisch und dies war zu zeigen. ■

Sei ∇ ein Zusammenhang auf TM . Wir schreiben das Tangentialbündel

$$TM = P_{\text{GL}_n} \times_{\text{GL}_n} \mathbb{R}^n =: E$$

als assoziiertes Vektorbündel zum Rahmenbündel P_{GL_n} und versehen P_{GL_n} mit dem durch ∇ induzierten Zusammenhang A . Dann verfügen wir über zwei Parallelverschiebungen, nämlich einerseits die induzierte Parallelverschiebung

$$P_Y^E : E_x \rightarrow E_y, \quad [p, \nu] \mapsto [P_Y^A p, \nu],$$

und die soeben definierte Parallelverschiebung

$$\tau_{xy} : T_x M \rightarrow T_y M, \quad Z_0 \mapsto Z(b).$$

Zum Abschluss zeigen wir, diese zwei Definitionen tatsächlich äquivalent sind.

4.28 **Satz** Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M . Dann gilt

$$\tau_\gamma = P_\gamma^E. \quad \times$$

Beweis. Sei $x \in M$ und $X \in T_x M$. Weiterhin sei γ eine Kurve in M durch x mit $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist die durch den Zusammenhang A induzierte Parallelverschiebung gegeben durch

$$X(t) = P_{\gamma(t)}^E X = [\gamma^*(0)] \circ [\gamma^*(t)]^{-1} X,$$

wobei γ^* den horizontalen Lift von γ nach P bezeichnet. Offenbar ist $X(t)$ ein Vektorfeld entlang γ . Weiterhin gilt die Formel

$$\frac{\nabla}{dt} X(t) = \frac{d}{ds} \left(P_{\gamma|_{[t,t+s]}}^E \right)^{-1} (X(t+s)).$$

Nun gilt jedoch

$$\begin{aligned} \left(P_{\gamma|_{[t,t+s]}}^E \right)^{-1} (X(t+s)) &= [\gamma^*(t)] \circ [\gamma^*(t+s)]^{-1} X(t+s) \\ &= [\gamma^*(t)] \circ [\gamma^*(t+s)]^{-1} \circ [\gamma^*(t+s)] \circ [\gamma^*(0)](X) \\ &= [\gamma^*(t)] \circ [\gamma^*(0)](X). \end{aligned}$$

Also hängt der Ausdruck nicht von s ab, d.h. die Ableitung verschwindet und $X(t)$ ist parallel. Somit ist $X(t)$ das eindeutig bestimmte parallele Vektorfeld mit $X(0) = X$ und somit ist $X(t) = \tau_{x\gamma(t)}(X)$. ■

4-D Parallele Schnitte und Parallelverschiebung

Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einer kovarianten Ableitung ∇^E .

4.29 **Definition** 1.) Der *Raum der parallelen Schnitte in E* ist definiert als

$$\text{Par}(E, \nabla^E) := \{e \in \Gamma(E) : \nabla^E e = 0\}.$$

2.) Ein Unterbündel $F \subset E$ heißt ∇^E -invariant (oder *parallel*), falls

$$\nabla_X^E f \in \Gamma(F), \quad \text{für alle } f \in \Gamma(F) \text{ und } X \in \chi(M). \quad \times$$

4.30 **Bemerkung.** Sei $D \subset TM$ eine ∇ -invariante Distribution. Ist der Zusammenhang ∇^E torsionsfrei, dann ist D integabel, denn

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in D.$$

Im Fall eines torsionsfreien Zusammenhangs sind also insbesondere die parallelen Unterbündel integabel. \rightarrow

4.31 **Satz** Sei M einfach zusammenhängend und $F \subset E$ ein paralleles Unterbündel vom Rang r . Ist $R^{\nabla^F} = 0$, dann gilt

$$\dim \text{Par}(E, \nabla^E) \geq r. \quad \times$$

Beweis. Sei $x \in M$ und (ν_1, \dots, ν_r) eine Basis der Faser F_x . Man definiert nun Schnitte in F durch

$$f_i(\gamma) := P_{y_{xy}}^F(\nu_i) \in F_\gamma, \quad 1 \leq i \leq r,$$

wobei γ_{xy} eine Kurve von x nach y bezeichnet.

f_i ist wohldefiniert. Wir schreiben $F = P \times_{\text{GL}_r} \mathbb{K}^r$, wobei P das Rahmenbündel von F bezeichnet. Der Zusammenhang auf P sei durch ∇^F induziert, dann gilt

$$R_{XY}^{\nabla^F} f = [p, F^A(X^*, Y^*)\nu],$$

falls $f = [p, \nu]$. Somit ist $R^{\nabla^F} = 0$ genau dann, wenn $F^A = 0$ gilt. Da M nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist, hängt daher die Parallelverschiebung P_y^A in P nicht vom gewählten Weg ab. Somit hängt auch die Parallelverschiebung in F , gegeben durch

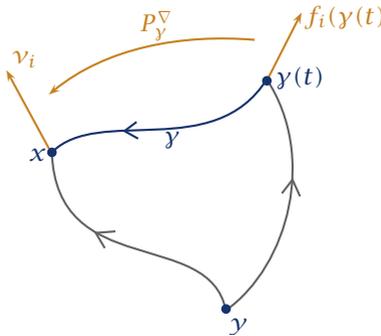
$$P_y^{\nabla^F} = [P_y^A(p)] \circ [p]^{-1}$$

nicht vom gewählten Weg ab und der Schnitt f_i ist wohldefiniert. Schließlich hängt f_i als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung differenzierbar vom Anfangswert ab und ist folglich ein glatter Schnitt in F .

f_i ist parallel. Wir müssen zeigen, dass $\nabla^F f_i = 0$ ist. Sei dazu $\gamma \in M$ und X ein Vektorfeld auf M . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\nabla_X^F f_i)_\gamma &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{\gamma(t)\gamma}^{\nabla^F} (f_i(\gamma(t))) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{\gamma(t)\gamma}^{\nabla^F} P_{X\gamma(t)}^{\nabla^F} (v_i) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} P_{X\gamma}^{\nabla^F} (v_i) = 0, \end{aligned}$$

denn P^{∇^F} hängt nicht vom gewählten Weg ab. ■



4.7 Zur Parallelverschiebung von f_i .

4.32 *Bemerkung.* Sei $e \in \Gamma(E)$ ein paralleler Schnitt, dann gilt

$$R_{XY}^E e = 0$$

für alle Vektorfelder X und Y in M . Somit ist $F = \text{span} \{e\}$ parallel. Unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes ist dann der Schnitt vollständig durch Parallelverschiebung beschrieben, d.h. für $x, y \in M$ gilt

$$e(y) = P_{yxy}^{\nabla} e(x). \quad \rightarrow$$

4.33 **Satz** Ein Unterbündel $F \subset E$ ist genau dann parallel, wenn F von der Parallelverschiebung in E invariant gelassen wird. ✕

Beweis. \Rightarrow : Sei $F \subset E$ parallel, dann gilt für jeden Schnitt f in F und jedes Vektorfeld X auf M , dass

$$\nabla_X f \in \Gamma(F).$$

Somit ist die kovariante Ableitung ∇^F in F gerade durch Einschränkung der kovarianten Ableitung ∇^E auf das Unterbündel F gegeben. Folglich erhält man die Parallelverschiebung in F gerade durch Einschränkung der Parallelverschiebung in E ,

$$\tau^F = \tau^E \Big|_F.$$

⇐: Sei umgekehrt F invariant unter Parallelverschiebung, dann verläuft die Parallelverschiebung eines Schnittes in f in F ganz in F und somit ist auch $\nabla_X f$ ein Schnitt in F . ■

4-E Geodätische

Wir suchen nun zu zwei Punkten p und q in M die *kürzeste Verbindung*, also eine Kurve in M , die p und q verbindet und deren Länge minimal wird. Wie solche Kurven aussehen, hängt sicher von der Topologie der Mannigfaltigkeit ab, aber auch von der gewählten Metrik, denn diese misst ja die „Länge“. Wie wir noch sehen werden, ist auch die Wahl eines Zusammenhangs wesentlich, um solche Verbindungen überhaupt sinnvoll definieren zu können.

4.34 **Definition** Eine *Geodätische* ist eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit $\dot{\gamma} = 0$, d.h.

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\gamma} = 0. \quad \times$$

Die Existenz von Geodätischen sichert die kanonische Wahl für eine Verbindung von p und q . Viele Objekte, die von der Wahl eines Weges abhängen, sind somit automatisch wohldefiniert. Später werden wir mit Hilfe der Geodätischen die von Lie-Gruppen bekannte Exponentialabbildung auf Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

4.35 **Bemerkung.** In lokalen Koordinaten (U, \mathcal{x}) schreibt sich für eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ die Geodätengleichung $\ddot{\gamma} = 0$ als

$$\ddot{\gamma}_k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_i(t) \dot{\gamma}_j(t) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dies ist wiederum eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung für $\dot{\gamma}_k$. Aus dem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsatz folgt nun, dass für jeden Punkt p und jeden Anfangsgeschwindigkeitsvektor $X \in T_p M$ eine Geodätische durch p für kurze Zeit existiert und eindeutig bestimmt ist. →

BEISPIEL 25 a.) Sei $M = \mathbb{R}^n$ versehen mit der Standardmetrik und dem flachen Zusammenhang, d.h. $\Gamma_{ji}^k \equiv 0$. Dann gilt

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = p + t \cdot v,$$

für $p \in \mathbb{R}^n$ und $v \in T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

b.) Sei $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n -dimensionale Sphäre versehen mit der von \mathbb{R}^{n+1} induzierten Metrik und dem induzierten Zusammenhang. Dann liegen die Geodätischen von S^n auf Großkreisen. Zu zwei Punkten x, y gibt es hier also zwei verschiedene Geodätische eine „kürzere“ und eine „längere“. ■

Die Geodätischen hängen somit nach unserer Definition vom gewählten Zusammenhang ab. Damit diese also überhaupt „kurz“ sein können, muss der Zusammenhang metrisch sein, und „kurz“ ist dann bezüglich der entsprechenden Metrik zu verstehen. Außerdem ist es zunächst nicht klar, warum diese Geodätischen überhaupt „kürzeste“ Verbindungen beschreiben. Tatsächlich minimieren diese Kurven auch nur lokal den Abstand, aber nicht notwendigerweise global, wie man bereits am Beispiel der Sphäre sieht.

4.36 **Lemma** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita Zusammenhang ∇ . Für eine Geodätische y ist die Funktion

$$f(t) = g(\dot{y}(t), \dot{y}(t))$$

konstant. ✕

Beweis. Der Levi-Civita Zusammenhang ist metrisch und folglich gilt

$$\dot{f} = 2g(\ddot{y}, \dot{y}) = 0. \quad \blacksquare$$

Die Länge der Tangentialvektoren einer Geodätischen oder Geschwindigkeitsvektoren, wie sie auch in der Physik genannt werden, ist also konstant. Man kann Geodätische daher als gleichförmige Bewegung interpretieren. Insbesondere hängt die Eigenschaft „geodätisch“ zu sein von der Parametrisierung ab. Eine nichtgleichförmige Umparametrisierung wird diese Eigenschaft zerstören.

4.37 **Lemma** Sei $y : I \rightarrow M$ eine Geodätische. Eine Umparametrisierung $y \circ h : J \rightarrow M$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $h(t) = at + b$ gilt. ✕

Beweis. Aus der Geodätengleichung in lokalen Koordinaten erhalten wir,

$$\begin{aligned} \gamma \circ h &= \frac{d^2 h}{dt^2} \dot{\gamma} \circ h + \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \ddot{\gamma} \circ h \\ &= \frac{d^2 h}{dt^2} \dot{\gamma} \circ h, \end{aligned}$$

denn γ ist geodätisch. Ist nun auch $\gamma \circ h$ eine Geodäte, dann verschwindet die linke Seite und da $|\dot{\gamma}| \neq 0$ ist folglich $h(t) = at + b$. Umgekehrt folgt aus dieser Gestalt von h , dass die rechte Seite verschwindet und somit $\gamma \circ h$ eine Geodäte ist. ■

Wir wollen nun die weiter untersuchen, inwiefern Geodätische „kurz“ sind.

4.38 **Definition** Der *Wegeraum* der glatten Wege von p nach q in M ist definiert als

$$\Omega_{pq}(M) := \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow M : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q \}.$$

Das *Energiefunktional* auf Ω_{pq} ist die Abbildung

$$E : \Omega_{pq}(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E[\gamma] = \frac{1}{2} \int_0^1 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt. \quad \times$$

4.39 **Satz** Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit versehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang. Eine Kurve $\gamma \in \Omega_{pq}(M)$ ist ein kritischer Punkt von E genau dann, wenn γ geodätisch ist. \times

Die Geodätischen sind also genau die kritischen Punkte des Energiefunktionals. Allerdings schließt dies nicht aus, dass es sich um Maxima handelt. Definiert man den Abstand zwischen zwei Punkten als

$$\text{dist}(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} L(\gamma) = 2 \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} E(\gamma),$$

dann kann eine Geodätische auch die *längstmögliche* Verbindung zwischen p und q beschreiben. Schlimmer noch, eine Geodätische kann auch schlicht nur ein kritischer Punkt von E sein aber kein Extremum wie das bei einem Sattelpunkt der Fall ist. Dann minimiert γ den Abstand auf einigen Untermannigfaltigkeiten von M , während γ den Abstand auf anderen Untermannigfaltigkeiten maximiert.

4.40 *Bemerkungen.* A. Der Wegeraum $\Omega_{pq}(M)$ ist eine unendlichdimensionale Untermannigfaltigkeit des Raumes der Kurven in M . Somit ist E Funktional auf einer unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeit. Um besser zu verstehen, wie kritische Punkte von E zu interpretieren sind, betrachten wir zunächst den endlichdimensionalen Fall. Sei eine Abbildung

$$f : N \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Ein Punkt $x \in N$ ist ein kritischer Punkt von f genau dann, wenn das Differential df_x verschwindet. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Kurve $\eta : I \rightarrow N$ mit $\eta(0) = p$ gilt,

$$\frac{d}{dt} f \circ \eta(t) = 0.$$

In unseren Fall ist nun $N = \Omega_{pq}(M)$ und ein Punkt $x \in N$ entspricht einer Kurve y von p nach q . Wir betrachten jetzt **Variationen** von y , das sind Abbildungen

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow M, (s, t) \mapsto y_s(t),$$

mit $y_0 \equiv y$ und $y_s \in \Omega_{pq}$. So ist y genau dann ein kritischer Punkt von E , wenn

$$\frac{d}{ds} E[y_s] = 0$$

für alle Variationen y_s gilt.

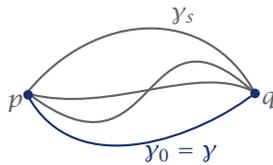
B. Viele geometrische Strukturen lassen sich als kritische Punkt eines gewissen Funktionals interpretieren, wie hier die Geodätischen. Im vergangen Semester haben wir beispielsweise gesehen, dass die Einsteinmetriken gerade kritische Punkte des Hilbertfunktionals sind. \sim

4.41 **Variationsformel** Sei y_s eine Variation von y und $\delta = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_0$. Dann gilt

$$\delta E[y_s] = - \int g(\delta y_s, \ddot{y}) dt. \quad \times$$

Mit Hilfe der Variationsformel ergibt sich sofort, dass die Geodätischen genau die kritischen Punkte von E sind.

4.42 **Korollar** *Kürzeste Verbindungen sind Geodätische.* \times



4.8 Eine Kurve γ und einige Variationen.

Beweis. Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten minimiert das Energiefunktional und ist folglich ein kritischer Punkt von E , also eine Geodätische. ■

Die Umkehrung, also mit Geodätischen tatsächlich kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten zu definieren, wird allerdings noch etwas Vorbereitung erfordern. Wir bemerken noch, dass Isometrien auch Geodätische erhalten, was nicht verwunderlich ist, denn nahezu alle Objekte, die über die Metrik definiert werden, werden auch durch Isometrien erhalten.

4.43 **Korollar** Isometrien überführen Geodätische in Geodätische. ✕

Beweis. Sei f eine Isometrie und γ eine Geodätische, dann gilt $f \circ \dot{\gamma} = df(\dot{\gamma})$ und somit ist

$$\begin{aligned} E[f \circ \gamma] &= \frac{1}{2} \int_0^1 g(df(\dot{\gamma}), df(\dot{\gamma})) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (f^*g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt = E[\gamma]. \end{aligned}$$

Somit ist γ ein kritischer Punkt genau dann, wenn $f \circ \gamma$ ein kritischer Punkt ist. ■

4-F Die Exponentialabbildung

Für eine Lie-Gruppe G mit zugehöriger Lie-Algebra \mathfrak{g} kennen wir bereits die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \exp(X) = c_X(1),$$

die X mit der entsprechenden Integralkurve existiert. Letztere existieren auf Lie-Gruppen für alle Zeiten und daher ist \exp auf ganz \mathfrak{g} wohldefiniert. Die Exponentialabbildung ist sogar ein lokaler Diffeomorphismus um Null und ermöglicht die

Definition besonders handlicher Kartenabbildungen, sogenannten Normalkoordinaten.

Wir wollen die Exponentialabbildung nun für allgemeine Mannigfaltigkeiten definieren. Dazu verwenden wir die Geodätischen, denn lokal lassen sich zwei Punkte eindeutig durch eine Geodätische verbinden und diese Verbindung hängt differenzierbar von den Anfangswerten ab.

4.44 **Lemma** Sei $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann existiert eine Umgebung U von v und ein Intervall I um Null, so dass

$$U \times I \rightarrow TM, \quad (w, s) \mapsto \gamma_w(s)$$

eine wohldefinierte, glatte Abbildung ist, wobei γ_w die eindeutig bestimmte Geodätische zu w ist, d.h. $\gamma_w(0) = p$ und $\dot{\gamma}_w(0) = w$. \times

Beweis. Die Geodätische zu w ist eindeutig durch eine gewöhnliche Differentialgleichung bestimmt. Sie hängt damit differenzierbar vom Anfangswert w ab und wächst höchstens exponentiell schnell, d.h. zu $v \in T_p M$ existiert eine Umgebung U sowie ein Intervall I um Null, so dass $\gamma_w(s)$ auf $U \times I$ definiert und differenzierbar ist. ■

4.45 **Definition** Sei $p \in M$ und $U_p \subset T_p M$ die Menge der Vektoren v , für die die Geodätische γ_v auf $I = [0, 1]$ definiert ist. Die Abbildung

$$\exp_p : U_p \subset T_p M \rightarrow M, \quad v \mapsto \exp_p(v) = \gamma_v(1)$$

heißt *Exponentialabbildung*. \times

4.46 **Bemerkung.** Sei $p \in M$ und $v \in T_p M$. Dann gilt für $t \geq 0$ hinreichend klein, dass

$$\exp_p(tv) = \gamma_v(t),$$

denn $s \mapsto \gamma_v(st)$ ist die Geodätische zum Anfangsvektor tv und somit folgt aus der Eindeutigkeit, dass

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_p(tv).$$

Im Gegensatz zur Exponentialabbildung auf Lie-Gruppen ist $\exp_p(tv)$ jedoch im Allgemeinen nur für kleine t definiert. \rightarrow

BEISPIEL 26 Sei $p \in S^n$ und $v \in T_p S^n = p^\perp$ mit $|v| = 1$. Die Geodätische zu diesem Anfangsvektor ist der Großkreis

$$\gamma_v(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot v.$$

Die Exponentialabbildung hat daher die Form

$$\exp_p : T_p S^n \rightarrow S^n, \quad \exp(tv) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot v.$$

Somit ist \exp_p ein Diffeomorphismus von

$$\{v \in T_p S^n : |v| < \pi\} \rightarrow S^n \setminus \{-p\}. \quad \blacksquare$$

Die Exponentialabbildung ist überall differenzierbar und wie ihr Pedant für Lie-Gruppen ein lokaler Diffeomorphismus um Null.

4.47 **Satz** Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung von Null in $T_p M$, auf der die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. \times

Beweis. Sei $U \subset T_p M$ hinreichend klein, dann ist

$$\exp_p : U \rightarrow M,$$

wohldefiniert und glatt. Das Differential der Exponentialabbildung ist eine Abbildung

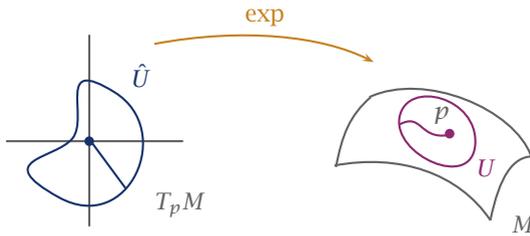
$$d \exp_p : T_0(T_p U) \cong T_p M \rightarrow T_p M,$$

und für $v \in T_p M$ gilt

$$d \exp_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_v(t) = v.$$

Somit ist das Differential ein Isomorphismus und \exp_p nach dem Umkehrsatz ein lokaler Diffeomorphismus um Null. \blacksquare

Im Allgemeinen kann man nicht erwarten, dass die Exponentialabbildung ein globaler Diffeomorphismus ist, geschweige denn surjektiv oder auch nur auf ganz $T_p M$ definiert. Man muss sich zunächst mit kleinen Umgebungen der Null begnügen, die sich aber beliebig verkleinern lassen, zum Beispiel zu besonders handlichen, sternförmigen Umgebungen.



4.9 Die Exponentialabbildung auf sternförmigen Mengen.

4.48 **Definition** Sei $p \in P$ und $\hat{U} \subset T_p M$ eine sternförmige Umgebung der Null. Ist

$$\exp_p : \hat{U} \rightarrow U = \exp_p(\hat{U})$$

ein Diffeomorphismus, dann nennt man U eine *normale* Umgebung von p . \times

Ist die Urbildmenge \hat{U} sternförmig, dann ist auch die Bildmenge U „sternförmig“ in Bezug auf die Geodätischen.

4.49 **Lemma** Sei $U \subset M$ eine normale Umgebung von $p \in M$. Dann existiert für jeden Punkt $q \in U$ eine eindeutig bestimmte Geodätische

$$\sigma : I \rightarrow M, \quad \dot{\sigma}(0) = \exp_p^{-1}(q),$$

die ganz in U verläuft und p und q verbindet. Sie heißt *radiale Geodätische*. \times

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz. Nach Voraussetzung ist

$$\exp_p : \hat{U} \rightarrow U$$

ein Diffeomorphismus und \hat{U} sternförmig. Zu $v = \exp_p^{-1}(q)$ setzen wir

$$\sigma(t) := \exp_p(tv).$$

Dann ist σ für $0 \leq t \leq 1$ wohldefiniert und eine Geodätische, die ganz in U verläuft, mit $\dot{\sigma}(0) = v$.

Es verbleibt die *Eindeutigkeit* zu zeigen. Sei $\tau : I \rightarrow M$ eine weitere Geodätische, die p und q verbindet und sei $w = \dot{\tau}(0)$. Die Geodätische $t \mapsto \exp(tw)$ hat denselben Anfangsvektor wie τ und folglich gilt

$$\tau(t) = \exp(tw), \quad t \in I.$$

Falls $t\mathcal{w}$ in \hat{U} liegt für $0 \leq t \leq 1$, dann gilt

$$\exp_p(\mathcal{w}) = \tau(1) = q = \exp_p(\mathcal{v}),$$

und da die Exponentialabbildung auf \hat{U} injektiv ist, folgt $\mathcal{w} = \mathcal{v}$. Andernfalls existiert ein $t_0 > 0$, so dass $t\mathcal{w}$ in \hat{U} liegt für $0 \leq t \leq t_0$ und

$$\exp_p(t_0\mathcal{w}) = \tau(t_0) = q = \exp_p(\mathcal{v}).$$

Somit gilt $t_0\mathcal{w} = \mathcal{v} = \exp_p^{-1}(q)$. Parametrisieren wir τ gleichförmig so um, dass $\dot{\tau}(0) = \mathcal{v}$ ist, dann gilt auch $\tau \equiv \sigma$. ■

Wählt man als sternförmige Umgebung eine Kugel um Null, dann werden die radialen Geodätischen tatsächlich zu kürzesten Verbindungen.

- 4.50 **Satz** Sei $\varepsilon > 0$ so, dass \exp_p auf der Kugel $B_\varepsilon \subset T_pM$ vom Radius ε um Null ein Diffeomorphismus ist. Dann existiert für jedes $q \in \exp_p(B_\varepsilon)$ genau eine kürzeste Verbindung von q nach p , nämlich die radiale Geodätische. Das größtmögliche ε nennt man den *Injektivitätsradius* der Exponentialabbildung. ✕

Nun stellt sich die Frage, ob zwei beliebige Punkte auf M durch eine Geodätische verbunden werden können.

- 4.51 **Satz** Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann können je zwei Punkte durch eine gebrochene Geodätische, also Kurve, die stückweise geodätisch ist, verbunden werden. ■

Beweis. Zu einem beliebigen Punkt $x \in M$ setzen wir

$$\mathcal{C} := \left\{ y \in M : \text{es existiert eine gebrochene Geodätische } \gamma_{xy} \right\}.$$

Dann ist \mathcal{C} offen, denn falls $z \in \mathcal{C}$, dann lassen sich x und z durch eine gebrochene Geodätische verbinden. Sei $U(z)$ eine normale Umgebung von z , dann lässt sich diese gebrochene Geodätische zu jedem Punkt in $U(z)$ fortsetzen. Umgekehrt ist aus genau demselben Argument auch das Komplement von \mathcal{C} offen. Aber \mathcal{C} ist nichtleer und M zusammenhängend, also gilt $\mathcal{C} = M$. ■

Die Aussage ist natürlich höchst unbefriedigend, denn schon im \mathbb{R}^n können gebrochene Geodätische komplizierte Gebilde werden, obwohl wir im \mathbb{R}^n die kürzesten Verbindungen genau kennen, es sich gerade Strecken. Ist die Exponentialabbildung jedoch an einem Punkt global definiert, dann lässt sich die Aussage erheblich verbessern.

4.52 **Satz** Sei M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert, dann gibt es für jedes $q \in M$ eine kürzeste Geodätische, die p und q verbindet. \times

4.53 **Bemerkung.** In diesem Fall ist die Exponentialabbildung surjektiv. Die für Lie-Gruppen definierte "klassische" Exponentialabbildung ist immer auf ganz $T_e M = \mathfrak{g}$ definiert, jedoch gibt es Lie-Gruppen auf denen die Exponentialabbildung nicht surjektiv ist. Somit stimmen die mittels Geodätischen definierte Exponentialabbildung und die "klassische" Exponentialabbildung für Lie-Gruppen im Allgemeinen nicht überein! Ist die Lie-Gruppe jedoch zusammenhängend und trägt eine bi-invariante Metrik, dann ist wieder alles in Ordnung, wie wir noch sehen werden. \rightarrow

Der folgende Satz liefert nun Kriterien dafür, dass die Exponentialabbildung global definiert ist.

4.54 **Satz von Hopf-Rinow** Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Für ein $p \in P$ ist die Exponentialabbildung \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert.

(ii) Der metrische Raum (M, d) ist vollständig, wobei

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{pq}} L(\gamma).$$

(iii) Die Mannigfaltigkeit (M, g) ist geodätisch vollständig, d.h. jede Geodätische ist auf ganz \mathbb{R} definiert. \times

4.55 **Bemerkung.** Die Vollständigkeit der Mannigfaltigkeit ist tatsächlich notwendig. Betrachtet man beispielsweise $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dann ist M nicht vollständig und offenbar existieren keine Geodätischen zwischen zwei Punkten, deren Verbindungsstrecke durch den Nullpunkt gehen würde. \rightarrow

4-G Normalkoordinaten

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe der Exponentialabbildung wollen wir nun spezielle Karten von M definieren.

4.56 **Definition** Sei $p \in M$ und U eine normale Umgebung von p . Wählen wir eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von T_pM , dann nennt man die Kartenabbildung

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad q \mapsto (x_1, \dots, x_n), \quad \exp_p(q)^{-1} = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

Normalkoordinaten auf U . \times

Wählen wir Normalkoordinaten um p , dann nimmt in p die Metrik eine besonders einfache Form an und die Christoffel-Symbole verschwinden. Somit sind Normalkoordinaten für viele Rechnungen besonders angenehm.

4.57 **Satz** Seien (x_1, \dots, x_n) Normalkoordinaten von p . Dann gelten

a) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$, und

b) $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. \times

Beweis. a): Zunächst ist nach Definition,

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \right).$$

Weiterhin berechnet man die Koordinatenvektorfelder zu

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 x^{-1}(te_i) = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 \exp_p(te_i) = e_i.$$

Somit ist $g_{ij}(p) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, denn $\{e_i\}$ ist orthonormal.

b): Sei $\gamma_\nu(t) = \exp_p(t\nu)$ die Geodätische zum Anfangsvektor $\nu \in T_pM$. Dann schreibt sich

$$\nu = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

und folglich ist

$$x(\gamma_\nu(t)) = (a_1 t, \dots, a_n t).$$

Die i -te Koordinate von γ_ν ist somit gegeben als $(\gamma_\nu)_i(t) = a_i t$ und daher gilt

$$(\dot{\gamma}_\nu)_i = a_i, \quad (\ddot{\gamma}_\nu)_i = 0.$$

Aus der Geodätengleichung folgt nun, dass

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) a_i a_j, \quad 1 \leq k \leq n,$$

für jede Wahl von ν . Also gilt $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ für $1 \leq i, j, k \leq n$. \blacksquare

4-H Der Geodätische Fluss

Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ ist eine Geodätische genau dann, wenn in jeder Karte (U, \mathcal{x}) die Geodätengleichungen erfüllt sind

$$\ddot{\gamma}_k + \sum_{i,j=1}^n \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (*)$$

Wir wollen nun ein Vektorfeld auf dem Tangentialbündel definieren, dessen Integralkurven gerade die Geodätischen sind.

Jede Karte (U, \mathcal{x}) auf M induziert eine Karte auf $\pi^{-1}(U) \subset TM$ durch

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \hat{=} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x.$$

Setzen wir $x_k := \gamma_k$ und $y_k := \dot{\gamma}_k$, dann gilt (*) genau dann, wenn für $k = 1, \dots, n$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= y_k, \\ \dot{y}_k &= - \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \Gamma_{ij}^k, \end{aligned}$$

erfüllt sind. Definieren wir also auf TM ein Vektorfeld

$$G_{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)} := \sum_{k=1}^n y_k \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k,i,j=1}^n y_i y_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial y_k},$$

dann sind die Integralkurven zu G gerade die Geodätischen in M .

4.58 *Bemerkung.* Auf der symplektischen Mannigfaltigkeit T^*M betrachtet man die Hamiltonfunktion

$$H(q, p) = \frac{1}{2} |p|^2, \quad p \in T_q^*M.$$

Dann sind die Geodätischen auf M die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{p}_j = - \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},$$

mit zugehörigem Hamilton Vektorfeld

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right).$$

Die Metrik definiert einen Diffeomorphismus zwischen dem Tangential- und dem Cotangentialbündel

$$\psi : TM \rightarrow T^*M, \quad X \mapsto g(X, \cdot).$$

Dieser Diffeomorphismus identifiziert X_H mit G ,

$$\psi_* G = X_H. \quad \circ$$

4-I Geodätische und Exponentialabbildung auf Lie-Gruppen

Sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra \mathfrak{g} . Im vergangenen Semester haben wir bereits eine Exponentialabbildung für Lie-Gruppen definiert,

$$\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G, \quad X \mapsto \exp_G(X),$$

die ein linksinvariantes Vektorfeld X auf den Wert der zugehörigen Integralkurve zum Zeitpunkt $t = 1$ abbildet. Für die Lie-Gruppen sind die Integralkurven für alle Zeiten definiert und somit ist auch die Exponentialabbildung auf ganz \mathfrak{g} wohldefiniert. Das Ziel dieses Abschnittes ist es zu untersuchen, wie diese Exponentialabbildung mit der Exponentialabbildung, die wir mittels Geodätischen definiert haben, zusammenhängt.

4.59 **Definition** Eine stetige Abbildung $T : \mathbb{R} \rightarrow G$ heißt *1-Parameter Untergruppe von G* , falls

$$T(t + s) = T(t)T(s) \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R}. \quad \times$$

Für eine 1-Parameter Untergruppe T von G gilt offenbar $T(0) = e$. Weiterhin ist T automatisch differenzierbar und es gilt

$$T(t) = \exp_G(tX), \quad X = \dot{T}(0) \in \mathfrak{g},$$

wobei \exp_G die klassische Exponentialabbildung bezeichnet. Die 1-Parameter Untergruppen entsprechen also der "klassischen" Exponentialabbildung für Lie-Gruppen. Um zu untersuchen, wann diese mit der allgemeinen Exponentialabbildung zusammenfällt, benötigen wir noch ein Hilfsmittel, um den Levi-Civita Zusammenhang mittels Isometrien zu übertragen.

4.60 **Lemma** Seien (M, g_M) und (N, g_N) Riemannsche Mannigfaltigkeiten versehen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang. Sei $\phi : M \rightarrow N$ eine Isometrie, dann gilt für Vektorfelder X und Y in M ,

$$d\phi(\nabla_X^M Y) = \nabla_{d\phi(X)}^N (d\phi(Y)),$$

wobei $d\phi(X)_q = d\phi(X_p)$ für alle $q = \phi(p) \in N$ gilt. \times

Es stellt sich nun heraus, dass für zusammenhängende Lie-Gruppen mit bi-invarianter Metrik die Geodätischen und die 1-Parameteruntergruppen zusammenfallen.

4.61 **Satz** Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit einer linksinvarianten Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist rechts- also bi-invariant.
- (ii) Die Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist $\text{Ad}(G)$ -invariant.
- (iii) Die Inversion $g \mapsto g^{-1}$ ist eine Isometrie.
- (iv) $\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle = 0$ für alle X, Y und $Z \in \mathfrak{g}$.
- (v) $\nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y]$ für alle X und $Y \in \mathfrak{g}$.
- (vi) $\nabla_X X = 0$ für alle $X \in \mathfrak{g}$.
- (vii) Die Geodätischen durch das Einselement von G sind genau die 1-Parameter Untergruppen von G . \times

Beweis. Die Äquivalenzen (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) wurden bereits gezeigt.

(vi) \Rightarrow (vii): Sei α eine 1-Parameteruntergruppe von G . Dann existiert ein $X \in \mathfrak{g}$ so, dass $\alpha(t) = \exp(tX)$. Folglich ist $\alpha(0) = e$ und $\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}$ und daher ist $\dot{\alpha}(t)$ ein Vektorfeld entlang α . Somit gilt

$$\frac{\nabla}{dt} \dot{\alpha}(t) = \nabla_X X \Big|_{\alpha} = 0,$$

und daher ist α eine Geodätische. Dies sind aber auch schon alle möglichen Geodätischen, denn diese sind durch $y(0) = e$ und $\dot{y}(0) = X$ bereits ohne Ausnahme eindeutig bestimmt.

(vi) \Leftarrow (vii): Seien die Geodätischen genau die 1-Parametergruppen. Zu $X \in \mathfrak{g}$ existiert daher eine Geodätische durch e der Form

$$y(t) = \exp_G(tX).$$

Dann ist $\dot{y}(t) = X_{y(t)}$ ein Vektorfeld entlang y und somit nach der Geodätengleichung

$$0 = \frac{\nabla}{dt} \dot{y}(t) = \frac{\nabla}{dt} X_{y(t)} = \nabla_X X \Big|_{y(t)}.$$

Also verschwindet $\nabla_X X$ entlang y . Sei nun $q = y(t)$ und $p \in G$ beliebig. Dann existiert ein $g \in G$ so, dass $p = g \cdot q = L_g(q)$. Somit ist

$$(\nabla_X X)_p = (dL_g \nabla_X X)_q = (\nabla_{dL_g X} dL_g X)_q = 0,$$

denn die Linkstranslation ist eine Isometrie der Metrik und X ist linksinvariant. Also gilt $\nabla_X X \equiv 0$, was zu zeigen war. ■

4-J Geodätische auf Untermannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit von (\bar{M}, \bar{g}) , d.h. das Tangentialbündel an \bar{M} spaltet sich auf in das Tangentialbündel an M und das Normalenbündel an M und die Metrik auf M ist durch Einschränkung gegeben,

$$T\bar{M} = TM \oplus NM, \quad g = \bar{g} \Big|_{TM \times TM}.$$

Der Levi-Civita Zusammenhang auf M lässt sich mit Hilfe der 2. Fundamentalform über den Levi-Civita Zusammenhang auf \bar{M} beschreiben,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \text{II}(X, Y), \quad X, Y \in \chi(M). \quad (*)$$

Dabei sind die Vektorfelder X und Y zunächst nur auf M definiert, obiger Ausdruck hängt aber nicht von der Fortsetzung zu Vektorfeldern auf \bar{M} ab und ist daher wohldefiniert.

Sei $y : I \rightarrow M$ eine Kurve in M und Y ein Vektorfeld entlang y . Wir bezeichnen die kovarianten Ableitungen entlang y wie folgt,

$$\frac{\bar{\nabla}}{dt} Y = \dot{Y}, \quad \frac{\nabla}{dt} Y = Y'.$$

Nun suchen wir nach einer Möglichkeit, analog zu (*), auch die kovariante Ableitung entlang y in M durch die kovariante Ableitung entlang y in \bar{M} auszudrücken.

4.62 **Lemma** Sei Y ein Vektorfeld in M entlang γ . Dann gilt

$$\dot{Y} = Y' + \Pi(\dot{\gamma}, Y).$$

Beweis. Sei (U, \mathbf{x}) eine Karte von M , dann schreibt sich Y lokal in U als

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n Y_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\gamma(t)}.$$

Für die eingeschränkte kovariante Ableitung ergibt sich dort,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} Y &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{Y}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{Y}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \left(\nabla_{\dot{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \Pi \left(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) \right) \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{Y}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Y_i \nabla_{\dot{\gamma}} \right) + \Pi \left(\dot{\gamma}, \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \frac{\nabla}{dt} Y + \Pi(\dot{\gamma}, Y). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.63 **Korollar** Sei $\gamma : I \rightarrow M$ eine Kurve in M , dann gilt

$$\ddot{\gamma} = \gamma'' + \Pi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Somit ist γ genau dann eine Geodätische in M , wenn $\ddot{\gamma}$ normal ist. \times

BEISPIEL 27 Nach dieser Vorbereitung können wir zeigen, dass die Geodätischen auf der n -dimensionalen Sphäre S^n exakt die Großkreise sind.

Ein **Großkreis** ist eine geschlossene, doppelpunktfreie und nach Bogenlänge parametrisierte Kurve in S^n , deren Spur durch $E \cap S^n$ gegeben ist, wobei $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine 2-dimensionale Ebene durch Null bezeichnet.

Sei α ein Großkreis, dann ist aufgrund der Parametrisierung nach Bogenlänge $|\dot{\alpha}| \equiv 1$. Die Beschleunigung kann demnach an keinem Punkt einen Betrag in Richtung des Geschwindigkeitsvektors liefern, d.h. $\ddot{\alpha} \perp \dot{\alpha}$. Andererseits ist $T_p S^n = p^\perp$ für jedes $p \in S^n$, also gilt auch $\alpha \perp \dot{\alpha}$. Nun verläuft die Kurve ganz in der 2-dimensionalen Ebene E , also sind α , $\dot{\alpha}$ und $\ddot{\alpha}$ tangential an E und folglich gilt

$$\ddot{\alpha} \parallel \alpha.$$

Somit ist $\dot{\alpha}$ normal und α nach dem vorangegangenen Korollar eine Geodätische.

Umgekehrt sei γ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische, d.h. $|\dot{\gamma}| \equiv 1$.
Setzen wir

$$E = \{\gamma(0), \dot{\gamma}(0)\},$$

dann ist E eine 2-dimensionale Ebene durch Null und die Kurve

$$\sigma(t) = \cos t \cdot \gamma(0) + \sin t \cdot \dot{\gamma}(0)$$

verläuft ganz in E , ist also ein Großkreis. Weiterhin ist $\sigma(0) = \gamma(0)$ und $\dot{\sigma}(0) = \dot{\gamma}(0)$,
also gilt aufgrund der Eindeutigkeit der Geodätischen

$$\gamma = \sigma,$$

und γ selbst ist ein Großkreis. ■

5 Holonomietheorie

5-A Die Holonomie-Gruppe

Sei $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel mit einem fixierten Zusammenhang A . Eine geschlossene Kurve γ in M durch den Punkt x besitzt für jedes $p \in P_x$ einen eindeutigen horizontalen Lift γ_p^* durch p . Mit diesem Lift haben wir die Parallelverschiebung in P definiert,

$$P_\gamma^A : P \rightarrow P, \quad p \mapsto \gamma_p^*(1).$$

Wie bereits festgestellt, ist γ_p^* nicht notwendigerweise geschlossen und die „Differenz“ von Anfangs- und Endwert der Kurve γ_p^* hängt von der Kurve γ selbst ab. Dies führt dazu, dass im Allgemeinen die Parallelverschiebung von der Wahl des Weges abhängt. Wir wollen die Menge der möglichen Parallelverschiebungen eines Punktes in P nun genauer untersuchen.

- 5.1 **Definition** Sei x ein Punkt in M . Die Menge der *geschlossenen Kurven durch x* bezeichnen wir mit $\Omega(x)$ und die Menge der *nullhomotopen, geschlossenen Kurven durch x* mit $\Omega^0(x)$. \times

Geschlossene Kurven durch einen Punkt x nennt man auch **Schleifen** an x .

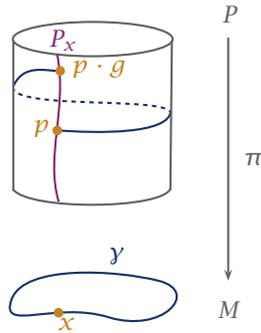
- 5.2 **Definition** Sei $p \in \pi^{-1}(x)$ für ein $x \in M$.

- 1.) Die *Holonomiegruppe* von A in p ist definiert als

$$\text{Hol}_p(A) := \{g \in G : P_\gamma^A(p) = p \cdot g \text{ für ein } \gamma \in \Omega(x)\} \subset G$$

- 2.) Die *reduzierte Holonomiegruppe* ist definiert als

$$\text{Hol}_p^0(A) := \{g \in G : P_\gamma^A(p) = p \cdot g \text{ für ein } \gamma \in \Omega_0(x)\} \subset \text{Hol}_p(A). \quad \times$$



5.1 Zur Holonomiegruppe.

In analoger Weise lässt sich die Holonomiegruppe auch in Vektorbündeln definieren.

5.3 Definition Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel über M mit kovarianter Ableitung ∇ und $x \in M$.

1.) Die *Holonomiegruppe von ∇ in x* definiert als

$$\text{Hol}_x(\nabla) := \{P_y^\nabla : \text{für ein } \gamma \in \Omega(x)\}.$$

2.) Die *reduzierte Holonomiegruppe von ∇ in x* ist definiert als

$$\text{Hol}_x^0(\nabla) := \{P_y^\nabla : \text{für ein } \gamma \in \Omega_0(x)\}.$$

Die Definition der Holonomiegruppe für Vektorbündel und für Hauptfaserbündel sind äquivalent und lassen sich wie folgt ineinander überführen.

5.4 Satz Sei $E = P \times_\rho V$ ein zu P assoziiertes Vektorbündel mit induzierter kovarianter Ableitung ∇ . Dann gilt für $x \in M$,

$$\text{Hol}_x(\nabla) = [p]\rho(\text{Hol}_p(A))[p]^{-1}, \quad p \in P_x,$$

wobei $[p] : V \rightarrow E_x$ den Faserisomorphismus und $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ eine G -Darstellung bezeichnet. Eine analoge Aussage gilt für $\text{Hol}_x^0(\nabla)$. \times

Beweis. Sei $y \in \Omega(x)$ und $[p, \nu] \in E$. Da y geschlossen ist, bildet P_y^A die Faser P_x auf die Faser P_x ab und es gilt $P_y^A(p) = p \cdot g_y$ mit einem Element $g_y \in G$. Nach Definition der induzierten Parallelverschiebung gilt

$$\begin{aligned} P_y^\nabla([p, \nu]) &= [P_y^A(p), \nu] = [p \cdot g_y, \nu] = [p \cdot g_y, \rho(g_y)^{-1} \rho(g_y) \nu] \\ &= [p, \rho(g_y) \nu]. \end{aligned}$$

Somit ist $P_y^\nabla = [p] \circ \rho(g_y) \circ [p]^{-1}$, was zu zeigen war. ■

Bisher haben wir noch nicht gezeigt, dass es sich bei der Holonomiegruppe auch tatsächlich um eine Gruppe handelt. Die algebraischen Gruppeneigenschaften folgen sofort aus den Rechenregeln für die Parallelverschiebung. Dass es sich bei der Holonomiegruppe aber tatsächlich um eine Lie-Gruppe handelt, erfordert etwas mehr Anstrengung.

5.5 **Lemma** a) Für jedes $p \in P$ sind $\text{Hol}_p(A)$ und $\text{Hol}_p^0(A)$ algebraische Untergruppen von G und es gilt,

$$\text{Hol}_p^0(A) \subset \text{Hol}_p(A) \subset G.$$

b) Für jedes $p \in P$ ist $\text{Hol}_p^0(A)$ ein Normalteiler von $\text{Hol}_p(A)$.

c) Seien $p \in P$ und $g \in G$, dann gilt

$$\text{Hol}_{p \cdot g}(A) = g^{-1} \text{Hol}_p(A) g, \quad \text{Hol}_{p \cdot g}^0(A) = g^{-1} \text{Hol}_p^0(A) g. \quad \times$$

Aus Eigenschaft c) folgt unmittelbar, dass die Holonomiegruppe bis auf Konjugation nicht vom gewählten Punkt in der Faser P_x abhängt. Sie sieht also im Wesentlichen auf der gesamten Faser gleich aus.

Beweis. a): Die Inklusionsfolge ist klar. Seien nun γ und δ geschlossene Wege durch x und $p \in P_x$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p \cdot g_{\gamma \star \delta} &= P_{\gamma \star \delta}^A(p) = P_\gamma^A \circ P_\delta^A(p) = P_\gamma^A(p \cdot g_\delta) \\ &= \gamma_{p \cdot g_\delta}^*(1) = \gamma_p(1) \cdot g_\delta = p \cdot g_\gamma \cdot g_\delta, \end{aligned}$$

denn der horizontale Lift ist rechtsinvariant. Somit ist $g_{\gamma \star \delta} = g_\gamma \cdot g_\delta$, und folglich ist die Holonomiegruppe abgeschlossen unter die Multiplikation von G . Analog

berechnet man, dass die Inverse zu g_Y gerade durch g_{Y^-} gegeben ist. Also ist die Holonomiegruppe tatsächlich eine algebraische Untergruppe von G .

b): Sei γ eine geschlossene Kurve durch x und γ_0 eine geschlossene, nullhomotope Kurve durch x . Dann ist $\gamma^- \star \gamma_0 \star \gamma$ ebenfalls geschlossen und nullhomotop. Somit gilt

$$g_Y^{-1} \cdot g_{\gamma_0} \cdot g_Y = g_{Y^-} \cdot g_{\gamma_0} \cdot g_Y = g_{Y^- \star \gamma_0 \star Y} \in \text{Hol}_x^0(A).$$

Also ist $\text{Hol}_x^0(A)$ ein Normalteiler von $\text{Hol}_x(A)$.

c): Die Parallelverschiebung vertauscht mit der Rechtstranslation. Seien also $p \in P$ und $g \in G$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Hol}_{p \cdot g}(A) &= \{g_Y : P_Y(p \cdot g) = (p \cdot g) \cdot g_Y, \quad Y \in \Omega(x)\} \\ &= \{g_Y : P_Y(p) = p \cdot (g \cdot g_Y \cdot g^{-1}), \quad Y \in \Omega(x)\} \\ &= \{g^{-1} \cdot g_Y \cdot g : P_Y(p) = p \cdot g_Y, \quad Y \in \Omega(x)\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Um einzusehen, dass die Holonomiegruppe darüber hinaus auch eine Lie-Untergruppe ist, bedarf es noch einiger topologischer Feinheiten.

- 5.6 **Satz von Freudenthal-Yamabe** Sei $H \subset G$ eine algebraische Untergruppe einer Lie-Gruppe G . Falls sich jedes Element von H durch eine, ganz in H verlaufende Kurve mit dem Einselement verbinden lässt, so ist H eine Lie-Untergruppe von G . \times

Beweisskizze. Ein vollständiger Beweis findet sich in [1, Satz 1.22]. Die Idee des Beweises beruht darauf, durch geeignete Konstruktion einer integrierbaren Distribution S , mit dem Satz von Frobenius die Untergruppe H als Integralmannigfaltigkeit zu S zu gewinnen. Man definiert dazu

$$S_e := \{X \in T_e G : X = \dot{\gamma}(0), \text{ wobei } \gamma \text{ durch } e \text{ geht und ganz in } H \text{ verläuft}\},$$

und setzt $S_g := dL_g(S_e)$. Der schwierige Teil ist nun zu zeigen, dass S tatsächlich eine involutive Distribution ist. Es folgt dann, dass H die maximale Integralmannigfaltigkeit durch e ist, und dass die Gruppenoperationen glatt sind. Damit ist H eine Untermannigfaltigkeit von G im schwachen Sinne und folglich eine Lie-Untergruppe von G . \blacksquare

Als Anwendung des Satzes von Freudenthal-Yamabe erhalten wir die gewünschte Aussage über die Differenzierbarkeit der Holonomiegruppe.

5.7 **Satz** Sei p ein Punkt in P . Dann gelten:

- Die algebraischen Untergruppen $\text{Hol}_p^0(A)$ und $\text{Hol}_p(A)$ sind Lie-Untergruppen von G .
- Die Untergruppe $\text{Hol}_p^0(A) \subset \text{Hol}_p(A)$ ist die Zusammenhangskomponente der Eins. \times

Beweisskizze. Ein vollständiger Beweis findet sich in [1, Satz 4.3]. Wir zeigen zunächst, dass $\text{Hol}_p^0(A)$ eine Lie-Untergruppe ist. Sei dazu $g \in \text{Hol}_p^0(A)$, dann ist $P_\gamma^A(p) = p \cdot g$ für ein $\gamma \in \Omega_0(x)$. Sei $F : I \times I \rightarrow M$ die Homotopie zwischen der Kurve γ und der konstanten Kurve $\gamma_0 \equiv x$. Setzen wir $\gamma_s = F_s = F(\cdot, s)$, dann ist

$$P_{\gamma_s}^A(p) = p \cdot g_s,$$

mit $g_s \in \text{Hol}_p^0(A)$ für $0 \leq s \leq 1$, wobei $g_0 = e$ und $g_1 = g$ ist. Somit ist g_s eine Kurve in $\text{Hol}_p^0(A)$, die g mit dem Einselement verbindet. Nach dem Satz von Freudenthal-Yamabe ist daher $\text{Hol}_p^0(A)$ eine Lie-Untergruppe von G .

Um die Lie-Gruppen Eigenschaft auch für $\text{Hol}_p(A)$ einzusehen, verwenden wir aus Topologie, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$ von M abzählbar ist. Weiterhin wird $\pi_1(M)$ bis auf Homotopie von glatten Kurven definiert, d.h. jedes Element lässt sich als glatte Kurve realisieren. Somit ist die Abbildung

$$f : \pi_1(M) \rightarrow \text{Hol}_p(A)/\text{Hol}_p^0(A), \quad \gamma \mapsto [g_\gamma],$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und der Quotient $\text{Hol}_p(A)/\text{Hol}_p^0(A)$ ist abzählbar. Weiterhin ist die Holonomiegruppe als abzählbare Vereinigung ihrer Nebenklassen gegeben,

$$\text{Hol}_p(A) = \bigcup_n g_n \text{Hol}_p^0(A).$$

Wir haben schon gezeigt, dass $\text{Hol}_p^0(A)$ glatt ist, also trägt jede Nebenklasse eine Mannigfaltigkeitsstruktur und damit ist auch die abzählbare Vereinigung $\text{Hol}_p(A)$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit glatten Gruppenoperationen. ■

Als nächstes möchten wir untersuchen, wie die Reduktion der Strukturgruppe G und die Holonomiegruppe zusammenhängen. Es wird sich herausstellen, dass die Holonomiegruppe die "kleinste" Gruppe darstellt, auf die sich die Strukturgruppe reduzieren lässt. Es gilt aber mehr, denn sogar der Zusammenhang lässt sich auf diese Gruppe reduzieren.

5.8 **Definition** Sei Q eine H -Reduktion von P und A^* ein Zusammenhang auf Q so, dass

$$\ker(A^*) = T^hQ \subset T^hP = \ker(A).$$

Dann ist (Q, A^*) ein H -Reduktion von (P, A) und man sagt, der Zusammenhang A reduziert sich auf H . \times

Als passendes Unterbündel für die Reduktion des Zusammenhangs A definieren wir nun das Holonomiebündel.

5.9 **Definition** Sei $u \in P$, dann ist das *Holonomiebündel von A durch u* definiert als

$$P^A(u) := \{p \in P : \text{es existiert eine horizontale Kurve in } P \text{ von } u \text{ nach } p\}. \quad \times$$

5.10 **Reduktionssatz der Holonomietheorie** Für jedes $u \in P$ gelten:

a) Durch $\pi : P^A(u) \rightarrow M$ ist ein $\text{Hol}_u(A)$ -Hauptfaserbündel gegeben.

b) Der Zusammenhang A reduziert sich auf $\text{Hol}_u(A)$, d.h. $P^A(u) \subset P$ ist eine $\text{Hol}_u(A)$ -Reduktion und

$$T^hP^A(u) \subset T^hP. \quad \times$$

5.11 **Bemerkungen.** A. Eigenschaft b) beschreibt beschreibt eine besonders "starke" Reduktion, denn es reduziert sich nicht nur die Strukturgruppe auf die Holonomiegruppe, sondern auch der Zusammenhang reduziert sich.

B. Der Totalraum P lässt sich als disjunkte Vereinigung von Holonomiebündeln $P^A(u)$ beschreiben, denn durch

$$p \sim q \Leftrightarrow \text{es existiert eine horizontale Kurve von } p \text{ nach } q$$

ist eine Äquivalenzrelation auf P gegeben, und aus $p \sim q$ folgt, dass die entsprechenden Holonomiegruppen übereinstimmen, d.h. $\text{Hol}_p(A) = \text{Hol}_q(A)$. \rightarrow

5.12 **Definition** Ein Zusammenhang A heißt *irreduzibel*, falls sich A auf keine echte Lie-Untergruppe reduzieren lässt. \times

Dass die Holonomiegruppe tatsächlich die "kleinste" Untergruppe ist auf die sich P samt dem Zusammenhang A reduziert, schreibt sich nun wie folgt.

5.13 **Satz** Das Holonomiebündel $P^A(u)$ zusammen mit dem induzierten Zusammenhang ist irreduzibel. \times

5.14 **Bemerkung.** Sei $Q \subset P$ eine H -Reduktion und E ein assoziiertes Vektorbündel. Dann gilt

$$E = P \times_{\rho} V = Q \times_{\rho|_H} V.$$

Durch die Einschränkung von ρ auf H lässt sich E als Summe von Bündeln schreiben. Reduziert sich nicht nur die Strukturgruppe, sondern auch der Zusammenhang, so besteht die Bündelsumme aus parallelen Unterbündeln. \rightarrow

Die Holonomiegruppe beinhaltet viele interessante Informationen über das Hauptfaserbündel und den Zusammenhang. Jedoch stellt es sich im Allgemeinen als äußerst schwierig heraus, diese Gruppe explizit zu berechnen. Die Krümmung F^A ist eine 2-Form auf P mit Werten in der Lie-Algebra \mathfrak{g} . Mit Hilfe der Krümmung lässt sich die Lie-Algebra der Holonomiegruppe angeben, welche die Holonomiegruppe in erster Näherung beschreibt. Allerdings ist auch die Krümmung ein kompliziertes und manchmal unzugängliches Objekt...

5.15 **Holomietheorem von Ambrose-Singer** Für jedes $u \in P$ gilt,

$$\text{Lie}(\text{Hol}_u(A)) = \{F^A(X, Y) : p \in P^A(u), \quad X, Y \in T_p^h P\}. \quad \times$$

Im Fall einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit erhalten wir sofort folgendes globales Resultat.

5.16 **Korollar** Sei G zusammenhängend und M einfach zusammenhängend. Dann gilt

$$A \text{ ist irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{g} = \{F^A(X, Y) : p \in P^A(u), \quad X, Y \in T_p^h P\}. \quad \times$$

Beweis. Da M einfach zusammenhängend ist, sind alle Schleifen nullhomotop. Also ist $\Omega_0(x) = \Omega(x)$. Folglich gilt für jedes $p \in P$ auch $\text{Hol}_p^0(A) = \text{Hol}_p(A)$ und somit ist $\text{Hol}_p(A)$ zusammenhängend. Daher ist $\text{Hol}_p(A)$ genau dann eine echte Untergruppe von G , wenn auch die Lie-Algebra von $\text{Hol}_p(A)$ eine echte Unter algebra von \mathfrak{g} ist. ■

Beweis des Holonomietheorems Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $G = \text{Hol}_u(A)$ und $P = P^A(u)$. Andernfalls gehen wir durch Reduktion zum Holonomiebündel über. Weiterhin setzen wir

$$\mathfrak{m} := \{F^A(X, Y) : p \in P^A(u), \quad X, Y \in T_p^h P\}.$$

Zu zeigen ist also, dass $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} = \text{Lie}(\text{Hol}_u(A))$. Seien dazu $p \in P$ sowie $X, Y \in T_p^h P$ und $W \in \mathfrak{g}$. Wir betrachten die Kurve

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{m}, \quad t \mapsto \alpha(t) := \left(R_{\exp(tW)}^* F^A\right)_p(X, Y).$$

Die Krümmung ist eine 2-Form vom Typ Ad , d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(0) &= \frac{d}{dt} \Big|_0 F_{\exp(tW)}(\text{d}R_{\exp(tW)}(X), \text{d}R_{\exp(tW)}(Y)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \text{Ad}(\exp(-tW))F_p(X, Y) \\ &= -\text{ad}(W)F_p(X, Y) \\ &= [F_p^A(X, Y), W]. \end{aligned}$$

Da α eine Kurve in \mathfrak{m} beschreibt, ist auch $\dot{\alpha}(0) = [F_p^A(X, Y), W] \in \mathfrak{m}$ für jedes $W \in \mathfrak{g}$. Also ist \mathfrak{m} ein Ideal von \mathfrak{g} und damit insbesondere eine Lie-Unteralgebra.

Man definiert nun folgende Distribution

$$E \subset TP = T^h P \oplus T^v P, \quad p \mapsto E_p := T_p^h P \oplus \{\tilde{W}_p : W \in \mathfrak{m}\},$$

und verifiziert, dass E involutiv ist. Aufgrund der Linearität müssen wir dazu nur folgende drei Fälle untersuchen.

1. Fall, $V, W \in \mathfrak{m}$. Dann gilt

$$[\tilde{V}, \tilde{W}] = [\widetilde{V}, \widetilde{W}] \in \Gamma(E).$$

2. Fall, $X \in \Gamma(T^h P)$ und $V \in \mathfrak{m}$. Dann ist $[X, \tilde{V}]$ horizontal und somit ein Schnitt in E .

3. Fall, $X, Y \in \Gamma(T^h P)$. Der horizontale Teil des Kommutators liegt ohnehin in E und für den vertikalen gilt,

$$\text{pr}_v[X, Y] = -F^A(\widetilde{X}, \widetilde{Y}),$$

also liegt dieser auch in E .

Somit ist E involutiv und nach dem Satz von Frobenius existiert eine maximale Integralmannigfaltigkeit $Q \subset P$ von E durch $u \in P$. Ein Punkt q liegt in Q genau dann, wenn eine Kurve γ von u nach q existiert, die ganz in Q verläuft und für die gilt,

$$\dot{\gamma}(t) \in E_{\gamma(t)}.$$

Somit ist $P = P^A(u) \subset Q$, denn $T^h P \subset TQ = E$. Also gilt $P = Q$ und somit auch $E = TQ = TP$. Insbesondere ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}$. ■

5-B Fläche Zusammenhänge und Holonomie

Ein Zusammenhang A auf P heisst flach, wenn seine Krümmung verschwindet, d.h. $F^A \equiv 0$. Im Fall einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M kennen wir bereits das folgende Resultat:

A ist flach $\Leftrightarrow (P, A)$ ist isomorph zu trivialen G -Hauptfaserbündel mit dem kanonischen
 \Leftrightarrow Die Parallelverschiebung hängt nicht vom Weg ab.

Mit Hilfe der Holonomietheorie können wir den Satz nun ganz leicht beweisen.

Beweis. Verschwindet die Krümmung, dann ist nach dem vorangegangenen Satz die Lie-Algebra der Holonomiegruppe diskret. Da aber M einfach zusammenhängend ist, folgt, dass die Holonomiegruppe dann trivial ist. Dann gilt für jedes $p \in P$ und jede geschlossene Kurve γ in M , dass

$$P_\gamma^A(p) = p.$$

Seien nun α und β zwei Kurven in M von x nach y , dann gilt

$$q = P_\alpha^A(p) = P_\alpha^A \circ P_\beta^A \circ P_\beta^A(p) = P_{\alpha \star \beta} \circ P_\beta^A(p) = P_\beta^A(p).$$

Also hängt die Parallelverschiebung nicht vom gewählten Weg ab.

Hängt umgekehrt die Parallelverschiebung nicht vom gewählten Weg ab, dann gilt

$$P_\gamma^A(p) = p, \quad \text{für } p \in P_x, \gamma \in \Omega(x) = \Omega_0(x).$$

Somit ist die Holonomiegruppe trivial, also ist ihre Lie-Algebra diskret und folglich muss die Krümmung verschwinden. ■

Als unmittelbare Konsequenz aus dem Reduktionssatz erhalten wir.

5.17 **Korollar** *Der Zusammenhang A reduziert sich genau dann auf die triviale Gruppe, wenn (P, A) trivial ist.* \times

5.18 **Bemerkung.** Die Fundamentalgruppe von M sei nicht trivial und die Krümmung verschwinde,

$$\pi_1(M) \neq 1, \quad F^A \equiv 0.$$

So ist $\text{Hol}_p(A)$ im Allgemeinen nicht zusammenhängend und daher nur diskret aber nicht trivial. Somit ist $M^* = P^A(u) \rightarrow M$ eine Überlagerung von M . Weiterhin ist $\text{Hol}_p^0(A)$ trivial und daher ist die Darstellung

$$\rho : \pi_1(M) \rightarrow \text{Hol}_u(A)$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Die Holonomiegruppe ist folglich eine Quotientengruppe der Fundamentalgruppe,

$$\text{Hol}_p(A) = \pi_1(M)/\Gamma.$$

Die flachen Vektorbündel sind nun assoziiert zu entsprechenden Darstellungen der Fundamentalgruppe. Die Modulräume flacher Vektorbündel spielen eine fundamentale Rolle in der konformen Quantenfeldtheorie. Für 2-dimensionale Flächen sind die Darstellungen vollständig untersucht.

Die universelle Überlagerung $\tilde{M} \rightarrow M$ ist ein $\pi_1(M)$ -Hauptfaserbündel. Das Holonomiebündel ergibt sich als dazu via ρ assoziiertes Faserbündel:

$$P := \tilde{M} \times_{\rho} \text{Hol}_p(A). \quad \rightarrow$$

5-C Parallele Schnitte und Holonomie

Sei $\pi : E \rightarrow M$ ein assoziiertes Vektorbündel

$$E = P \times_{\rho} V,$$

mit kovarianter Ableitung ∇ , die durch den Zusammenhang A auf P induziert wird. Wir wollen nun genauer untersuchen, wie parallele Schnitte, das sind Schnitte $e \in \Gamma(E)$ mit $\nabla e = 0$, mit der Holonomie zusammenhängen.

- 5.19 *Bemerkungen.* A. Die parallelen Schnitte sind invariant unter Parallelverschiebung, d.h. für zwei Punkte x und y in M gilt

$$e(y) = \tau_{xy}e(x).$$

Ein paralleler Schnitt ist folglich bereits eindeutig durch den Wert an einer einzigen Stelle festgelegt.

- B. Verschwindet ein paralleler Schnitt an einer Stelle, so folgt dass er identisch Null ist. Nichttriviale parallele Schnitte haben also keine Nullstellen.
- C. Der Vektorraum der parallelen Schnitte $\text{Par}(E, \nabla)$ ist ein endlichdimensionaler Unterraum von $\Gamma(E)$. \rightarrow

- 5.20 **Satz** *Der Raum der parallelen Schnitte in E ist durch die Holonomie-invarianten Vektoren in V gegeben,*

$$\text{Par}(E, \nabla) \cong \left\{ \nu \in V : \rho(g)\nu = \nu \text{ für alle } g \in \text{Hol}_p(A) \right\}.$$

Beweis. \supset : Sei $\nu \in V$ ein Fixpunkt der Darstellung, d.h. $\rho(g)\nu = \nu$ für alle $g \in \text{Hol}_p(A)$. Zu $x \in M$ beliebig, definiert man für $y \in M$,

$$\varphi_\nu(y) := [P_y^A(p), \nu],$$

wobei γ eine Kurve von x nach y ist und $\pi(p) = x$. Es ist nun zu zeigen, dass φ_ν ein wohldefinierter, glatter und paralleler Schnitt in E ist.

Wir zeigen zuerst, dass die Definition von $\varphi_\nu(y)$ nicht von der Wahl des Weges γ abhängt. Sei dazu μ eine weitere Kurve von x nach y , dann ist $\gamma \star \mu^-$ ein geschlossener Weg durch x . Somit gibt es ein $h_{\gamma \star \mu^-} \in \text{Hol}_p(A)$ so, dass

$$p \cdot h_{\gamma \star \mu^-} = P_{y \star \mu^-}^A(p) = P_{\mu^-}^A \circ P_y^A(p).$$

Andererseits gilt aufgrund der G -Äquivarianz

$$P_{\mu^-}^A(p \cdot h_{\gamma \star \mu^-}) = P_y^A(p) = P_{\mu^-}^A(p) \cdot h_{\gamma \star \mu^-}.$$

Schließlich folgt, da ν ein Fixpunkt ist,

$$[P_y^A(p), \nu] = [P_{\mu^-}^A(p) \cdot h_{\gamma \star \mu^-}, \nu] = [P_{\mu^-}^A(p), \rho(h_{\gamma \star \mu^-})\nu] = [P_{\mu^-}^A(p), \nu].$$

Also ist φ_ν wohldefiniert. Aufgrund der differenzierbaren Abhängigkeit der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen von den Anfangswerten, ist φ_ν auch glatt.

Weiterhin gilt für ein Vektorfeld X auf M , dass

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi_\nu)(\gamma) &= \frac{d}{dt} \Big|_0 P_{\alpha(t)\gamma}^E \varphi_\nu(\alpha(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 [P_{\alpha(t)\gamma}^A P_{X\alpha(t)}^A(p), \nu] \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 [P_{X\gamma}(p), \nu] = 0, \end{aligned}$$

denn die Parallelverschiebung hängt nicht vom Weg ab. Somit ist φ_ν tatsächlich parallel.

∴ Sei φ ein glatter, paralleler Schnitt in E . Schreiben wir das Vektorbündel assoziiert zum Holonomiebündel,

$$E = P \times_G V = P^A(u) \times_{\text{Hol}_u(A)} V,$$

so entspricht φ einerseits einer Funktion $\overline{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(P, V)^G$ und andererseits einer Funktion $\overline{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(P(u)^A, V)^{\text{Hol}_u(A)}$, wobei $\overline{\psi} = \overline{\varphi}|_{P^A(u)}$. Nach Voraussetzung ist φ parallel, also gilt

$$0 = \overline{\nabla_X \varphi} = X^*(\overline{\varphi}),$$

und $\overline{\varphi}$ ist konstant entlang horizontaler Kurven. Da das Holonomiebündel $P^A(u)$ gerade von horizontalen Kurven erzeugt wird, existiert also ein Vektor $\nu \in V$ so, dass

$$\nu \equiv \overline{\varphi}|_{P^A(u)} = \overline{\psi}.$$

Nun ist die Funktion $\overline{\psi}$ vom Typ $\text{Hol}_u(A)$, d.h. für $h \in \text{Hol}_u(A)$ gilt,

$$\nu = \overline{\psi}(q \cdot h) = \rho(h)^{-1} \overline{\psi}(q) = \rho(h)^{-1} \nu.$$

Somit ist $\rho(h)\nu = \nu$ für alle $h \in \text{Hol}_u(A)$ und ν ist Holonomie-invariant. ■

Fixpunkte der Holonomiedarstellung entsprechen demnach parallelen Schnitten.

5.21 **Zusatz** *Ist die Basismannigfaltigkeit M außerdem einfach zusammenhängend, dann gilt sogar,*

$$\text{Par}(E, \nabla) \cong \left\{ \nu \in V : \rho_*(X)\nu = 0 \text{ für alle } X \in \text{Lie}(\text{Hol}_p(A)) \right\}. \quad \times$$

Beweis. Sei M einfach zusammenhängend, dann ist $\text{Hol}_p(A) = \text{Hol}_p^0(A)$ eine zusammenhängende Lie-Gruppe und folglich gilt

$$\rho(g)\nu = \nu \text{ für alle } g \in \text{Hol}_p(A)$$

genau dann, wenn

$$\rho_*(X)\nu = 0 \text{ für alle } X \in \text{Lie}(\text{Hol}_p(A)). \quad \blacksquare$$

5-D Holonomiegruppen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf dem Tangentialbündel. Da der Levi-Civita-Zusammenhang der eindeutig bestimmte, metrische und torsionsfreie Zusammenhang auf TM ist, ist durch ∇ in kanonischer Weise eine Holonomiegruppe auf M gegeben. Wir bezeichnen diese mit

$$\text{Hol}_x(M, g) := \text{Hol}_x(\nabla) = \{P_\gamma : T_x M \rightarrow T_x M : \gamma \in \Omega(x)\}, \quad x \in M.$$

Die Elemente der Holonomiegruppe können wir mit speziellen Automorphismen von $T_x M$ identifizieren. Dies liefert eine Darstellung der Holonomiegruppe auf den Automorphismen von $T_x M$,

$$\text{Hol}_x(M, g) \subset \text{GL}(T_x M) \cong \text{GL}_n.$$

5.22 *Bemerkung.* Wie bereits festgestellt, hängt die Holonomiegruppe, bis auf Konjugation nicht von der Wahl des Punktes ab. Genauer gilt für Punkte x und y in M , dass

$$\text{Hol}_y(M, g) = P_\sigma \circ \text{Hol}_x(M, g) \circ P_\sigma^{-1},$$

wobei σ einen Weg bezeichnet, der x und y verbindet. \leadsto

BEISPIEL 28 a.) Auf dem \mathbb{R}^n ist die Parallelverschiebung unabhängig von der Wahl des Weges. Somit ist die Holonomiegruppe trivial,

$$\text{Hol}_x^0(\mathbb{R}^n) = \text{Hol}_x(\mathbb{R}^n) = \{1\}.$$

b.) In Kapitel 1-G haben wir festgestellt, dass auf einer Mannigfaltigkeit genau dann eine Riemannsche Metrik existiert, wenn das Rahmenbündel eine $O(n)$ -Reduktion besitzt, d.h. wenn sich die Strukturgruppe GL_n auf O_n reduzieren lässt. Analog dazu, existiert auf einer Mannigfaltigkeiten genau dann eine Riemannsche Metrik, wenn die Holonomiegruppe eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe ist, $\text{Hol}_x(M) \subset O_n$.

Für orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeiten lässt sich die Strukturgruppe sogar auf SO_n reduzieren. Außerdem ist (M, g) genau dann orientierbar, wenn $\text{Hol}_x(M) \subset SO_n$.

c.) Die n -dimensionale Sphäre S^n ist eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit und es gilt $\text{Hol}_x(S^n) = SO_n$. ■

5.23 *Bemerkungen.* A. Das Holonomietheorem von Ambrose-Singer erlaubt einer Beschreibung der Lie-Algebra der Holonomiegruppe mit Hilfe der Krümmung. Im Fall des Tangentialbündels mit Levi-Civita Zusammenhang vereinfacht sich diese Beschreibung zu

$$\begin{aligned} & \text{Lie}(\text{Hol}_x(M, g)) \\ &= \left\{ P_Y - R_Y(P_Y(V), P_Y(W))P_Y : \begin{array}{l} \gamma \text{ eine Kurve von } x \text{ nach } y \\ V, W \in T_x M \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $R_x(V, W)$ stets ein Element der Holonomiegruppe $\text{Hol}_x(M, g)$. Die ersten beiden Symmetrien des Krümmungstensors lassen sich besonders kurz schreiben als

$$R_x \in \text{Sym}^2(\Lambda^2 T_x^* M).$$

Nach Ambrose-Singer gilt darüber hinaus

$$R_x \in \text{Sym}^2(\text{Lie}(\text{Hol}_x(M, g))). \quad \rightarrow$$

b. Die Holonomiegruppe ist ein globales Objekt und lässt sich im Allgemeinen nicht berechnen, wenn man nur eine kleine Umgebung der Mannigfaltigkeit betrachtet. Allerdings erhält man die Holonomiegruppe einer reell analytischen Mannigfaltigkeiten bereits durch das Betrachten von kleinen Umgebungen, hier ist die Holonomie dann tatsächlich bereits lokal bestimmt. \rightarrow

5.24 **Holonomie-Prinzip** Sei $\mathcal{T} \rightarrow M$ ein Tensorbündel auf M . Dann gelten:

a) Sei $T \in \Gamma(\mathcal{T})$ mit $\nabla T \equiv 0$. Dann ist $T(x) \in \mathcal{T}_x$ invariant unter $\text{Hol}_x(M, g)$, d.h.

$$gT(x) = T(x), \quad \text{für alle } g \in \text{Hol}_x(M, g).$$

b) Sei $T_x \in \mathcal{T}_x$ ein $\text{Hol}_x(M, g)$ -invarianter Tensor. Dann existiert genau ein Schnitt $T \in \Gamma(\mathcal{T})$ mit $\nabla T \equiv 0$ und $T(x) = T_x$. \times

Parallele Schnitte sind also punktweise invariant unter der Holonomiegruppe und umgekehrt existiert zu jedem invarianten Tensor ein paralleler Schnitt.

BEISPIEL 29 a.) Sei $\text{Hol}_x(M, g) \subset \text{O}(T_x M, g_x)$, wobei $\text{O}(T_x M)$ nach Definition das Skalarprodukt $g_x \in \text{Sym}^2(T_x M)$ erhält. Das Holonomie-Prinzip liefert nun die Existenz einer parallelen Metrik $g \in \Gamma(\text{Sym}^2(TM))$ mit $g(x) = g_x$. Für beliebige Vektorfelder X, Y, Z auf M gilt also

$$0 = (\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z),$$

d.h. der Zusammenhang ist torsionsfrei. Dies deckt sich mit der Beobachtung, dass eine O_n -Reduktion genau dann vorliegt, wenn auf M eine Riemannsche Metrik existiert.

b.) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist genau dann orientierbar, wenn

$$\text{Hol}_x(M, g) \subset \text{SO}(T_x M).$$

\Rightarrow : Sei M orientierbar, dann existiert eine parallele Volumenform. Da die Parallelverschiebung P_Y^∇ die Orientierung erhält, folgt, dass $\text{Hol}_x(M, g) \subset \text{SO}(T_x M)$ gilt.

\Leftarrow : Sei $\text{Hol}_x(M, g) \subset \text{SO}(T_x M) = \{A \in \text{O}(T_x M) : A^* \text{vol}_0 = \text{vol}_0\}$, wobei $\text{vol}_0 = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ das kanonische Volumenelement von $T_x M$ bezeichnet. Nach Voraussetzung ist $\text{vol}_0 \in \Lambda^n T_x^* M$ invariant unter $\text{Hol}_x(M, g)$, also existiert ein paralleler Schnitt $\text{vol} \in \Gamma(\Lambda^n T^* M)$. Somit ist vol eine n -Form auf M ohne Nullstellen, und definiert daher eine Orientierung.

c.) Auf M existiert ein paralleles Vektorfeld genau dann, wenn ein Hol_x invarianter Vektor v existiert, d.h. wenn

$$\text{Hol}_x(M, g) \subset O_{n-1} \subset O_n.$$

d.) Sei M eine $2n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\mathcal{T} = \text{End}(TM)$ das Endomorphismenbündel. Reduziert sich die Holonomiegruppe wie folgt,

$$\text{Hol}_x(M^{2n}, g) \subset U(T_x M, g_x, J_x) = \{A \in \text{SO}(T_x M, g) : AJ_x = J_x A\},$$

wobei $J_x \in \text{End}(T_x M)$ mit $J_x^* g_x = g_x$ und $J_x^2 = -\text{Id}$ eine fast komplexe Struktur auf $T_x M$ bezeichnet, so ist M eine Kählermannigfaltigkeit, d.h. es existiert ein Endomorphismus J von TM mit

$$J^* g = g, \quad J^2 = -\text{Id}, \quad \nabla J = 0.$$

Existiert umgekehrt eine fastkomplexe Struktur $J \in \text{End}(TM)$, so reduziert sich die Strukturgruppe auf U_n . Ist J außerdem parallel, also $\nabla J \equiv 0$, so reduziert sich sogar die Holonomiegruppe auf U_n .

5-E Riemannsche Produkte und Holonomie

Sei wieder (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie die Holonomiegruppe eines Riemannschen Produktes aussieht und umgekehrt, welche Kriterien für die Holonomiegruppe garantieren, dass M ein Riemannsches Produkt ist.

5.25 **Satz** *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

- a) *Es existiert paralleles Unterbündel vom Rang r .*
- b) *Die Holomonedarstellung $\text{Hol}_x(M, g) \rightarrow \text{GL}(T_x M)$ lässt einen k -dimensionalen Unterraum von $T_x M$ invariant. \times*

Beweis. \Rightarrow : Sei E ein paralleles Unterbündel, d.h. eine k -dimensionale Distribution, die von der Parallelverschiebung erhalten wird. Also gilt für jedes $x \in M$ und jede Schleife γ an x , dass

$$P_\gamma E_x = E_x.$$

Somit ist E_x ein k -dimensionaler Holonomie-invarianter Unterraum von $T_x M$.

\Leftarrow : Sei umgekehrt E_x ein k -dimensionaler $\text{Hol}_x(M, g)$ -invarianter Unterraum von $T_x M$. Sei $\gamma \in M$ und γ eine Kurve von x nach y , dann definiert man

$$E_y = P_\gamma E_x.$$

Dann ist E_y wohldefiniert, denn für einen weiteren Weg δ von x nach y und ein $\nu \in E_x$ gilt

$$P_{\delta} P_y(\nu) = w \in E_x,$$

da die Parallelverschiebung E_x invariant lässt. Somit ist $P_{\delta}(w) = P_y(\nu)$ und folglich gilt auch $P_{\delta}(E_x) = P_y(E_x)$. Man erhält somit eine glatte Distribution E , denn die Parallelverschiebung hängt differenzierbar von den Anfangswerten ab. Außerdem ist E nach Konstruktion invariant unter Parallelverschiebung, also parallel. ■

5.26 *Zur Erinnerung:* Ein paralleles Unterbündel E vom Rang r ist integabel, denn für $X, Y \in E$ gilt

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in E,$$

aufgrund der Torsionsfreiheit des Levi-Civita Zusammenhangs. \rightarrow

5.27 **Satz** Sei $(M, g) = (M_1, g_1) \times (M_2, g_2)$ ein Riemannsches Produkt. Dann gilt in jedem Punkt $x = (x_1, x_2) \in M$,

$$\text{Hol}_{(x_1, x_2)}(M, g) \cong \text{Hol}_{x_1}(M_1, g_1) \times \text{Hol}_{x_2}(M_2, g_2).$$

Insbesondere ist $TM = TM_1 \oplus TM_2$ eine Aufspaltung in $\text{Hol}_x(A)$ -invariante Unterräume. \times

Beweis. Für $(p, q) \in M$ setzen wir für $a = 1$ oder 2 ,

$$E_{(p,q)}^a = \begin{cases} T_p M_1, & a = 1, \\ T_q M_2, & a = 2. \end{cases}$$

Dann ist E^a eine involutive Distribution und somit integabel. Weiterhin gilt für die kovariante Ableitung auf M ,

$$\nabla_{X_1 \times X_2}^{g_1 \times g_2} (Y_1 \oplus Y_2) = \left(\nabla_{X_1}^{g_1} Y_1 \right) \oplus \left(\nabla_{X_2}^{g_2} Y_2 \right).$$

Somit schreibt sich die Parallelverschiebung entlang einer Kurve y als Produkt,

$$P_y^{\nabla} = \begin{pmatrix} P_{Y_1}^{\nabla_1} & \\ & P_{Y_2}^{\nabla_2} \end{pmatrix},$$

bezüglich $TM = TM_1 \oplus TM_2$. Somit sind TM_1 und TM_2 Holonomie-invariant. ■

Unser Ziel ist es nun eine Umkehrung für diese Aussage zu finden. Wann ist M ein Riemannsches Produkt, wenn das Tangentialbündel TM in Holonomie-invariante Unterräume zerfällt? Im Allgemeinen wird dies nur lokal der Fall sein.

- 5.28 **Definition** Eine Mannigfaltigkeit (M, g) mit irreduzibler Holonomiedarstellung nennt man *irreduzibel*. \times

Irreduzible Mannigfaltigkeiten bilden quasi die Bausteine für Mannigfaltigkeiten. Lokal sieht jede Mannigfaltigkeit wie ein Riemannsches Produkt aus solchen Bausteinen aus.

- 5.29 **Zerlegungssatz** Besitze die Holonomiedarstellung einen k -dimensionalen invarianten Unterraum. Dann existiert zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung U von x und Riemannsche Mannigfaltigkeiten (U_1, g_1) und (U_2, g_2) mit

$$(U, g) \cong (U_1, g_1) \times (U_2, g_2). \quad \times$$

Beweisidee. Sei $E_x \subset T_x M$ ein Holonomie-invarianter Unterraum von $T_x M$. Dann ist auch E_x^\perp Holonomie-invariant, denn $\text{Hol}_x(M, g) \subset O_n$. Durch E_x und E_x^\perp werden parallele Distributionen definiert. Da der gewählte Zusammenhang metrisch ist, sind diese auch integrierbar. Nach dem Satz von Frobenius existieren maximale Integralmannigfaltigkeiten M_1 und M_2 zu E bzw. E^\perp . Zu jedem Punkt $p \in M$ liefert der Satz von Frobenius außerdem Karten (U_i, x_i) von M_i , so dass sich M_i lokal als Graph einer Funktion schreiben lässt. Wir definieren nun Metriken

$$g_1 := g \Big|_{E \times E}, \quad g_2 := g \Big|_{E^\perp \times E^\perp},$$

mit denen (U_i, g_i) zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wird und $(U_1 \times U_2, g) = (U_1, g_1) \times (U_2, g_2)$ gilt. \blacksquare

- 5.30 **Zerlegung der Holonomiegruppe** Sei $E \subset T_x M$ ein Holonomie-invarianter Unterraum. Dann sind die Gruppen

$$H_1 := \{h \in \text{Hol}_x^0(M, g) : h|_{E^\perp} = \text{Id}_{E^\perp}\}, \quad H_2 := \{h \in \text{Hol}_x^0(M, g) : h|_E = \text{Id}_E\},$$

Normalteiler von $\text{Hol}_x(M, g)$ und es gilt

$$\text{Hol}_x^0(M, g) = H_1 \times H_2. \quad \times$$

Beweisidee. Sei $\gamma \in \Omega(x)$ eine geschlossene Kurve durch x . Nach Voraussetzung lässt die Parallelverschiebung E und E^\perp invariant, d.h.

$$P_\gamma E \subset E, \quad P_\gamma E^\perp = E^\perp.$$

Somit gilt aber auch, dass

$$P_\gamma H_j P_\gamma^{-1} \subset H_j, \quad j = 1, 2,$$

also sind die H_j tatsächlich Normalteiler von $\text{Hol}_x(M, g)$. Nach Definition kommutieren Elemente von H_1 mit Elementen von H_2 , d.h. $H_1 \cap H_2 = \{\text{Id}_{T_x M}\}$. Folglich ist

$$\psi : H_1 \times H_2 \rightarrow \text{Hol}_x^0(M, g), \quad (a, b) \mapsto a \cdot b$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Nun ist noch zu zeigen, dass ψ auch surjektiv ist, d.h. dass sich jedes Element in $\text{Hol}_x^0(M, g)$ als Produkt aus Elementen von H_1 und H_2 schreiben lässt.

Sei wieder γ eine beliebige geschlossene Kurve an x . Da ihre Spur kompakt ist, kann man mittels dem Lasso Lemma endlich viele Kurven δ_j konstruieren, deren Hintereinanderausführung wieder γ ergeben, und für die gilt

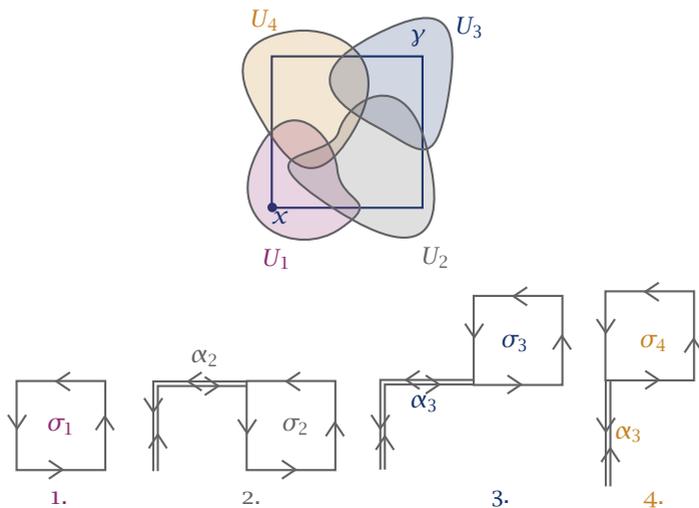
$$\delta_j = \alpha_j^{-1} \star \sigma_j \star \alpha_j,$$

wobei σ_j eine Schleife an einen Punkt x_j bezeichnet, die vollständig in einer hinreichend kleinen Umgebung U_j verläuft so, dass M lokal in U ein Riemannsches Produkt ist, und α_j eine Kurve von x nach x_j ist. Schreibt man $\sigma_j = (\sigma_j^1, \sigma_j^2)$ gemäß der Riemannschen Produktstruktur und setzt $\delta_j^i = \alpha_j^{-1} \star \sigma_j^i \star \alpha_j$, so sieht man ein, dass

$$P_{\delta_j^i} = P_{\alpha_j^{-1}} P_{\sigma_j^i} P_{\alpha_j} \in H^i,$$

denn $P_{\sigma_j^i}$ ist gerade die Translation einer Schleife an x . Somit ist P_γ als Hintereinanderausführung aller $P_{\delta_j^i}$ gerade ein Produkt von Elementen aus H_1 und H_2 . ■

Zerfällt der Tangentialraum an einen Punkt in irreduzible Unterräume, dann besagt der Zerlegungssatz, dass die Mannigfaltigkeit lokal die Gestalt eines Riemannschen Produktes hat und außerdem die Holonomiegruppe zerfällt. Für einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten gilt folgendes globales Resultat.



5.2 Zur Konstruktion der Kurven des Lasso Lemmas.

- 5.31 **Zerlegungssatz von de-Rham** Sei (M, g) eine einfach zusammenhängende, vollständige, Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist (M, g) isometrisch zu einem Produkt einfach zusammenhängender, vollständiger, Riemannscher Mannigfaltigkeiten

$$(M, g) \cong (M_0, g_0) \times \dots \times (M_k, g_k).$$

Dabei ist (M_0, g_0) ein euklidischer Raum und für $i \neq 0$ sind die Mannigfaltigkeiten (M_i, g_i) irreduzibel und nicht flach. Weiterhin gilt

$$\text{Hol}_x(M, g) \cong \text{Hol}_x(M_1, g_1) \times \dots \times \text{Hol}_x(M_k, g_k) \quad \times.$$

Beweisidee. Für ein $x \in M$ fest betrachten wir die Holonomiedarstellung

$$\rho : \text{Hol}_x(M, g) \rightarrow \text{Aut}(T_x M).$$

Nach Voraussetzung zerfällt $T_x M$ in irreduzible, invariante Unterräume,

$$T_x M = E_0 \oplus \dots \oplus E_k.$$

Folglich lässt sich nach Satz 5.25 das Tangentialbündel als Summe aus parallelen Distributionen E_i beschreiben. Diese sind integrabel, also existieren nach dem Satz

von Frobenius maximale Integralmannigfaltigkeiten M_i zu E_i . Man zeigt nun, dass M tatsächlich das Produkt dieser Mannigfaltigkeiten ist und, dass deren Metrik durch Einschränkung gegeben ist,

$$M = M_0 \times \dots \times M_k, \quad g_i = g \Big|_{E_i \times E_i} \cdot \blacksquare$$

5-F Klassifikation der Holonomiegruppen

Lassen wir beliebige Zusammenhänge auf dem Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ zu, so können wir keine Einschränkung an die Holonomiegruppe machen. Erstaunlicherweise ist für den Levi-Civita Zusammenhang nur eine sehr kurze Liste von Holonomiegruppen möglich.

5.32 **Klassifikationstheorem von Berger** Sei (M, g) einfach zusammenhängend, orientierbar, irreduzibel und nicht symmetrisch. Dann sind für die Holonomiegruppe $\text{Hol}_x(M, g)$ nur folgende Gruppen möglich:

Dimension	Gruppe	
n	$\text{SO}(n)$	<i>der generische Fall</i>
$n = 2m$	$\text{U}(m)$	<i>Kähler-Mannigfaltigkeit</i>
$n = 2m$	$\text{SU}(m)$	<i>Calabi-Yau Mannigfaltigkeit</i>
$n = 4m$	$\text{Sp}(m)$	<i>Hyperkähler-Mannigfaltigkeit</i>
$n = 4m$	$\text{Sp}(m) \cdot \text{Sp}(1)$	<i>quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit</i>
$n = 7$	G_2	
$n = 8$	$\text{Spin}(7) \cdot \times$	

5.33 **Bemerkungen.** A. Für eine nicht einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit betrachte die universelle Überlagerung

$$\pi : \tilde{M} \xrightarrow{\pi_1 M} M.$$

Diese ist einfach zusammenhängend und es gilt $\text{Hol}_x(\tilde{M}) = \text{Hol}_x^0(\tilde{M}) = \text{Hol}_x^0(M)$. Somit ist im Klassifikationstheorem für nicht einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten die Holonomiegruppe durch die reduzierte Holonomiegruppe $\text{Hol}_x^0(M)$ zu ersetzen.

- B. Die möglichen Holonomiegruppen sind genau die Gruppen, die transitiv auf Sphären operieren. Es ist zum Beispiel,

$$\begin{aligned} S^n &= SO(n+1)/SO(n), & \text{Sym}^{2n+1} &= SU(n+1)/SU(n), \\ S^6 &= G_2/SU(3), & S^7 &= \text{Spin}(7)/G_2. \end{aligned}$$

- C. Falls die Holonomiegruppe aus $\{SU(m), \text{Sp}(m), \text{Spin}(7), G_2\}$ stammt, verschwindet die Ricci-Krümmung und folglich ist die Mannigfaltigkeit Einstein. Auch für $\text{Hol}_x \subset \text{Sp}(m) \cdot \text{Sp}(1)$ ist M Einstein.

Daher spielen diese Gruppen eine fundamentale Rolle in der Physik. \rightarrow

6 Charakteristische Klassen

Charakteristische Klassen bilden einen Mechanismus, der einem gegebenen Vektor- bzw. Hauptfaserbündel eine de-Rham Kohomologieklass zuordnet, welche die Nicht-trivialität der Mannigfaltigkeit misst,

$$M \mapsto c(M) \in H_d R(M),$$

d.h. für das triviale Bündel verschwinden alle charakteristischen Klassen. Weiterhin charakterisieren diese Klassen insofern, dass für isomorphe Bündel alle Klassen übereinstimmen und umgekehrt zwei Bündel, bei denen eine Klasse nicht übereinstimmt, auch nicht isomorph sind.

BEISPIEL 30 Ein prominentes Beispiel für charakteristische Klassen sind die **Chern Klassen** für ein komplexes Vektorbündel $E \rightarrow M$ (siehe 3.29). Ganz allgemein ist die i -te Chern-Klasse von E definiert als die Kohomologieklass

$$c_i(E) \in H_d R^{2i}(M), \quad i = 0, 1, \dots$$

so dass für die **totale Chern-Klasse** $c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \dots$ gilt:

- 1.) $f^*c(E) = c(f^*E)$,
- 2.) $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$,
- 3.) $c_1(L)[\mathbb{C}P^1] = 1$, für $L \rightarrow \mathbb{C}P^1$ das tautologische Geradenbündel.

Weiterhin definiert man für einen aufsteigenden Index $i_1 < \dots < i_k$ die **Chern Zahl** als

$$\langle c_{i_1}(E) \cdot \dots \cdot c_{i_k}(E), [M] \rangle := \int_M \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} dM,$$

wobei α_{i_r} eine geschlossene $2i_r$ -Form auf M bezeichnet mit $[\alpha_{i_r}] = c_{i_r}$.

Die Chern Zahlen nennt man auch topologische Quantenzahlen oder, in der $U(1)$ -Theorie, Ladungen. ■

6-A Konstruktion

Wir wollen nun einen allgemeinen Konstruktionsmechanismus für charakteristische Klassen erarbeiten. Sei dazu $\pi : P \rightarrow M$ ein G -Hauptfaserbündel und \mathfrak{g} die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G .

6.1 **Definition** Eine k -lineare, symmetrische Abbildung

$$f : \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt G -invariant, falls für alle $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$ gilt

$$f(\text{Ad}(g)X_1, \dots, \text{Ad}(g)X_k) = f(X_1, \dots, X_k).$$

Den Raum der k -linearen, symmetrischen und G -invarianten Abbildungen auf \mathfrak{g} bezeichnen wir mit $\text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$. \times

Durch punktweise Addition und skalare Multiplikation wird $\text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ zu einem Vektorraum über den komplexen Zahlen.

6.2 **Lemma** Die Menge $\text{Sym}(\mathfrak{g})^G = \sum_{k \geq 0} \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ ist eine kommutative Algebra bezüglich der Multiplikation

$$(f \cdot h)(X_1, \dots, X_{k+l}) := \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} f(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) h(X_{\sigma_{k+1}}, \dots, X_{\sigma_{k+l}}). \quad \times$$

6.3 **Bemerkung.** Die Algebra $\text{Sym}(\mathfrak{g})$ ist isomorph zur Algebra der symmetrischen polynomialen Funktionen auf \mathfrak{g} . Sei (e_1, \dots, e_r) eine Basis von \mathfrak{g} . Eine symmetrische, homogene polynomiale Funktion vom Grad k lässt sich beschreiben durch

$$p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(X) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r} a_{i_1 \dots i_k} X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_k}, \quad X = \sum_{i=1}^r X_i e_i,$$

wobei die Koeffizienten $a_{i_1 \dots i_k}$ symmetrisch in den Indizes sind.

Zu einer Abbildung $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})$ definiert man eine polynomiale Funktion

$$P_f(X) = f(X, \dots, X).$$

Diese ist offenbar symmetrisch und homogen vom Grad k .

Umgekehrt definiert man für eine homogene, polynomiale Funktion vom Grad k

$$p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad p(X) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r} a_{i_1 \dots i_k} X_{i_1} \cdot \dots \cdot X_{i_k},$$

eine Abbildung $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})$ durch

$$f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = a_{i_1 \dots i_k}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r$$

und setzt f anschließend multilinear fort. \rightarrow

Die G -invarianten Abbildungen aus $\text{Sym}^k(\mathfrak{g})$ entsprechen nun polynomialen Funktionen, die invariant unter der Ad-Wirkung sind.

6.4 **Definition** Ein *invariantes Polynom* ist eine polynomiale Funktion $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$p(\text{Ad}(g)X) = p(X)$$

für alle $X \in \mathfrak{g}$ und $g \in G$. \times

Determinante und Spur sind einfache Beispiele für invariante Polynome.

6.5 **Bemerkung.** Eine Menge $t \subset \mathfrak{g}$, so dass jedes Element in \mathfrak{g} unter G konjugiert ist zu einem Element aus t , also

$$GtG^{-1} = \mathfrak{g},$$

heißt *maximaler Torus*. Die Gruppe W der Elemente, die den maximalen Torus in sich überführen,

$$WtW^{-1} \subset t,$$

heißt *Weyl-Gruppe*. Damit lassen sich die invarianten Polynome darstellen als

$$\text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G = \text{Sym}^k(t)^W = \mathbb{C}[\sigma_1, \dots, \sigma_r],$$

d.h. jedes invariante Polynome ist bereits eindeutig durch die Werte auf dem maximalen Torus t bestimmt und invariant unter der Wirkung der Weyl Gruppe. \rightarrow

BEISPIEL 31 Sei $G = \mathrm{GL}_n^{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, der Matrizenring. Der maximale Torus zu t sind die Diagonalmatrizen

$$t = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i \in \mathbb{C}\},$$

die wir mit ihren Eigenwerten, also \mathbb{C}^n , identifizieren können. Die Weyl-Gruppe, also die Gruppe, die t erhält, sind gerade die Permutationen. Die invarianten Polynome sind also symmetrische polynomiale Funktionen, die nur von den Eigenwerten abhängen. ■

6.6 **Satz** Jedes symmetrische Polynom in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lässt sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Funktionen schreiben. ✕

Unser Ziel ist nun, für jedes invariante Polynom eine charakteristische Klasse zu definieren.

6.7 **Definition** Seien $\omega_1 \in \Omega^{i_1}(N, \mathfrak{g}), \dots, \omega_k \in \Omega^{i_k}(N, \mathfrak{g})$ und $r = i_1 + \dots + i_k$. Zu einer Abbildung $f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ definiert man die r -Form $f(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) \in \Omega^r(N, \mathbb{C})$ durch

$$\begin{aligned} f(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(Y_1, \dots, Y_r) \\ = \frac{1}{i_1! \cdot \dots \cdot i_k!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sign}(\sigma) f(\omega_1(Y_{\sigma_1}, \dots, Y_{\sigma_{i_1}}), \dots, \omega_k(\dots, Y_{\sigma_r})). \quad \times \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Krümmung F^A des Zusammenhanges A können wir jetzt jedem invarianten Polynom eine Form auf dem Hauptfaserbündel P mit Werten in \mathbb{C} zuordnen.

6.8 **Definition** Sei A ein Zusammenhang auf P mit Krümmung $F^A \in \Omega_{\mathrm{hor}}^2(P, \mathfrak{g})^{\mathrm{Ad}}$. Für $f \in \mathrm{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ definiert man nun

$$f(F^A) := f(F^A \wedge \dots \wedge F^A) \in \Omega^{2k}(P, \mathbb{C}). \quad \times$$

BEISPIEL 32 Sei e_1, \dots, e_r eine Basis von \mathfrak{g} , dann schreibt sich die Krümmung in dieser Basis als

$$F^A = \sum_{i=1}^r F_i e_i, \quad F_i \in \Omega_{\mathrm{hor}}^2(P, \mathbb{C})^{\mathrm{Ad}} \cong \Omega^2(M, \mathbb{C}).$$

Ein invariantes Polynom p entspricht einer Abbildung $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ und wir schreiben

$$p(F^A) = f(F^A) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r} a_{i_1 \dots i_k} F_{i_1} \wedge \dots \wedge F_{i_k},$$

wobei die $a_{i_1 \dots i_k}$ die Koeffizienten von p in der gewählten Basis von \mathfrak{g} bezeichnen. Aufgrund der Invarianz von p unter Ad ist diese Definition unabhängig von den gewählten Koordinaten und daher ist $p(F^A) = f(F^A)$ wohldefiniert.

Ist zum Beispiel $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, der Matrizenring, dann ist eine Basis durch die Standard-Einheitsmatrizen E_{ij} gegeben, so dass

$$F^A = \sum_{i,j=1}^n F_{ij} E_{ij}, \quad \text{tr}(F^A) = \sum_{i=1}^n F_{ii}. \quad \blacksquare$$

6.9 **Lemma** Sei $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ und A ein Zusammenhang auf P . Dann gelten:

- a) $f(F^A) \in \Omega_{\text{hor}}^{2k}(P, \mathbb{C})^{\text{Ad}} \cong \Omega^{2k}(M, \mathbb{C})$.
- b) Die Differentialform $f(F^A)$ ist geschlossen, d.h. $df(F^A) = 0$.
- c) Seien A_0 und A_1 Zusammenhänge auf P , dann ist die Differenz $f(F^{A_0}) - f(F^{A_1})$ exakt. Genauer gilt

$$f(F^{A_0}) = f(F^{A_1}) + d\omega,$$

wobei ω eine horizontale $(2k - 1)$ -Form auf P vom Typ Ad bezeichnet. \times

Somit ist $f(F^A)$ eine geschlossene Form auf M , liegt also in der de Rham Kohomologie, und ist unabhängig vom gewählten Zusammenhang.

Beweis. a): Die Krümmung ist eine horizontale Form und $f(F^A)$ involviert nur zyklische Permutationen von F^A , angewandt auf die Argumente von $f(F^A)$, ist also selbst wieder horizontal. Weiterhin vertauscht der Pullback mit f , so dass für jedes $g \in G$ gilt

$$R_g^* f(F^A) = f(R_g^* F^A) = f(\text{Ad}(g^{-1})F^A) = f(F^A),$$

denn die Krümmung ist vom Typ Ad und f ist Ad -invariant. Also ist $f(F^A)$ ein Element von $\Omega_{\text{hor}}^{2k}(P, \mathbb{C})^{\text{Ad}} \cong \Omega^{2k}(M, \mathbb{C})$.

b): Für horizontale Formen vom Typ Ad stimmt das gewöhnliche Differential mit dem absoluten Differential überein. Wählen wir eine Basis (e_1, \dots, e_r) von \mathfrak{g} , dann schreibt sich

$$F^A = \sum_{i=1}^r F_i e_i, \quad F_i \in \Omega_{\text{hor}}^2(P, \mathbb{C})^{\text{Ad}},$$

und somit gilt

$$\begin{aligned} df(F^A) &= D_A f(F^A) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r} D_A(F_{i_1} \wedge \dots \wedge F_{i_k}) f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq r} \sum_{j=1}^k F_{i_1} \wedge \dots \wedge (D_A F_{i_j}) \wedge \dots \wedge F_{i_k} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn aufgrund der Bianchi-Identität ist $D_A F^A = 0$ und folglich verschwinden auch alle $D_A F_{i_j}$.

c): Seien A_0 und A_1 Zusammenhänge auf P . Setzen wir $X = M \times \mathbb{R}$ und bezeichnen die Projektion mit $\phi : X \rightarrow M$, $(x, t) \mapsto x$, so ist das Pullback Bündel gegeben durch

$$\tilde{P} = \phi^* P = \{(x, p) \in X \times P : \phi(x) = \pi(p)\},$$

und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \phi^* P & \xrightarrow{\bar{\phi}} & P \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

Durch $\tilde{A}_0 = \bar{\phi}^* A_0$ und $\tilde{A}_1 = \bar{\phi}^* A_1$ sind Zusammenhänge auf \tilde{P} gegeben. Setzen wir für $x = (m, \lambda) \in X$ und $X \in T_{(x,p)}\tilde{P}$,

$$\tilde{A}(X) := (1 - \lambda)\tilde{A}_0(X) + \lambda\tilde{A}_1(X),$$

dann ist auch \tilde{A} ein Zusammenhang auf \tilde{P} . Die Krümmung können wir als 2-Form auf X mit Werten im adjungierten Bündel identifizieren $F^{\tilde{A}} \in \Omega^2(X, \text{Ad}(\tilde{P}))$. Schreiben wir für die Inklusion

$$i_\lambda : M \rightarrow X, \quad m \mapsto (m, \lambda),$$

dann gilt für Vektorfelder X und Y auf M ,

$$\begin{aligned}
 (i_\lambda^* F^{\tilde{A}})(X, Y) &= F^{\tilde{A}}(\mathbf{d}i_\lambda(X), \mathbf{d}i_\lambda(Y)) \\
 &= [(p, x), \bar{F}^{\tilde{A}}(\mathbf{d}i_\lambda(\tilde{X}), \mathbf{d}i_\lambda(\tilde{Y}))] \\
 &= [(p, x), (1 - \lambda)\bar{F}_0^A(\mathbf{d}i_\lambda(\tilde{X}), \mathbf{d}i_\lambda(\tilde{Y})) + \lambda\bar{F}_1^A(\mathbf{d}i_\lambda(\tilde{X}), \mathbf{d}i_\lambda(\tilde{Y}))] \\
 &= (1 - \lambda)[p, \bar{F}_0^A(\tilde{X}, \tilde{Y})] + \lambda[p, \bar{F}_1^A(\tilde{X}, \tilde{Y})] \\
 &= (1 - \lambda)F_0^A(X, Y) + \lambda F_1^A(X, Y).
 \end{aligned}$$

Die Abbildungen i_0 und i_1 sind homotop, daher stimmen i_0^* und i_1^* auf der Kohomologie überein, also gilt

$$[f(F^{A_0})] = [i_0^* f(F^{\tilde{A}})] = [i_1^* f(F^{\tilde{A}})] = [f(F^{A_1})].$$

Somit unterschieden sich $f(F^{A_0})$ und $f(F^{A_1})$ nur um eine exakte Form auf M und diese entspricht einer exakten, horizontalen Form vom Typ Ad auf P . ■

6.10 **Definition** Die Abbildung

$$\mathcal{W}_P : \text{Sym}(\mathfrak{g})^G \rightarrow H_{\text{dR}}(M, \mathbb{C}), \quad f \mapsto [f(F^A)]$$

heißt *Weil-Homomorphismus* des G -Hauptfaserbündels P . ✕

In folgendem Satz fassen wir die Eigenschaften charakteristischer Klassen zusammen.

6.11 **Satz** a) Sei $\phi : N \rightarrow M$ differenzierbar, dann gilt

$$\mathcal{W}_{\phi^*P} = \phi^* \mathcal{W}_P.$$

b) Sind P_1 und P_2 isomorphe Hauptfaserbündel, so gilt $\mathcal{W}_{P_1} = \mathcal{W}_{P_2}$.

c) Ist P isomorph zum trivialen Bündel, dann gilt $\mathcal{W}_P \equiv 0$. ✕

Beweis. a): Das zurückgezogene Bündel ist gegeben durch

$$\phi^*P := \{(x, p) \in N \times P : \phi(x) = \pi(p)\},$$

so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 \phi^*P & \xrightarrow{\text{pr}_2} & P \\
 \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 N & \xrightarrow{\phi} & M
 \end{array}$$

Sei A ein Zusammenhang auf P , dann ist pr_2^*A ein Zusammenhang auf ϕ^*P und für ein horizontales Vektorfeld X^* auf P ist auch $\text{dpr}_2(X^*)$ ein horizontales Vektorfeld auf ϕ^*P . Die Krümmung auf ϕ^*P ist gegeben durch $F^{\text{pr}_2^*A} = \text{pr}_2^*F^A$. Somit gilt für Vektorfelder X_1, \dots, X_{2k} auf N und ein $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$,

$$\begin{aligned}
 f(F^{\text{pr}_2^*A})_x(X_1, \dots, X_{2k}) &= f(\text{pr}_2^*F^A \wedge \dots \wedge \text{pr}_2^*F^A)_{(x,p)}(X_1^*, \dots, X_{2k}^*) \\
 &= f(F^A \wedge \dots \wedge F^A)_p(\text{dpr}_2(X_1^*), \dots, \text{dpr}_2(X_{2k}^*)) \\
 &= f(F^A \wedge \dots \wedge F^A)_p(\text{d}\phi(X_1^*), \dots, \text{d}\phi(X_{2k}^*)) \\
 &= \phi^* f(F^A)_x(X_1, \dots, X_{2k}),
 \end{aligned}$$

denn aufgrund der Kommutativität des Diagramms und der Eindeutigkeit des horizontalen Lifts gilt $\text{d}\pi(\text{dpr}_2(X^*)) = \text{d}\phi(\text{d}\bar{\pi}(X^*)) = \text{d}\phi(X)$. Also gilt auch

$$\mathcal{W}_{\phi^*P}(f) = [f(F^{\text{pr}_2^*A})] = \phi^*[f(F^A)] = \phi^*\mathcal{W}_P(f).$$

b): Sei $\psi : P_1 \rightarrow P_2$ ein Hauptfaserbündelisomorphismus und A_2 ein Zusammenhang auf P_2 , dann ist $A_1 = \psi^*A_2$ ein Zusammenhang auf P_1 . Für ein Vektorfeld X auf M mit A_1 -horizontalem Lift X^* auf P_1 , ist $\text{d}\psi(X^*)$ ein A_2 -horizontaler Lift auf P_2 . Somit gilt für Vektorfelder X_1, \dots, X_{2k} auf M und eine Abbildung $f \in \text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$,

$$\begin{aligned}
 f(F^{A_1})_x(X_1, \dots, X_{2k})_p &= f(F^{A_2} \wedge \dots \wedge F^{A_2})_p(\text{d}\psi(X_1^*), \dots, \text{d}\psi(X_{2k}^*)) \\
 &= f(F^{A_2})_x(X_1, \dots, X_{2k}).
 \end{aligned}$$

c): Sei P trivial, also isomorph zum trivialen Bündel P_0 . Der kanonisch flache Zusammenhang A_0 auf P_0 ist flach, d.h. $F^{A_0} \equiv 0$ und folglich ist nach b)

$$\mathcal{W}_P = \mathcal{W}_{P_0} = 0. \quad \blacksquare$$

6-B Charakteristische Klassen in Vektorbündeln

Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel vom Rang n mit kovarianter Ableitung ∇ . Außerdem sei $G = \text{GL}(n, \mathbb{C})$, und $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ bezeichne die komplexwertigen $n \times n$ Matrizen. Die Krümmung auf E ist eine 2-Form mit Werten in dem Endomorphismenbündel,

$$R_{XY}S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_Y \nabla_X S - \nabla_{[X,Y]} S, \quad s \in \Gamma(E), \quad X, Y \in \chi(M).$$

Wählen wir eine lokale Basis von E also Schnitte s_1, \dots, s_n definiert über $U \subset M$, dann schreibt sich die Krümmung lokal als

$$R_{XY}s_i = \sum_{j=1}^n F_{ij}(X, Y)s_j,$$

mit gewöhnlichen 2-Formen $F_{ij} \in \Omega^2(U)$. Also können wir die Krümmung mit

$$F = (F_{ij}),$$

einer \mathfrak{g} -wertigen 2-Form auf U , identifizieren. Diese 2-Form hängt jedoch von der Wahl der Schnitte s_i ab und ist zunächst nur lokal in U definiert. Hier kommen die invarianten Polynome ins Spiel...

6.12 **Lemma** Seien s_1, \dots, s_n und s'_1, \dots, s'_n zwei lokale Basen von E über $U \subset M$, und sei p ein invariantes Polynom. Dann gilt

$$p(F) = p(F').$$

Insbesondere ist $p(F) \in \Omega^{\text{even}}(M, \mathbb{C})$ global definiert und unabhängig von der Wahl der s_i . \times

Beweis. Sei $g : U \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C})$ die Transformation, die s_1, \dots, s_n in s'_1, \dots, s'_n überführt. Dann schreibt sich

$$F'(X, Y) = gF(X, Y)g^{-1} = \text{Ad}(g)F(X, Y).$$

Da das Polynom Ad-invariant ist, folgt $p(F') = p(F)$. Somit ist $p(F)$ unabhängig von der gewählten Lokalisierung s_1, \dots, s_n . Also sind alle Lokalisierungen kompatibel und lassen sich zu einem globalen $p(F)$ verkleben. \blacksquare

BEISPIEL 33 Die Spur und die Determinante sind invariante Polynome und man erhält,

$$\begin{aligned} \text{tr}(F) &= \sum_{i=1}^n F_{ii} \in \Omega^2(M, \mathbb{C}), \\ \det(F) &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) F_{1\sigma(1)} \wedge \dots \wedge F_{n\sigma(n)} \in \Omega^{2n}(M, \mathbb{C}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Interpretiert man $E \rightarrow M$ als zum G -Hauptfaserbündel $P \rightarrow M$ assoziiertes Vektorbündel und ∇ als die durch den Zusammenhang A induzierte kovariante Ableitung, dann entspricht $p(F^\nabla)$ der auf dem Hauptfaserbündel definierten Form $p(F^A)$. Insbesondere ist $p(F^\nabla)$ geschlossen und hängt bis auf eine exakte Form nicht von der gewählten kovarianten Ableitung ∇ ab, ist also ein Element der de-Rham Kohomologie von M und es gilt

$$[p(F^\nabla)] = \mathcal{W}_P(p) = [p(F^A)].$$

Somit übertragen sich die Eigenschaften von \mathcal{W}_P auch auf $[p(F^\nabla)]$.

6.13 **Lemma** Sei E ein Vektorbündel über M und $f : N \rightarrow M$ differenzierbar. Dann gelten

a) $f^*[p(F^\nabla)] = [p(f^*F^\nabla)],$

b) Falls E trivial ist, gilt $[p(F^\nabla)] \equiv 0.$

c) Sind E_1 und E_2 isomorph, dann gilt $[p(F^{E_1})] \equiv [p(F^{E_2})]. \quad \times$

6-C Invariante Polynome auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$

Die Abbildungen aus $\text{Sym}^k(\mathfrak{g})^G$ sind äquivalent zu den symmetrischen, homogenen, polynomialen Funktionen auf \mathfrak{g} vom Grad k , die invariant unter der Ad-Wirkung sind — kurz den invarianten Polynomen. Für den Spezialfall $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ sind dies gerade die symmetrischen polynomialen Funktionen in den Eigenwerten. Um diese genauer untersuchen zu können, definieren wir die elementarsymmetrischen polynomialen Funktionen σ_k und s_k für $k = 0, 1, \dots$ implizit durch die Gleichungen

$$\det(\text{Id} + tX) = \sum_{k=0}^n \sigma_k(t) t^k,$$

$$\text{tr}(e^{tX}) = \sum_{k \geq 0} s_k(t) \frac{t^k}{k!},$$

für jedes $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Da sowohl Determinante als auch Spur Ad-invariant sind, gilt dies auch für die σ_k und s_k .

BEISPIEL 34 Entwickeln wir die Determinante $\det(\text{Id} + tX)$, ergibt sich

$$\sigma_0(X) = 1, \quad \sigma_1(X) = \text{tr}(X), \quad \sigma_n(X) = \det(X).$$

Analog erhält man beim Entwickeln der Spur,

$$s_0(X) = n, \quad s_1(X) = \sigma_1(X). \quad \blacksquare$$

Ganz allgemein erhält man für die elementarsymmetrischen Funktionen die folgende Darstellung.

6.14 **Lemma** Sei X diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gelten

$$\sigma_k(X) = \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \lambda_{i_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{i_k},$$

$$s_k(X) = s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k. \quad \times$$

Beweis. Nach Annahme ist X diagonalisierbar, also existiert eine invertierbare Matrix $g \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ so, dass

$$gXg^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Aufgrund der Ad-Invarianz der Determinante folgt somit

$$\det(\text{Id} + tX) = \det(\text{Id} + tgXg^{-1}) = \det(\text{diag}(1 + t\lambda_1, \dots, 1 + t\lambda_n))$$

$$= \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) = \sum_{k=1}^n \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) t^k.$$

Analog erhält man bei Anwendung auf die Spur,

$$\text{tr}(e^{tX}) = \text{tr}(e^{tgXg^{-1}}) = \text{tr}(\text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}))$$

$$= \sum_{i=1}^n e^{t\lambda_i} = \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ k \geq 0}} \lambda_i^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \frac{t^k}{k!}. \quad \blacksquare$$

6.15 *Bemerkungen.* A. Die Polynome $\{\sigma_k\}$ bzw. $\{s_k\}$ bilden eine Basis des Raumes der invarianten Polynome.

B. Die Newtonformel besagt,

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} \pm \dots \pm k s_1 = 0, \quad k \geq 0.$$

Somit lassen sich die Polynome s_k als Kombination der Polynome $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ ausdrücken. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} s_2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ s_3 &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \\ s_i &= Q_i(\sigma_1, \dots, \sigma_i), \end{aligned}$$

wobei Q_i das i -te Newton-Polynom bezeichnet.

- c. Jedes Element $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ aufgefasst als Abbildung $X : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ induziert für jedes $k \geq 0$ eine Abbildung

$$\Lambda^k X : \Lambda^k \mathbb{C}^n \rightarrow \Lambda^k \mathbb{C}^n.$$

Dazu betrachtet man zunächst wieder den Fall, dass X diagonalisierbar ist. Sei (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis, dann setzt man z.B. für $k = 2$

$$\Lambda^k X(e_i \wedge e_j) = (Xe_i) \wedge (Xe_j) = \lambda_i \lambda_j (e_i \wedge e_j).$$

Folglich ist $\text{tr}(\Lambda^2 X) = \sigma_2(X)$. Da die diagonalisierbaren Matrizen dicht in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ liegen, erhält man ganz allgemein

$$\sigma_k(X) = \text{tr}(\Lambda^k X), \quad 0 \leq k \leq n.$$

- d. Nach obiger Konstruktion erhält man die explizite Formel

$$\sigma_k(X) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_k j_k},$$

wobei σ die Permutationen bezeichnet, die (i_1, \dots, i_k) auf (j_1, \dots, j_k) abbilden. ∞

6-D Chern-Klassen und Chern-Charakter

6.16 **Definition** Sei $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel mit kovarianter Ableitung ∇ .

- 1.) Die k -te reelle Chern-Klasse von E ist definiert als

$$c_k(E) := \left[\sigma_k \left(\frac{i}{2\pi} F^\nabla \right) \right] \in H_{\text{dR}}^{2k}(M, \mathbb{C}),$$

und die Summe dieser Klassen wird als totale reelle Chern-Klasse bezeichnet

$$c(E) := \sum_{k \geq 0} c_k(E) = \left[\det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F^\nabla \right) \right] \in H_{\text{dR}}^{\text{even}}(M, \mathbb{C}).$$

2.) Der *Chern-Charakter* von E ist definiert als

$$\text{ch}(E) := \left[\text{tr} \left(e^{\frac{i}{2\pi} F^\nabla} \right) \right],$$

und die Koeffizienten der Entwicklung bezeichnet man mit

$$\text{ch}_k(E) = \left[s_k \left(\frac{i}{2\pi} F^\nabla \right) \right]. \quad \times$$

BEISPIEL 35 a.) Die erste reelle Chern-Klasse ist gegeben durch

$$c_1(E) = \frac{i}{2\pi} [\text{tr}(F^\nabla)] \in H_{\text{dR}}^2(M, \mathbb{C}).$$

b.) Die zweite reelle Chern-Klasse berechnet sich zu

$$\begin{aligned} c_2(E) &= \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} F_{ii} \wedge F_{jj} - F_{ij} \wedge F_{ji} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left(\text{tr}(F^\nabla \wedge F^\nabla) - \text{tr}(F^\nabla)^2 \right) \end{aligned}$$

c.) Für den Chern-Charakter evaluiert man mit Hilfe der Newtonformel,

$$\text{ch}(E) = \text{rank}(E) + c_1(E) + \frac{1}{2}(c_1(E)^2 - 2c_2(E)) + \dots \quad \blacksquare$$

6.17 *Bemerkung.* Für $k > \text{rank}(E)$ verschwinden alle Chern-Klassen, d.h. $c_k(E) = 0$. Der Chern-Charakter dagegen ist als Potenzreihe gegeben und bricht im Allgemeinen nicht ab. \rightarrow

6.18 **Lemma** Seien $f : N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung, sowie E, E_1 und E_2 Vektorbündel über M . Dann gelten:

a) Die totale reelle Chern-Klasse ist natürlich und multiplikativ unter Whitney-Summenbildung,

$$f^* c(E) = c(f^* E), \quad c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cdot \text{ch}(E_2).$$

b) Der Chern-Charakter ist additiv und multiplikativ, d.h.

$$\text{ch}(E_1 \oplus E_2) = \text{ch}(E_1) + \text{ch}(E_2), \quad \text{ch}(E_1 \otimes E_2) = \text{ch}(E_1) \cdot \text{ch}(E_2). \quad \times$$

Beweis. a): Die Natürlichkeit folgt direkt aus der allgemeinen Natürlichkeit charakteristischer Klassen. Seien s_1 und s_2 Schnitte in E_1 bzw. E_2 und sei X ein Vektorfeld auf M . Dann gilt für den Levi-Civita-Zusammenhang

$$\nabla_X(s_1 \oplus s_2) = (\nabla_X s_1) \oplus (\nabla_X s_2),$$

und folglich hat dessen Krümmung die Gestalt

$$R_{XY}^{E_1 \oplus E_2}(s_1 \oplus s_2) = R_{XY}^{E_1} s_1 \oplus R_{XY}^{E_2} s_2.$$

Fassen wir die Krümmung als Endomorphismus auf und stellen diesen auf $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ in einer lokalen Basis s_1, \dots, s_n von E als $F^{E_1 \oplus E_2}$ dar, so hat diese Matrix Blockdiagonalgestalt. Ganz allgemein gilt für Matrizen A und $B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, dass

$$\det \left(\text{Id} + t \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \text{Id} + tA & \\ & \text{Id} + tB \end{pmatrix} = \det(\text{Id} + tA) \det(\text{Id} + tB)$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} c(E_1 \oplus E_2) &= \left[\det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F^{E_1 \oplus E_2} \right) \right] = \left[\det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} \begin{pmatrix} F^{E_1} & \\ & F^{E_2} \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \left[\det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F^{E_1} \right) \right] \left[\det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F^{E_2} \right) \right] = c(E_1) c(E_2). \end{aligned}$$

b): Die Krümmung der Whitney-Summe hat Blockdiagonalgestalt, diese bleibt unter dem Matrixexponential erhalten, d.h. es gilt

$$\exp \left(\frac{i}{2\pi} F^{E_1 \oplus E_2} \right) = \exp \left(\frac{i}{2\pi} \begin{pmatrix} F^{E_1} & \\ & F^{E_2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \exp \left(\frac{i}{2\pi} F^{E_1} \right) & \\ & \exp \left(\frac{i}{2\pi} F^{E_2} \right) \end{pmatrix}.$$

Somit folgt gerade

$$\begin{aligned} \text{ch}(E_1 \oplus E_2) &= \left[\text{tr} \left(e^{\frac{i}{2\pi} F^{E_1 \oplus E_2}} \right) \right] = \left[\text{tr} \left(e^{\frac{i}{2\pi} F^{E_1}} \right) \right] + \left[\text{tr} \left(e^{\frac{i}{2\pi} F^{E_2}} \right) \right] \\ &= \text{ch}(E_1) + \text{ch}(E_2). \end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir die Krümmung des Tensorproduktes analysieren. Seien dazu wieder s_1 und s_2 Schnitte in E_1 bzw. E_2 und X sei ein Vektorfeld auf M . Dann gilt

$$\nabla_X(s_1 \otimes s_2) = (\nabla_X s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (\nabla_X s_2).$$

Man prüft ohne Umwege nach, dass dann für die Krümmung gilt,

$$R_{XY}^{E_1 \otimes E_2}(s_1 \otimes s_2) = (R_{XY}^{E_1} s_1) \otimes s_2 + s_1 \otimes (R_{XY}^{E_2} s_2) = (R_{XY}^{E_1} \otimes R_{XY}^{E_2})(s_1 \otimes s_2).$$

Seien nun $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ diagonalisierbar und (e_1, \dots, e_n) sowie (f_1, \dots, f_n) Basen in denen die Matrizen Diagonalgestalt annehmen. Dann gilt

$$(A \otimes B)(e_i \otimes f_j) = (Ae_i) \otimes f_j + e_i \otimes (Bf_j) = (\lambda_i + \mu_j)(e_i \otimes f_j),$$

also ist $A \otimes B$ diagonal bezüglich der Basis $\{e_i \otimes f_j\}_{i,j=1}^n$ mit Eigenwerten $(\lambda_i + \mu_j)$. Somit gilt für die Funktionen s_k , dass

$$s_k(A \otimes B) = \sum_{i,j=1}^n (\lambda_i + \mu_j)^k = \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=1}^k \binom{k}{r} \lambda_i^r \mu_j^{r-k} = \sum_{i,j=1}^n \sum_{r=1}^k \frac{k!}{(k-r)!r!} \lambda_i^r \mu_j^{r-k}.$$

Damit erhalten wir nach Anwendung des Cauchy-Produktsatzes,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} s_k(A \otimes B) \frac{t^k}{k!} &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{k \geq 0} \sum_{r=1}^k \frac{k!}{k!} \frac{\lambda_i^r t^r}{r!} \frac{\mu_j^{r-k} t^{r-k}}{(r-k)!} = \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{r \geq 0} \frac{\lambda_i^r t^r}{r!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{\mu_j^k t^k}{k!} \right) \\ &= \left(\sum_{r \geq 0} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^r t^r}{r!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j^k t^k}{k!} \right) \\ &= \left(\sum_{r \geq 0} s_r(A) \frac{t^r}{r!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} s_k(B) \frac{t^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

Da die diagonalisierbaren Matrizen dicht in $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ liegen und obiger Ausdruck stetig in A und B ist, gilt diese Beziehung für allgemeine Matrizen. Somit erhalten wir schließlich,

$$\begin{aligned} \text{ch}(E_1 \otimes E_2) &= \sum_{k \geq 0} s_k(F^{E_1} \otimes F^{E_2}) \frac{t^k}{k!} = \left(\sum_{r \geq 0} s_r(F^{E_1}) \frac{t^r}{r!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} s_k(F^{E_2}) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (*) \\ &= \text{ch}(E_1) \cdot \text{ch}(E_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.19 **Lemma** Sei $E \rightarrow M$ ein komplexes Vektorbündel. Dann gelten:

a) $c_k(E^*) = c_k(\bar{E}) = (-1)^k c_k(E)$.

b) Die k -te reelle Chern-Klasse ist eine reelle Kohomologiekategorie, d.h.

$$c_k(E) \in H_{\text{dR}}^{2k}(M, \mathbb{R}).$$

c) Existieren k überall linear unabhängige Schnitte von E , dann gilt

$$c_j(E) = 0, \quad \text{für } j > \text{rank}(E) - k. \quad \times$$

Beweis. a): Sei λ ein Schnitt in E^* , sowie e ein Schnitt in E und X ein Vektorfeld auf M , dann gilt

$$(\nabla_X \lambda)e = X(\lambda(e)) - \lambda(\nabla_X e).$$

Wählen wir eine lokale Basis (s_1, \dots, s_n) von E über $U \subset M$ und bezeichnen die dazu duale Basis mit (s_1^*, \dots, s_n^*) , so verifiziert man, dass

$$F^\nabla = -F^{\nabla*}.$$

Somit gilt für die elementarsymmetrischen Funktionen

$$\sigma_k \left(\frac{i}{2\pi} F^{\nabla*} \right) = \sigma_k \left(\frac{-i}{2\pi} F^\nabla \right) = (-1)^k \sigma_k \left(\frac{i}{2\pi} F^\nabla \right),$$

und da $E^* \cong \bar{E}$ folgt die Behauptung.

b): Nach Voraussetzung ist E ein komplexes Vektorbündel, daher existiert auf E ein hermitesches Skalarprodukt. Wählen wir einen metrischen Zusammenhang, dann gilt bezüglich einer lokalen Orthonormalbasis (s_1, \dots, s_n) von E über $U \subset M$, dass

$$F_{XY}^\nabla \in \mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) : A^* = -A\}.$$

Die elementarsymmetrischen Funktionen hängen nur von den Eigenwerten ab, daher gilt

$$\overline{\sigma_k \left(\frac{i}{2\pi} F \right)} = \sigma_k \left(\frac{-i}{2\pi} \bar{F} \right) = \sigma_k \left(\frac{i}{2\pi} F^\top \right) = \sigma_k \left(\frac{i}{2\pi} F^\top \right),$$

und folglich ist $c_k(E)$ reell. Analog dazu rechnet man

$$\overline{\det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F \right)} = \det \left(\text{Id} - \frac{i}{2\pi} \bar{F} \right) = \det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F^\top \right) = \det \left(\text{Id} + \frac{i}{2\pi} F \right),$$

also ist $c(E)$ reell.

c): Sei $E = \mathcal{E}_k + F$, wobei \mathcal{E}_k das triviale Bündel vom Rang k bezeichnet. Dann gilt für die totale Chern-Klasse

$$c(E) = c(\mathcal{E}_k) \cdot c(F) = c(F).$$

Der Rang von F ist $n - k$ und folglich verschwinden alle Chern-Klassen $c_i(F) = c_i(E)$ für $i > n - k$. ■

6.20 *Bemerkung.* Die Chern-Klassen sind nicht nur reelle Kohomologieklassen, sondern sogar ganzzahlig. Bezeichnen wir den Homomorphismus, der die ganzzahligen Homologieklassen in die de-Rham Kohomologie einbettet, mit

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^k : H^{2k}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{dR}}^{2k}(M, \mathbb{R}),$$

so gilt, dass

$$c_k(E) \in \text{im } \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^k.$$

Integrieren wir also $c_k(E)$ über einen glatten $2k$ -Zykel N , so gilt

$$\int_N c_k(E) \in \mathbb{Z}. \quad \circ$$

6.21 **Lemma** Seien E_1 und E_2 Vektorbündel über M . Dann gilt

$$c_1(E_1 \oplus E_2) = \text{rank}(E_1)c_1(E_2) + \text{rank}(E_2)c_1(E_1). \quad \times$$

Beweis. Nach Definition gilt für den Chern-Charakter,

$$\text{ch}(E_1 \otimes E_2) = \text{rank}(E_1 \otimes E_2) + c_1(E_1 \otimes E_2) + O(4),$$

wobei $O(4)$ mindestens Terme der 4. Kohomologieklass $H_{\text{dR}}^4(M, \mathbb{C})$ beschreibt. Andererseits ist der Chern-Charakter multiplikativ, d.h.

$$\begin{aligned} \text{ch}(E_1 \otimes E_2) &= \text{ch}(E_1) \cdot \text{ch}(E_2) \\ &= (\text{rank}(E_1) + c_1(E_1) + O(4)) (\text{rank}(E_2) + c_1(E_2) + O(4)) \\ &= \text{rank}(E_1)\text{rank}(E_2) + \text{rank}(E_1)c_1(E_2) + \text{rank}(E_2)c_1(E_1) + O(4). \end{aligned}$$

Vergleichen wir nun die Ordnungen, ergibt sich die Behauptung. ■

Wir haben die Chern-Klassen bisher mit elementarsymmetrischen Funktionen beschrieben. Es gibt allerdings auch eine geometrische Interpretation. Sei ein Vektorbündel

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

gegeben, wobei die E_i Linienbündel vom Rang 1 sind. Für diese Linienbündel sind dann nur die nullte und die erste Chern-Klasse von Null verschieden. Schreiben wir $c_1(E_i) = x_i$, dann lässt sich die totale reelle Chern-Klasse von E wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} c(E) &= \prod_{i=1}^n c(E_i) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i) \\ &= 1 + \sigma_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = 1 + c_1(E) + \dots \end{aligned}$$

Es stellt sich nun heraus, dass man immer so verfahren kann.

- 6.22 **Zerfallungsprinzip** Zu jedem komplexen Vektorbündel $E \rightarrow M$ existiert eine Mannigfaltigkeit X und eine Abbildung $f : X \rightarrow M$, so dass

$$f^*E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n,$$

wobei die E_i Linienbündel vom Rang 1 bezeichnen. \times

Aus der Natürlichkeit der Chern-Klassen folgt, dass man für Rechnungen immer annehmen kann, dass sich E als Summe von Linienbündeln schreibt.

6-E Charakteristische Klassen reeller Vektorbündel

Sei nun $E \rightarrow M$ ein *reelles* Vektorbündel, ausgestattet mit einem euklidischen Skalarprodukt und einem metrischen Zusammenhang ∇ . Wählen wir eine lokale Orthogonalbasis von E über $U \subset M$, dann ist

$$F_{XY}^{\nabla} \in \mathfrak{so}(n) = \{A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) : A^T = -A\}.$$

Komplexifizieren wir E zu $E^{\mathbb{C}}$, indem wir faserweise komplexifizieren, d.h.

$$E_x^{\mathbb{C}} := E_x \otimes \mathbb{C}, \quad x \in M,$$

dann können wir für $E^{\mathbb{C}}$ Chern-Klassen definieren.

- 6.23 **Lemma** Sei E ein reelles Vektorbündel, dann verschwinden die ungeraden Chern-Klassen der Komplexifizierung, d.h.

$$c_{2k+1}(E^{\mathbb{C}}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad \times$$

Beweis. Als reelles Bündel ist E isomorph zu seinem dualen Bündel E^* , dann gilt auch für die Komplexifizierung

$$E^{\mathbb{C}} \cong (E^*)^{\mathbb{C}} = (E^{\mathbb{C}})^*.$$

Nach den Rechenregeln für Chern-Klassen ist daher

$$c_k((E^{\mathbb{C}})^*) = (-1)^k c_k(E^{\mathbb{C}}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

und folglich verschwinden alle ungeraden Klassen. \blacksquare

Durch Komplexifizierung lassen sich also einem reellen Vektorbündel in kanonischer Weise Chern-Klassen zuordnen, wobei nur die geraden Chern-Klassen nicht-trivial sind. Diese haben einen speziellen Namen.

6.24 **Definition** Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel, dann heißt

$$p_k(E) := (-1)^k c_{2k}(E^{\mathbb{C}}) \in H_{\text{dR}}^{4k}(M, \mathbb{R}).$$

die k -te *Pontrjagin-Klasse* von E . Die *totale Pontrjagin-Klasse* ist definiert als

$$p(E) = \sum_{k \geq 0} p_k(E). \quad \times$$

Die Pontrjagin-Klassen haben analoge Eigenschaften zur den Chern-Klassen.

6.25 **Satz** a) Sind E_1 und E_2 isomorphe reelle Vektorbündel, so gilt

$$p(E_1) = p(E_2).$$

b) Ist $\phi : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung und E ein reelles Vektorbündel über M , dann gilt

$$p(\phi^*E) = \phi^*p(E).$$

c) Sind E_1 und E_2 zwei Vektorbündel über M , so gilt

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2).$$

6.26 **Bemerkung.** Im Fall eines reellen Vektorbündels ist $G = \text{SO}(n)$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$, d.h. die Krümmung $F_{XY} \in \mathfrak{so}(n)$ ist schiefssymmetrisch. Schiefssymmetrische Matrizen haben je zwei komplex konjugierte und rein imaginäre Eigenwerte. Ihre Normalform ist

$$A = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} 0 & \mu_n \\ -\mu_n & 0 \end{array} \right) : \mu_i \in \mathbb{R} \right), \quad \text{für } \mathfrak{so}_{2n},$$

$$A = \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} 0 & \mu_n \\ -\mu_n & 0 \end{array} \right), (0) : \mu_i \in \mathbb{R} \right), \quad \text{für } A \in \mathfrak{so}_{2n+1}.$$

Diese Blockmatrizen bilden einen maximalen Torus t und die zugehörige Weyl-Gruppe ist

$$W = S_n \times \mathbb{Z}_2,$$

denn die Normalform ist $SO(n)$ -invariant unter Vertauschung von Blöcken und unter Transponieren einer geraden Anzahl von 2×2 -Blöcken.

Für ungerade Dimension ist daher

$$\text{Sym}(\mathfrak{so}(2n+1))^{SO(2n+1)} = \left\{ \sigma_k(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) : k = 0, 1, \dots \right\}.$$

In gerader Dimension gibt es noch ein zusätzliches invariantes Polynom, so dass

$$\text{Sym}(\mathfrak{so}(2n))^{SO(2n)} = \left\{ \sigma_k(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) : k = 0, 1, \dots \right\} \cup \{\text{Pf}\}.$$

Dabei ist die **Pfaffsche** Pf gegeben durch

$$\text{Pf} \left(\text{diag} \begin{pmatrix} 0 & \mu_i \\ -\mu_i & 0 \end{pmatrix} \right) = \prod_{i=1}^n \mu_i.$$

In ungerader Dimension tritt immer ein Eigenwert Null auf und daher ist die Pfaffsche stets identisch Null und liefert somit nichts neues. In gerader Dimension verschwindet die Pfaffsche im Allgemeinen nicht identisch und ist invariant unter der Weyl-Gruppe.

Eine reellwertige, lineare und schiefsymmetrische Abbildung $A \in \mathfrak{so}(2n)$ hat nach obigen Überlegungen je zwei komplex konjugierte und rein imaginäre Eigenwerte. Die Normalform von A ist

$$\text{diag } A = \begin{pmatrix} 0 & \mu_i \\ -\mu_i & 0 \end{pmatrix},$$

und daher ist die Determinante nichtnegativ. Man kann die Pfaffsche daher auch definieren als

$$\text{Pf } A = \sqrt{\det A}.$$

Identifiziert man $\mathfrak{so}(2n) \cong \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n}$, dann ist für $A \in \mathfrak{so}(2n)$,

$$\underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_{n\text{-mal}} \in \Lambda^{2n} \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}.$$

Man kann die Pfaffsche dann auch definieren als diejenige Form für die gilt

$$\text{Pf}(A) \text{ vol} = A \wedge \dots \wedge A,$$

wobei $\text{vol} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ für eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n . Dann schreibt sich die Pfaffsche auch als

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{n!} \langle A^n, e_1 \wedge \dots \wedge e_n \rangle,$$

bzw.

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sign}(\sigma) A_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot A_{\sigma_3 \sigma_4} \cdot \dots \cdot A_{\sigma_{2n-1} \sigma_{2n}}. \quad \rightarrow$$

Da die Pfaffsche ein invariantes Polynom beschreibt, lässt sich auch mit ihr eine charakteristische Klasse definieren.

6.27 **Definition** Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang $2n$. Die *Euler-Klasse* von E ist definiert als

$$e(E) := \left[\text{Pf} \left(\frac{-1}{2\pi} F \right) \right] \in H_{\text{dR}}^{2n}(M). \quad \times$$

6.28 **Bemerkung.** Wählt man eine lokale Orthonormalbasis von E über $U \subset M$, dann lässt sich die Euler-Klasse mit Hilfe der lokalen Darstellung der Pfaffschen beschreiben als

$$e(E) = \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sign}(\sigma) F_{\sigma_1 \sigma_2} \wedge \dots \wedge F_{\sigma_{2n-1} \sigma_{2n}}. \quad \rightarrow$$

6.29 **Lemma** Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel vom Rang $2n$.

a) Es gilt $e(E)^2 = p_n(E)$.

b) Sei E außerdem ein komplexes Vektorbündel vom Rang n , dann gilt

$$e(E) = c_n(E). \quad \times$$

Beweis. a): Das Quadrat der Pfaffschen ist die Determinante, also gilt

$$\text{Pf} \left(\frac{-1}{2\pi} F \right)^2 = \det \left(\frac{-1}{2\pi} F \right) = \sigma_{2n} \left(\frac{-1}{2\pi} F \right).$$

Andererseits gilt in lokalen Koordinaten,

$$p_n(E) = (-1)^n c_{2n}(E) = (-1)^n \sigma_{2n} \left(\frac{i}{2\pi} F \right) = \sigma_{2n} \left(\frac{-1}{2\pi} F \right).$$

b): Man betrachtet die Einbettung von $\mathfrak{u}(n)$ in $\mathfrak{so}(2n)$ gegeben durch

$$\phi : \text{diag}(i\mu_1, \dots, i\mu_n) \mapsto \text{diag} \left(\begin{pmatrix} & \mu_1 \\ -\mu_1 & \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} & \mu_n \\ -\mu_n & \end{pmatrix} \right)$$

Mit dieser Abbildung können wir den Zusammenhang auf dem reellen Bündel E auf das komplexe Bündel zurückziehen und sehen so die Gleichheit ein. ■

6.30 *Bemerkung.* Sind M_1 und M_2 Mannigfaltigkeiten so, dass alle Pontrjagin-Klassen der Tangentialbündel übereinstimmen, dann existiert eine Mannigfaltigkeit W mit $\partial W = M_1 \cup M_2$. ◦

6-F Multiplikative Folgen

Sei $f \in \mathbb{C}[x]$ eine formale Potenzreihe in x . Dann lässt sich f ein "Polynom" $q_f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ zuordnen,

$$q_f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_n).$$

Offenbar ist q_f symmetrisch und daher lässt sich jeder Grad durch elementarsymmetrische Funktionen ausdrücken, d.h.

$$q_f = \sum_{k \geq 0} F_k(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

Die elementarsymmetrischen Funktionen σ_i entsprechen dann der i -ten Chern-Klasse.

BEISPIEL 36 a.) Sei $f(x) = 1+x$. Dann ist q_f tatsächlich ein Polynom gegeben durch

$$q_f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (1+x_i) = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$$

Somit entspricht q_f gerade der totalen Chern-Klasse von E .

b.) Der Chern-Charakter von E wird von der Funktion

$$f(x) = e^x$$

und dem zugehörigen symmetrischen "Polynom" q_f induziert.

c.) Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel. Betrachten wir

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}/2}{\sinh(\sqrt{x}/2)} = 1 - \frac{x}{24} + \frac{7x^2}{5760} \pm \dots,$$

dann entspricht das f zugeordnete Polynom q_f der \hat{A} -Klasse von E ,

$$\hat{A}(E) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} = 1 - \frac{1}{24} p_1(E) + \frac{1}{5760} (7p_1(E)^2 - 4p_2(E)) \pm \dots$$

Für eine kompakte, $4n$ dimensionale Mannigfaltigkeit nennt man

$$\hat{A}(M) := \int_M \hat{A}(TM)$$

das \hat{A} -Geschlecht von M .

d.) Sei $E \rightarrow M$ ein reelles Vektorbündel und

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\tanh(\sqrt{x})} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{45} \pm \dots$$

Das "Polynom" q_f entspricht der Hirzebruchschen L -Klasse

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\tanh(x_i)} \\ &= 1 + \frac{1}{3} p_1(E) - \frac{1}{45} (7p_2(E) - p_1(E)^2) \pm \dots \end{aligned}$$

Analog ist für eine kompakte, $4n$ dimensionale Mannigfaltigkeit das **Hirzebruchsche L -Geschlecht** definiert als

$$L(M) := \int_M L(TM). \quad \blacksquare$$

6-G Indexsätze

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Auf dem Raum der Differentialformen $\Omega^*(M)$ betrachten wir den Differentialoperator

$$D = d + d^*.$$

Das Quadrat von D entspricht dem gewöhnlichen Laplace-Operator auf Formen

$$D^2 = dd^* + d^*d = \Delta.$$

Bezeichnen wir die Einschränkung auf gerade Formen mit D_+ und die auf ungerade Formen mit D_- , also

$$D_+ : \Gamma(\Lambda^{\text{even}} TM) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{\text{odd}} TM),$$

$$D_- : \Gamma(\Lambda^{\text{odd}} TM) \rightarrow \Gamma(\Lambda^{\text{even}} TM),$$

dann ist der **Index** des Operators D definiert als

$$\text{ind}(D) := \dim \ker D_+ - \dim \ker D_-.$$

Der Index von D stimmt mit dem Index von $\Delta = D^2$ überein, d.h.

$$\begin{aligned} \text{ind}(D) &= \dim \ker \Delta_+ - \dim \ker \Delta_- \\ &= \beta_0 + \beta_2 + \dots - \beta_1 - \beta_3 - \dots \\ &= \chi(M), \end{aligned}$$

wobei $\beta_k(M) = \dim H_{dR}^k(M) = \dim \ker \Delta|_{\Lambda^k TM}$ die k -te Bettizahl und $\chi(M)$ die Euler-Charakteristik bezeichnet. Nach dem Atiyah-Singer Indexsatz lässt sich der Index von D als Integral über die Euler-Klasse ausdrücken, d.h. es gilt

$$\chi(M) = \text{ind}(D) = \int_M e(TM).$$

Ein weiterer interessanter Differentialoperator ist der Dirac-Operator

$$D : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S),$$

der auf Schnitten von sogenannten Spinor-Bündeln wirkt. In diesem Fall besagt der Atiyah-Singer Indexsatz, dass der Index des Dirac-Operators dem \hat{A} -Geschlecht der Mannigfaltigkeit entspricht

$$\text{ind}(D) = \int_M \hat{A}(TM).$$

Dies ist ein erstaunliches Resultat, denn der Index dieses Differentialoperators ist vollständig durch das \hat{A} -Geschlecht, also die Topologie der Mannigfaltigkeit bestimmt. Als erste Anwendung erhalten wir eine Obstruktion gegen die Existenz von Metriken mit positiver Skalarkrümmung.

6.31 **Schrödinger-Lichnerowicz-Weitzenböck Formel** Sei M eine orientierte Spin Mannigfaltigkeit mit Dirac-Operator D . Dann gilt

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\text{scal}}{4} \text{Id}. \quad \times$$

Ist daher M eine kompakte, orientierte Spin Mannigfaltigkeit und trägt positive Skalar­krümmung, dann ist D^2 ein strikt positiver Operator und hat trivialen Kern. Somit ist $\text{ind}(D) = 0$ und folglich verschwindet auch das \hat{A} -Geschlecht

$$\int_M \hat{A}(TM) = 0.$$

Im Umkehrschluss impliziert ein nichtverschwindendes \hat{A} -Geschlecht, dass M keine Metrik positiver Skalar­krümmung trägt.

6.32 **Satz** Existiert auf S^n eine fastkomplexe Struktur, dann gilt $n = 1$ oder $n = 3$. \times

Beweis. Sei $E \rightarrow S^{2n}$ ein komplexes Vektorbündel. Man kann in diesem Fall beweisen, dass der Chern-Charakter von E stets ganzzahlig ist. Da bis auf die Extrempunkte $H_{\text{dR}}^0(S^{2n})$ und $H_{\text{dR}}^{2n}(S^{2n})$ alle Kohomologien von S^{2n} verschwinden, ist $c_n(E)$ die einzige nichttriviale Chern-Klasse. Somit gilt für den Chern-Charakter

$$\text{ch}(E) = \frac{c_n(E)}{(n-1)!} \in H_{\text{dR}}^{2n}(M, \mathbb{Z}),$$

d.h. $(n-1)!$ teilt den ganzzahligen Chern-Charakter.

Nehmen wir also an, dass $E = TS^{2n}$ ein komplexes Vektorbündel ist, dann gilt

$$(n-1)! \mid \int_M c_n(TS^{2n}) = \chi(S^{2n}) = 2,$$

also wird 2 von $(n-1)!$ geteilt, das heißt $n = 1, 2$ oder 3.

Wir müssen also noch den Fall der S^4 ausschließen. Dazu betrachten wir ganz allgemein die Signatur einer Mannigfaltigkeit M

$$\sigma : H^2(M) \times H^2(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int \alpha \wedge \beta.$$

Diese ist eine nichtausgeartete, symmetrische Bilinearform und es gilt

$$\sigma(M) = \int_M L(TM) = \frac{1}{3} \int_M p_1(TM) = \frac{1}{3} \int_M (c_1(TM)^2 - 2c_2(TM)).$$

Auf $E = TS^4$ verschwindet jedoch die erste Chern-Klasse von E , denn $c_1(E) \in H_{\text{dR}}^2(S^4)$, und die zweite de-Rham Kohomologie ist trivial. Daher verschwindet auch die Signatur identisch. Nach obiger Rechnung gilt aber

$$0 = \sigma(M) = \frac{-2}{3} \int_M c_2(TM),$$

ein Widerspruch, denn $\int_M c_2(TM) = \chi(S^4) = 2$. Somit kann $E = TS^4$ kein komplexes Vektorbündel sein. ■

7 Differentialoperatoren

7-A Elemente der linearen Algebra

Ausgangspunkt ist für uns ein n -dimensionaler, euklidischer Vektorraum (V, g) , d.h. ein reeller Vektorraum V mit positiv definitem Skalarprodukt g . Dieses induziert ein Skalarprodukt auf dem Raum der k -Formen $\Lambda^k V$ durch die Festlegung, dass

$$\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

eine Orthonormalbasis von $\Lambda^k V$ ist, wann immer $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von V ist. Dabei ist die zu einem Vektor $X \in V$ duale Linearform definiert als

$$X^* := g(X, \cdot) \in \Lambda^1 V^* = V^*.$$

BEISPIEL 37 Seien X, Y und A, B Vektoren in V , dann gilt

$$g(X^* \wedge Y^*, A^* \wedge B^*) = g(X, A)g(Y, B) - g(X, B)g(Y, A). \quad \blacksquare$$

7.1 Definition Der *Hodge-**-Operator ist der eindeutig bestimmte lineare Isomorphismus

$$* : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{n-k} V^*,$$

der implizit bestimmt ist durch

$$\alpha \wedge * \beta = g(\alpha, \beta) \text{vol},$$

wobei $\text{vol} = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$ das Standard-Volumenelement für eine Orthonormalbasis $\{e_i\}$ von V bezeichnet. \times

7.2 Bemerkung. Für explizite Berechnungen ist es oft geschickt, sich auf Elemente einer Orthogonalbasis zurückzuziehen. Hier gilt

$$*(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*) = \text{sgn}(\sigma) e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_{n-k}}^*,$$

wobei $I = (i_1, \dots, i_k)$ und $J = (j_1, \dots, j_{n-k})$ bezeichnet und σ die zu $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k})$ gehörige Permutation. \rightarrow

7.3 **Eigenschaften von $*$** Sei $\alpha \in \Lambda^k V^*$ und $\beta \in \Lambda^{n-k} V^*$ sowie $X \in V$. Dann gelten

a) $*1 = \text{vol}$ und $*\text{vol} = 1$,

b) $g(\alpha, *\beta) = (-1)^{k(n-k)} g(*\alpha, \beta)$,

c) $*^2 = (-1)^{k(n-k)} \text{Id}_{\Lambda^k V^*}$,

d) $*(X \lrcorner \alpha) = (-1)^{k-1} X^* \wedge *\alpha$,

e) $*(X^*) = X \lrcorner \text{vol}$, und

f) $g(X \lrcorner \alpha, \eta) = g(\alpha, X^* \wedge \eta)$, falls $\eta \in \Lambda^{k-1} V^*$. \times

7-B Differentialoperatoren auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Sei (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der Hodge- $*$ -Operator setzt sich fort zu einem Vektorbündelisomorphismus

$$* : \Lambda^k T^*M \rightarrow \Lambda^{n-k} T^*M.$$

Wir bezeichnen mit ∇ wieder den Levi-Civita Zusammenhang auf M .

7.4 **Lemma** Sei α eine Differentialform und X ein Vektorfeld auf M , dann gilt

$$\nabla_X * \alpha = * \nabla_X \alpha. \quad \times$$

7.5 **Definition** Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, dann ist der **Gradient** von f das eindeutig bestimmte Vektorfeld $\text{grad}(f)$ auf M mit

$$g(\text{grad}(f), X) = \text{d}f(X) = X(f), \quad X \in \chi(M),$$

d.h. es gilt $\text{d}f = (\text{grad } f)^*$. \times

7.6 **Vereinbarung.** Sofern nicht anders angegeben bezeichne für alles Weitere $\{e_i\}$ stets eine Orthonormalbasis von $T_m M$ für $m \in M$. Alle Ausdrücke in denen e_i auftritt sind dann als punktweise ausgewertet in m zu verstehen. \rightarrow

7.7 **Definition** Die *Divergenz* eines Vektorfeldes X auf M ist definiert als

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \operatorname{tr}(\nabla X). \quad \times$$

Man kann den Gradienten als Differentialoperator erster Ordnung auffassen, nämlich als das gewöhnliche Differential. Wir werden sehen, dass auch die Divergenz als Differentialoperator erster Ordnung aufgefasst werden kann, mit Hilfe des Kodifferentials. Es stellt sich sogar heraus, dass Gradient und Divergenz in einem gewissen Sinne *dual* zu einander sind. Wie für das Differential gilt auch für die Divergenz die Leibniz-Regel, die wiederum den Gradienten involviert.

7.8 **Lemma** Sei X ein Vektorfeld auf M und f eine glatte Funktion, dann gilt

$$\operatorname{div}(fX) = f \operatorname{div}(X) + \operatorname{d}f(X). \quad \times$$

Beweis. In einer lokalen Basis schreibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i}(fX), e_i) = \sum_{i=1}^n (g(f\nabla_{e_i} X, e_i) + g(\operatorname{d}f(e_i)X, e_i)) \\ &= f \operatorname{div}(X) + \operatorname{d}f(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Auf jeder orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit existiert eine parallele Volumenform. Diese schreibt sich lokal als

$$\operatorname{vol} = e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Die Lie-Ableitung erhält den Grad von Differentialformen, daher ist die Lie-Ableitung der Standard-Volumenform wieder eine n -Form. Diese beiden Volumenformen lassen sich durch die Divergenz ineinander überführen.

7.9 **Satz** Sei X ein Vektorfeld auf M , dann gilt

$$L_X \operatorname{vol} = \operatorname{d}(*X^*) = \operatorname{div}(X) \operatorname{vol}. \quad \times$$

Beweis. Mit Hilfe der Cartan-Formel lässt sich die Lie-Ableitung wie folgt ausdrücken

$$L_X \operatorname{vol} = X \lrcorner \operatorname{d} \operatorname{vol} + \operatorname{d}(X \lrcorner \operatorname{vol}) = \operatorname{d}(*X^*),$$

denn $\text{dvol} = 0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (L_X \text{vol})(e_1, \dots, e_n) &= L_X \text{vol}(e_1, \dots, e_n) - \sum_{i=1}^n \text{vol}(\dots, L_X e_i, \dots) \\ &= - \sum_{i=1}^n \text{vol}(\dots, [X, e_i], \dots). \end{aligned}$$

Schreiben wir $[X, e_i] = \sum_{j=1}^n f_{ij} e_j$, dann gilt also

$$(L_X \text{vol})(e_1, \dots, e_n) = - \sum_{i=1}^n f_{ii}.$$

Andererseits ist ∇ torsionsfrei und metrisch, so dass

$$\begin{aligned} \text{div}(X) &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i) = \sum_{i=1}^n (g(\nabla_X e_i, e_i) - g([e_i, X], e_i)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X g(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^n g([X, e_i], e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n f_{ii}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Als unmittelbare Konsequenz aus dem Satz von Stokes erhalten wir nun folgenden Integralsatz.

7.10 **Satz von Gauß-Green** Sei X ein Vektorfeld auf M , dann gilt

$$\int_M \text{div}(X) \, dM = 0,$$

wobei dM die Integration über vol bezeichnet. \times

Beweis. Alle hier betrachteten Mannigfaltigkeiten sind randlos, d.h. $\partial M = \emptyset$. Die Behauptung folgt nun mit dem vorangegangenen Lemma und dem Satz von Stokes,

$$\int_M \text{div}(X) \, dM = \int_M \text{div}(X) \text{vol} = \int_M d(*X^*) = \int_{\partial M} *X^* = 0. \quad \blacksquare$$

7.11 **Lemma** Sei ω eine Differentialform auf M , dann schreibt sich deren Differential lokal als

$$d\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge \nabla_{e_i} \omega. \quad \times$$

Dieser Ausdruck für das Differential motiviert die Definition eines *Kodifferentials*, das im Wesentlichen durch Anwendung von $*$ auf obigen Formel definiert wird.

7.12 **Definition** Das *Kodifferential* $d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ ist ein Differentialoperator erster Ordnung definiert durch

$$d^* \omega = - \sum_{i=1}^n e_i \lrcorner \nabla_{e_i} \omega,$$

für $\omega \in \Omega^k(M)$ und eine lokale Orthonormalbasis $\{e_i\}$. \times

Wir überzeugen uns davon, dass obige Definition nicht von der Wahl der Basis abhängt, indem wir folgenden koordinatenunabhängige Definition angeben:

7.13 **Lemma** Sei $\omega \in \Omega^k(M)$, dann gilt

$$d^* \omega = -(-1)^{n(k+1)} * d * \omega.$$

Insbesondere gilt $\operatorname{div}(X) = -d^* X^*$. \times

Während der Gradient einer Funktion durch das gewöhnliche Differential bestimmt ist, ist die Divergenz also durch das Kodifferential gegeben.

Beweis. Wir rechnen in einer lokalen Basis direkt nach, dass

$$\begin{aligned} *d * \omega &= * \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge \nabla_{e_i} (*\omega) \right) = * \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge * (\nabla_{e_i} \omega) \right) \\ &= (-1)^{k+1} *^2 \left(\sum_{i=1}^n e_i \lrcorner (\nabla_{e_i} \omega) \right) \\ &= (-1)^{k+1} (-1)^{(k+1)(n-k-1)} \left(\sum_{i=1}^n e_i \lrcorner (\nabla_{e_i} \omega) \right) \\ &= (-1)^{(k+1)(n-k)} \left(\sum_{i=1}^n e_i \lrcorner (\nabla_{e_i} \omega) \right) \\ &= -(-1)^{n(k+1)} d^* \omega, \end{aligned}$$

denn $(-1)^{k(k+1)} = 1$. \blacksquare

Das Kodifferential ist in einem gewissen Sinne dual zum gewöhnlichen Differential. Dazu definieren wir zunächst ein geeignetes Skalarprodukt.

7.14 **Definition** Auf dem Raum $\Omega_c^k(M)$ der k -Formen auf M mit kompaktem Träger ist das L^2 -Skalarprodukt definiert durch

$$(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) dM, \quad \alpha, \beta \in \Omega_c^k(M). \quad \times$$

Falls die Mannigfaltigkeit M selbst schon kompakt ist, gilt $\Omega_c^k(M) = \Omega^k(M)$.

7.15 **Lemma** Das Kodifferential ist formal L^2 -adjungiert (oder kurz adjungiert) zum Differential, d.h. für Differentialformen $\alpha \in \Omega_c^{k-1}(M)$ und $\beta \in \Omega_c^k(M)$ gilt

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta). \quad \times$$

Beweis. Zunächst gilt nach Definition des Hodge-*-Operators,

$$(\alpha, d^*\beta) = \int_M g(\alpha, d^*\beta) \text{vol} = \int_M \alpha \wedge *d^*\beta.$$

Umgekehrt gilt dann natürlich auch

$$(d\alpha, \beta) = \int_M g(d\alpha, \beta) \text{vol} = \int_M d\alpha \wedge *\beta.$$

Weiterhin gilt nach den Rechenregeln für $*$,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge *d^*\beta &= (-1)^{n(k+1)+1} \alpha \wedge *^2 d^*\beta \\ &= (-1)^{n(k+1)+1} (-1)^{(n-k+1)(k-1)} \alpha \wedge d^*\beta \\ &= (-1)^{k^2} (d(\alpha \wedge *\beta) - d\alpha \wedge *\beta) (-1)^{k-1} \\ &= -d(\alpha \wedge *\beta) + d\alpha \wedge *\beta. \end{aligned}$$

Bei Integration verschwindet der erste Term nach dem Satz von Stokes, also gilt

$$(\alpha, d^*\beta) = \int_M \alpha \wedge *d^*\beta = \int_M d\alpha \wedge *\beta = (d\alpha, \beta). \quad \blacksquare$$

7.16 **Definition** Die *Hessische* einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ ist definiert als

$$\text{Hess}(f) = \nabla(df) \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M),$$

d.h. für Vektorfelder X und Y auf M gilt

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \nabla_X(df(Y)) - df(\nabla_X Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f). \quad \times$$

7.17 **Lemma** Sei f eine glatte Funktion auf M , dann gelten

a) $\text{Hess}(f) = \nabla^2 f$, und

b) $\text{Hess}(f)$ ist ein symmetrischer $(0, 2)$ -Tensor, d.h. $\text{Hess}(f)$ ist $\mathcal{C}^\infty(M)$ -bilinear und für Vektorfelder X und Y auf M gilt

$$\text{Hess}(f)(X, Y) = \text{Hess}(f)(Y, X). \quad \times$$

Beweis. a): Fassen wir die Funktion f als $(0, 0)$ -Tensor auf, so gilt nach Definition $\nabla_X f = L_X f = df(X)$.

b): Seien also X und Y Vektorfelder, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f)(X, Y) - \text{Hess}(f)(Y, X) &= (\nabla^2 f)_{XY} - (\nabla^2 f)_{YX} \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) - Y(X(f)) + (\nabla_Y X)(f) \\ &= [X, Y](f) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)(f) = 0, \end{aligned}$$

denn der Zusammenhang ist torsionsfrei. ■

7-C Der Laplace-Operator auf Funktionen

7.18 **Definition** Der *Laplace-Operator* auf M ist ein Differentialoperator 2. Ordnung definiert als

$$\Delta f = -\text{div}(\text{grad } f), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M). \quad \times$$

7.19 **Bemerkung.** Das Vorzeichen in der Definition des Laplace-Operators ist absichtlich so gewählt, dass Δ ein positiver Operator auf M wird. Wählen wir $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, dann entspricht der so definierte Laplace-Operator gerade dem dem negativen klassischen Laplace-Operator, d.h

$$\Delta f = -\Delta_{\text{klass}} f, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \quad \rightarrow$$

Wir listen nun einige Eigenschaften des Laplace-Operators auf.

7.20 **Satz** Sei f eine glatte Funktion auf M und $\{e_i\}$ eine Orthonormalbasis von $T_m M$. Dann gelten

a) $\Delta f = d^* df = - * d * df$,

$$b) \Delta f = -\text{tr}(\text{Hess}(f)),$$

$$c) (\Delta f)_m = -\sum_{i=1}^n [e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i} e_i) f]_m,$$

d) Seien $\{\gamma_i\}$ Geodätische durch m mit $\dot{\gamma}_i(0) = e_i$, dann gilt

$$(\Delta f)_m = -\sum_{i=1}^n \left. \frac{d}{dt^2} \right|_{t=0} (f \circ \gamma_i)(t).$$

e) In lokalen Koordinaten (U, x) von M gilt

$$\Delta f|_U = -\bar{g}^{-1/2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \bar{g}^{1/2} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right),$$

$$\text{wobei } \bar{g} = \det(g_{ij}) \text{ und } g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

f) Der Laplace-Operator ist formal selbstadjungiert und positiv, d.h. es gilt

$$(\Delta f, g) = (f, \Delta g), \quad \text{und} \quad (\Delta f, f) \geq 0,$$

für alle Funktionen $f, g \in C_c^\infty(M)$. \times

Beweis. a): Nach Lemma 7.13 gilt $\text{div}(X) = -d^* X^*$. Folglich gilt für eine glatte Funktion f , dass

$$- * d * df = -d^* df = -d^* (\text{grad } f)^* = -\text{div}(\text{grad } f).$$

b) & c): Man rechnet im Punkt m nach, dass

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } f)_m &= \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} \text{grad}(f), e_i)_m \\ &= \sum_{i=1}^n g(\text{grad}(f), \nabla_{e_i} e_i)_m - g(\text{grad}(f), \nabla_{e_i} e_i)_m \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(e_i(f))_m - (\nabla_{e_i} e_i)(f)_m \\ &= \text{tr}(\text{Hess}(f))_m. \end{aligned}$$

d): Setzen wir die Orthonormalbasis $\{e_i\}$ durch Parallelverschiebung in einer kleinen Umgebung U um m fort, dann ist $(\nabla_{e_i} e_i)_m = 0$ und für die Geodätischen gilt $\dot{\gamma}_i(t) = e_i|_{\gamma_i(t)}$. Dann gilt

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^n e_i(e_i(f)) = -\sum_{i=1}^n \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} f \circ \gamma_i(t).$$

f): Das Kodifferential ist adjungiert zum gewöhnlichen Differential, also gilt für glatte Funktionen f und g auf M ,

$$(\Delta f, g) = (d^*df, g) = (df, dg) = (f, d^*dg) = (f, \Delta g).$$

Insbesondere gilt $(\Delta f, f) = (df, df) = \|df\|^2 \geq 0$. ■

7.21 **Produktregel** Seien f und h glatte Funktionen auf M , dann gilt

$$\Delta(f \cdot h) = (\Delta f) \cdot h + f \cdot (\Delta h) - 2g(\text{grad } f, \text{grad } h). \quad \times$$

Beweis. Wählen wir geodätische Normalkoordinaten in m , dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot h)_m &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(f \cdot h)}{\partial x_i^2} \Big|_m, \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_m h(m) + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_m + f(p) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} \Big|_m \\ &= (\Delta f)_m \cdot h(m) + f(m)(\Delta h)_m - 2g(\text{grad } f, \text{grad } h)_m. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Der Laplace-Operator ist definiert durch $\Delta = \text{div}(\text{grad})$ und hängt somit von der Metrik ab. Abbildungen, die die Metrik erhalten erhalten auch den Laplace-Operator.

7.22 **Satz** Sei $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ eine Isometrie. Dann gilt

$$\Delta^M(f \circ \varphi) = (\Delta^N f) \circ \varphi. \quad \times$$

Beweis. Sei $\eta \in C^\infty(N)$, dann gilt

$$\begin{aligned} (\Delta^M(f \circ \varphi), \eta \circ \varphi)_M &= (d(\varphi^* f), d(\varphi^* \eta))_M = (\varphi^* df, \varphi^* d\eta)_M \\ &= (df, d\eta)_N = (\nabla^N f, \eta)_N \\ &= (\varphi^*(\Delta^N f), \eta \circ \varphi)_M. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.23 **Satz** Sei $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ eine Riemannsche Submersion, d.h. der Tangentialraum an M zerfällt in

$$TM = T^h \oplus T^\nu, \quad T^h = \ker d\pi,$$

und die Metrik auf M ist gegeben durch

$$g_M = \pi^* g_N + g_F,$$

mit einer Fasermetrik g_F auf T^h . Sind die Fasern von M über N totalgeodätisch, so gilt

$$\Delta^M(f \circ \pi) = (\Delta^N f) \circ \pi. \quad \times$$

Beweis. Sei $m \in M$ und der Tangentialraum wie folgt orthogonal zerlegt

$$T_m = T_m^h \oplus T_m^\nu.$$

Wähle Orthonormalbasen $\{w_i\}$ von T_m^h und $\{v_j\}$ von T_m^ν und zugehörige Geodätische γ_i und δ_j durch m mit

$$\dot{\gamma}_i(0) = w_i, \quad \dot{\delta}_j(0) = v_j.$$

Da die Submersion total geodätisch ist, ist $\pi \circ \gamma_i$ eine Geodätische von N und δ_j verläuft vollständig in der Faser $F = \pi^{-1}(n)$ mit $m \in F$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \Delta^M(f \circ \varphi)_m &= - \sum_i \frac{d^2}{dt^2} \Big|_0 (f \circ \pi) \circ \gamma_i(t) - \sum_j \frac{d^2}{dt^2} \Big|_0 (f \circ \pi) \circ \delta_j(t) \\ &= - \sum_i \frac{d^2}{dt^2} \Big|_0 f \circ (\pi \circ \gamma_i)(t) \\ &= (\Delta^N f)_{\pi(m)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Seien nun (M, g) und (N, h) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $(M \times N, g \oplus h)$ bezeichne ihr Riemannsches Produkt. Dann sind die Projektionen

$$\text{pr}_M : M \times N \rightarrow M, \quad (m, n) \mapsto m, \quad \text{pr}_N : M \times N \rightarrow N, \quad (m, n) \mapsto n,$$

totalgeodätische Riemannsche Submersionen.

7.24 **Satz** Seien $a \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $b \in \mathcal{C}^\infty(N)$, dann ist

$$a \star b := \text{pr}_M^* a \cdot \text{pr}_N^* b = (a \circ \text{pr}_M) \cdot (b \circ \text{pr}_N) \in \mathcal{C}^\infty(M \times N),$$

mit $a \star b(m, n) = a(m)b(n)$, und es gilt

$$\Delta^{M \times N}(a \star b) = (\Delta^M a) \star b + a \star (\Delta^N b). \quad \times$$

Beweis. Mit der Produktregel und dem vorangegangenen Satz über Riemannsche Subversionen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Delta^{M \times N}(a \star b) &= \Delta^{M \times N}(\text{pr}_M^* a \cdot \text{pr}_N^* b) \\
 &= (\Delta^{M \times N} \text{pr}_M^* a) \cdot \text{pr}_N^* b + \text{pr}_M^* a \cdot (\Delta^{M \times N} \text{pr}_N^* b) \\
 &\quad - 2 \langle \text{grad pr}_M^* a, \text{grad pr}_N^* b \rangle \\
 &= (\Delta^{M \times N} \text{pr}_M^* a) \cdot \text{pr}_N^* b + \text{pr}_M^* a \cdot (\Delta^{M \times N} \text{pr}_N^* b) \\
 &= \text{pr}_M^*(\Delta^M a) \cdot \text{pr}_N^* b + \text{pr}_M^* a \cdot \text{pr}_N^*(\Delta^N b) \\
 &= (\Delta^M a) \star b + a \star (\Delta^N b). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

7.25 **Korollar** Sei a eine Δ^M Eigenfunktion zum Eigenwert λ und sei b eine Δ^N Eigenfunktion zum Eigenwert μ . Dann ist $a \star b$ eine $\Delta^{M \times N}$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda + \mu$ und jede Eigenfunktion von $\Delta^{M \times N}$ ist von dieser Form. \times

Beweis. Aus dem vorangegangenen Satz folgt, dass $\text{pr}_M^* a \cdot \text{pr}_N^* b$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $\lambda + \mu$ ist. Sowohl Δ^M als auch Δ^N besitzt ein vollständiges Orthogonalsystem aus Eigenfunktionen \mathcal{E}^M bzw. \mathcal{E}^N . Da die Metrik auf $M \times N$ durch $g \oplus h$ gegeben ist, erhält man ein Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen von $\Delta^{M \times N}$ durch

$$\mathcal{E}^M \star \mathcal{E}^N := \{a \star b : a \in \mathcal{E}^M \text{ und } b \in \mathcal{E}^N\}.$$

Da \mathcal{E}^M dicht in $\mathcal{C}^\infty(M)$ und \mathcal{E}^N dicht in $\mathcal{C}^\infty(N)$ liegt, liegt $\mathcal{E}^M \star \mathcal{E}^N$ dicht in $\mathcal{C}^\infty(M \times N)$ und daher sind durch $\mathcal{E}^M \star \mathcal{E}^N$ bereits alle möglichen Eigenfunktionen beschrieben. \blacksquare

7-D Anwendung: Der Laplace-Operator auf der Sphäre

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Spektrum des Laplace-Operators auf der Sphäre S^n zu bestimmen. Dazu betrachten wir die Sphäre als Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n+1} , denn dort hat der Laplace-Operator eine besonders einfache Gestalt. Wir suchen daher nach einer Möglichkeit den Laplace auf der Sphäre S^n über den Laplace auf dem \mathbb{R}^{n+1} auszudrücken.

7.26 **Satz** Sei f eine glatte Funktion auf \mathbb{R}^{n+1} , dann gilt

$$(\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} f) \Big|_{S^n} = \Delta^{S^n}(f \Big|_{S^n}) - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{S^n} - n \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{S^n}. \quad \times$$

Beweis. Sei $\nu = p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und ν_1, \dots, ν_n eine Orthonormalbasis von $T_p S^n = p^\perp$. Die Geodätischen zu ν_i durch p sind dann gegeben durch

$$y_i(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot \nu_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Mit Hilfe der Geodätischen können wir nun Δ auf der Sphäre berechnen. Sei dazu $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(y_i(t)) &= df(\dot{y}_i(t)) = df(-\sin t \cdot p + \cos t \cdot \nu_i) \\ &= -\sin t \cdot \nu(f) + \cos t \cdot \nu_i(f) \Big|_{y_i(t)}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für die zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(y_i(t)) &= \frac{d}{dt} \left(-\sin t \cdot \nu(f) + \cos t \cdot \nu_i(f) \right) \Big|_{t=0} \\ &= -\nu(f) + \nu_i(\nu_i(f)) \Big|_{y_i(0)}. \end{aligned}$$

Somit ist der Laplace-Operator auf der Sphäre gegeben durch,

$$\begin{aligned} \Delta(f|_{S^n})_p &= - \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(y_i(t)) \\ &= - \sum_{i=1}^n \nu_i(\nu_i(f)) \Big|_{y_i(0)} + n\nu(f) \Big|_{y_i(0)} \\ &= (\Delta^{\mathbb{R}^n} f)_p + \nu(\nu(f))_p + n\nu(f)_p. \end{aligned}$$

Da $\nu(f) = \frac{\partial f}{\partial r}$, folgt schließlich die Behauptung. ■

Mit Hilfe dieser Formel wollen wir nun Eigenfunktionen von Δ auf der Sphäre S^n berechnen. Dazu betrachten wir die *homogenen Polynome vom Grad k auf \mathbb{R}^{n+1}* . Für den Grad 0 sind dies gerade die konstanten und für den Grad 1 die linearen Funktionen. Die allgemeine Form eines solchen Polynoms ist

$$H(x) = \sum a_{i_1 \dots i_r} x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{n_{i_r}}$$

mit $n_{i_1} + \dots + n_{i_r} = k$. Die Homogenität vom Grad k ist gleichbedeutend mit

$$H = r^k (H|_{S^n}),$$

d.h. für $x \in S^n$ und $\mu \in \mathbb{R}$ gilt $H(\mu x) = \mu^k H(x)$. Für die ersten beiden Ableitungen ergibt sich somit

$$\frac{\partial H}{\partial r} = kr^{k-1}(H|_{S^n}), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} = k(k-1)r^{k-2}(H|_{S^n}).$$

Nach obiger Formel erhalten wir für homogene Polynome

$$\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = (\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}}H)_{S^n} + k(n+k-1)(H|_{S^n}).$$

Die harmonischen, homogenen Polynome vom Grad k auf \mathbb{R}^{n+1} sind also Eigenfunktionen von Δ^{S^n} , mit

$$\Delta^{S^n}(H|_{S^n}) = k(n+k-1)H|_{S^n}. \quad (*)$$

Wir wollen nun zeigen, dass jede Eigenfunktion als Linearkombination harmonischer, homogener Polynome gegeben ist. Dazu bezeichnen wir den Raum der homogenen Polynome vom Grad k auf \mathbb{R}^{n+1} mit \mathcal{P}_k und den Raum der harmonischen, homogenen Polynome vom Grad k mit \mathcal{H}_k . Weiterhin bezeichnen wir die Einschränkung einer Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ auf S^n mit

$$\tilde{f} := f|_{S^n},$$

und schreiben

$$\tilde{\mathcal{H}}_k := \{\tilde{f} : f \in \mathcal{H}_k\}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_k := \{\tilde{f} : f \in \mathcal{P}_k\}.$$

Für Funktionen P und $Q \in \tilde{\mathcal{P}}_k$ definieren wir ein Skalarprodukt durch

$$\langle P, Q \rangle := \int_{S^n} \tilde{P}\tilde{Q}dS^n.$$

Mit dieser Notation können wir unser Resultat wie folgt postulieren:

7.27 Satz *Das Spektrum von Δ^{S^n} ist gegeben durch eine abzählbare Folge von ganzzahligen, positiven Eigenwerten*

$$\lambda_k = k(n+k-1), \quad k = 0, 1, \dots,$$

und der Eigenraum zu λ_k ist $\tilde{\mathcal{H}}_k$. \times

7.28 *Bemerkung.* Hier ist S^n mit der Standardmetrik g versehen und daher ist die Skalar­krümmung normiert auf

$$\text{scal} = n(n - 1).$$

Für eine weitere Metrik $h = c \cdot g$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{spec}(\Delta, h) = \frac{1}{c} \text{spec}(\Delta, g). \quad \circ$$

Bevor wir den Satz beweisen, benötigen wir ein Resultat über die Struktur der homogenen Polynome.

7.29 **Lemma** *Für $k \geq 0$ lassen sich die Räume homogener Polynome wie folgt orthogonal zerlegen*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2k} &= \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-2} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_0, \\ \mathcal{P}_{2k+1} &= \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2 \mathcal{H}_{2k-1} \oplus \dots \oplus r^{2k} \mathcal{H}_1. \quad \times \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion. Offenbar liegen die konstanten und die linearen Funktionen im Kern des Laplace Operators und daher gilt

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{P}_1 = \mathcal{H}_1.$$

Sei also für $k \geq 0$ die Zerlegung $\mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{P}_{k-2}$ gegeben, dann ist zu zeigen, dass

$$\mathcal{P}_{k+2} = \mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathcal{P}_k.$$

Bezeichne $E(\lambda_k)$ den Eigenraum von Δ^{S^n} zu λ_k , so haben wir bereits gezeigt, dass

$$\tilde{\mathcal{H}}_{k+2} \subset E(\lambda_{k+2}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt somit

$$\mathcal{P}_k \subset \bigoplus_{i=1}^k E(\lambda_i).$$

Da Δ selbstadjungiert ist, sind Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal und daher gilt insbesondere $\mathcal{H}_{k+2} \perp \mathcal{P}_k$, sodass

$$\mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k+2}.$$

Um die umgekehrte Inklusion einzusehen, betrachte ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{k+2}$ mit $p \perp \mathcal{P}_k$. Dann ist

$$\Delta p \in \mathcal{P}_k = \mathcal{H}_k \oplus r^2 \mathcal{H}_{k-2} \oplus \dots,$$

d.h. p ist genau dann harmonisch, wenn

$$\Delta p \perp r^{2l} \mathcal{H}_{k-2l} \text{ für } 0 \leq 2l \leq k \iff \widetilde{\Delta p} \perp \tilde{\mathcal{H}}_{k-2l} \text{ für } 0 \leq 2l \leq k.$$

Nach voriger Rechnung ist

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{p} &= \widetilde{\Delta p} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial r^2} + n \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \\ &= \widetilde{\Delta p} + \lambda_{k+2} \tilde{p}. \end{aligned}$$

Somit gilt für ein harmonisches, homogenes Polynom H vom Grad $k - 2l$, dass

$$\begin{aligned} (\widetilde{\Delta p}, \tilde{H}) &= (\Delta \tilde{p}, \tilde{H}) - \lambda_{k+2} (\tilde{p}, \tilde{H}) \\ &= (\tilde{p}, \Delta \tilde{H}) - \lambda_{k+2} (\tilde{p}, \tilde{H}) \\ &= (\lambda_{2k-l} - \lambda_{k+2}) (\tilde{p}, \tilde{H}) = 0, \end{aligned}$$

denn $\tilde{p} \perp \tilde{\mathcal{P}}_k = \bigoplus_{0 \leq 2l \leq k} \tilde{\mathcal{H}}_{k-2l}$. Also ist $p \in \mathcal{H}_{k+2}$ und folglich gilt

$$\mathcal{H}_{k+2} \oplus r^2 \mathcal{P}_k \supset \mathcal{P}_{k+2}. \quad \blacksquare$$

Beweis des Satzes. Jedes homogene Polynom lässt sich als Linearkombination von harmonischen, homogenen Polynomen darstellen. Weiterhin liegen die Polynome nach dem Satz von Weierstrass dicht in den glatten Funktionen, d.h. auch

$$\bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{H}}_k = \bigoplus_{k \geq 0} \tilde{\mathcal{P}}_k \subset \mathcal{C}^\infty(S^n)$$

liegt dicht. Somit sind die λ_k die einzigen Eigenwerte von Δ , denn für ein weiteres $\lambda \in \mathbb{R}$ gäbe es auch einen Eigenraum $E(\lambda)$ der senkrecht auf allen $\tilde{\mathcal{H}}_k$ stehen müsste, dann könnten die \mathcal{H}_k aber nicht dicht liegen. Somit gilt auch $E(\lambda_k) = \tilde{\mathcal{H}}_k$, denn andernfalls gäbe es eine Eigenfunktion φ_k zu λ_k , die orthogonal auf $\tilde{\mathcal{H}}_k$ steht und da E_λ abgeschlossen ist, ist dies wiederum ein Widerspruch zur Dichtheit. \blacksquare

7.30 *Bemerkung.* Die Dimension der Eigenräume lässt sich nun wie folgt berechnen,

$$\dim E(\lambda_k) = \dim \mathcal{H}_k = \dim \mathcal{P}_k - \dim \mathcal{P}_{k-2} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-2}{n-2}. \quad \circ$$

7-E Ausblick: Symmetrische Räume

Sei $M = G/K$ ein symmetrischer Raum. Dann ist $G \rightarrow G/K$ ein K -Hauptfaserbündel und wir betrachten das Vektorbündel

$$E = G \times_{\rho} V, \quad \rho : K \rightarrow \text{Aut}(V).$$

Auf $\Gamma(E)$ wirkt die Gruppe G von links, indem man für einen Schnitt e definiert

$$(ge)(x) := e(g^{-1}x), \quad x \in M, g \in G.$$

Daher definiert $\Gamma(E)$ eine G -Darstellung, die sich wie folgt zerlegen lässt

$$\Gamma(E) = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} V_{\lambda} \otimes \text{Hom}_k(V_{\lambda}, V),$$

wobei die V_{λ} irreduzible G -Darstellungen bezeichnen. Als K -Darstellung ist V_{λ} nicht mehr irreduzibel und zerfällt nach dem Lemma von Schur in

$$V_{\lambda}|_K = V_1 \oplus \dots \oplus V_l = \mathbb{C}^r,$$

wobei r die Anzahl der V_i für $1 \leq i \leq l$ bezeichnet mit $V_i \cong V$.

Da M symmetrisch ist, entspricht der Levi-Civita Zusammenhang auf E der Richtungsableitung und daher entspricht $\nabla^* \nabla$ dem *Casimir-Operator*,

$$(\nabla^* \nabla)^E = \text{Cas}_{V_{\lambda}} \otimes \text{Id},$$

wobei für eine Darstellung $\rho : G \rightarrow V$ der Casimir-Operator definiert ist durch

$$\text{Cas}_{\rho} := \sum_i \rho_*(x_i)^2 \in \text{End}(V),$$

mit einer Orthonormalbasis $\{x_i\}$ von $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$. Da die Darstellung V_{λ} irreduzibel ist, gilt

$$\text{Cas}_{V_{\lambda}} = \langle \nu, \lambda + 2\sigma \rangle \text{Id}_{V_{\lambda}} = (|\lambda|^2 + \langle \lambda, 2\sigma \rangle) \text{Id}_{V_{\lambda}},$$

wobei λ durch die Darstellung V_{λ} und σ durch die Lie-Algebra bestimmt wird.

BEISPIEL 38 Die $2n$ -dimensionale Sphäre ist ein symmetrischer Raum

$$S^{2n} = \text{SO}(2n+1)/\text{SO}(2n).$$

Die Darstellungen von $SO(2n + 1)$ sind parametrisiert durch

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ mit } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Analog sind die Darstellungen von $SO(2n)$ parametrisiert durch

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ mit } \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq |\lambda_n|.$$

Die Einschränkung einer irreduziblen Darstellung von $SO(2n + 1)$ auf $SO(2n)$ ist nicht irreduzibel, sondern zerfällt

$$SO(2n + 1) \rightarrow SO(2n), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \rightarrow \bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n).$$

Dabei erfüllen die Parametrisierungen die sogenannten *branching rules*,

$$\lambda_1 \geq \bar{\lambda}_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq |\bar{\lambda}_n|.$$

Für $\bar{\lambda} = 0$ ist so z.B. $\lambda = (\lambda_1, 0, \dots, 0)$. Daher können wir die glatten Funktionen auf S^{2n} darstellen als

$$C^\infty(S^{2n}) = \bigoplus V_{(\lambda_1, 0, \dots, 0)} \otimes \text{Hom}_k(V_{(\lambda_1, 0, \dots, 0)}, V).$$

Für $M = S^{2n}$ ist $G = SO(2n + 1)$ und auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n + 1)$ sei das Skalarprodukt durch die Killing-Form induziert. Man berechnet, dass hier

$$\sigma = \frac{1}{2}(2n - 1, 2n - 3, \dots, 1),$$

und daher ist der Casimir gegeben durch

$$\text{Cas}_{V_{(\lambda_k, 0, \dots, 0)}} = k^2 + k(2n - 1) = k(k + 2n - 1) = \lambda_k.$$

Die Bestimmung des Spektrums der Sphäre lässt sich also in ein Problem der Darstellungstheorie von Lie-Gruppen übersetzen. ■

7-F Der Laplace-Operator auf Differentialformen

Sei wieder (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir setzen nun den für Funktionen definierten Laplace-Operator unter Verwendung von Differential und Kodifferential auf Formen fort.

7.31 **Definition** Der *Hodge-Laplace-Operator* auf Formen

$$\Delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$$

ist für $\omega \in \Omega^k(M)$ definiert durch

$$\Delta\omega = d^*d\omega + dd^*\omega. \quad \times$$

Der Term dd^* verschwindet auf Funktionen und trat daher in der ursprünglichen Definition nicht auf. Viele Eigenschaften des Laplace-Operators auf Funktionen übertragen sich auch auf den Hodge-Laplace-Operator.

7.32 **Lemma** a) Es gilt $\Delta = (d + d^*)^2$.

b) Der Laplace-Operator ist selbstadjungiert und positiv, genauer gilt für Formen $\alpha, \beta \in \Omega_c^p(M)$,

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta), \quad \text{und} \quad (\Delta\alpha, \alpha) = \|d\alpha\|^2 + \|d^*\alpha\|^2 \geq 0.$$

c) Der Laplace-Operator vertauscht mit dem Differential, dem Kodifferential und dem Hodge-*-Operator, d.h. es gilt

$$\Delta d = d\Delta, \quad \Delta d^* = d^*\Delta, \quad \text{und} \quad \Delta * = *\Delta. \quad \times$$

Beweis. a): Eine formale Rechnung zeigt $(d + d^*)^2 = d^2 + d^*d + dd^* + (d^*)^2 = \Delta$, denn die Quadrate von Differential und Kodifferential verschwinden.

b): Wir haben bereits verifiziert, dass das Kodifferential der zum Differential adjungierte Operator ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha, \beta) &= (d^*d\alpha, \beta) + (dd^*\alpha, \beta) = (d\alpha, d\beta) + (d^*\alpha, d^*\beta) \\ &= (\beta, d^*d\alpha) + (\beta, dd^*\alpha) = (\beta, \Delta\alpha), \end{aligned}$$

und insbesondere $(\Delta\alpha, \alpha) = \|d\alpha\|^2 + \|d^*\alpha\|^2$.

c): Vertauschung von Δ mit d bzw. d^* zeigt eine formale Rechnung. Sei weiterhin $\omega \in \Omega^k(M)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta * \omega &= -(-1)^{n(k+1)} (*d * d * \omega + d * d * * \omega) \\ &= -(-1)^{n(k+1)} (*d * d * \omega + * * d * d \omega) \\ &= -(-1)^{n(k+1)} * (d * d * \omega + * d * d \omega) \\ &= * (dd^* + d^*d) \omega = *\Delta\omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.33 *Bemerkung.* Der Laplace-Operator ist ein elliptischer Differentialoperator. Auf kompakten Mannigfaltigkeiten ist somit das Spektrum diskret und besteht nur aus Eigenwerten endlicher Vielfachheit. Darüber hinaus existiert für $0 \leq k \leq n$ ein Orthornormalsystem aus Eigenformen von $\Omega^k(M)$. \rightarrow

7.34 **Definition** Die Formen im Kern des Laplace-Operators heißen *harmonisch* und mit

$$\mathcal{H}^k(M) := \ker \left(\Delta \big|_{\Omega^k(M)} \right)$$

bezeichnet man den *Raum der harmonischen k -Formen*. \times

7.35 **Lemma** Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist eine k -Form ω genau dann harmonisch, wenn

$$d\omega = 0 \quad \text{und} \quad d^*\omega = 0. \quad \times$$

Beweis. Da Δ ein positiver Operator ist, ist ω genau dann harmonisch, wenn

$$(\Delta\omega, \omega) = \|d\omega\|^2 + \|d^*\omega\|^2 = 0. \quad \blacksquare$$

7.36 *Bemerkung.* Parallele Formen auf M sind geschlossen und kogeschlossen und daher insbesondere harmonisch. \rightarrow

7-G Hodge-Theorie

Sei nun (M, g) eine kompakte, n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

7.37 **Satz von Hodge-de-Rham** a) Der Raum $\mathcal{H}^k(M)$ der harmonischen k -Formen auf M ist endlichdimensional.

b) Es gilt die Hodge-Zerlegung

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \text{im} \left(d \big|_{\Omega^{k-1}(M)} \right) \oplus \text{im} \left(d^* \big|_{\Omega^{k+1}(M)} \right).$$

c) $\mathcal{H}^k(M) \cong H_{\text{dR}}^k(M)$. \times

Beweis. a): Der Raum der harmonischen Formen $\mathcal{H}^k(M)$ entspricht gerade dem Eigenraum von $\Delta \big|_{\Omega^k(M)}$ zum Eigenwert 0. Da Δ elliptisch und M kompakt ist, ist 0 ein Eigenwert endlicher Vielfachheit.

b): Der Laplace-Operator bildet $\Omega^k(M)$ auf sich selbst ab und ist selbstadjungiert, d.h. es gilt

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \text{im} \left(\Delta \big|_{\Omega^k(M)} \right).$$

Für alle weiteren Details siehe [2].

c): Die Abbildung

$$\mathcal{H}^k(M) \rightarrow H_{\text{dR}}^k(M), \quad \omega \mapsto [\omega],$$

ist injektiv. Angenommen $[\omega] = 0$, dann ist ω exakt, d.h. $\omega = d\eta$ für eine $k-1$ -Form η . Außerdem liegt ω im Kern von Δ , d.h. es gilt

$$0 = \|d\omega\|^2 + \|d^*\omega\|^2,$$

also ist ω geschlossen und kogeschlossen. Dann gilt aber auch

$$0 = (d^*\omega, \eta) = (d\eta, d\eta) = \|\eta\|^2,$$

also ist $\omega = 0$. Für die Surjektivität siehe [2]. ■

- 7.38 *Bemerkungen.* A. Jede de-Rham Kohomologiekategorie enthält einen eindeutig bestimmten harmonischen Repräsentanten, nämlich den mit minimaler L^2 -Norm.
- B. Aus den Rechenregeln für das Differential erhalten wir nun unmittelbar für die de-Rham Kohomologie

$$H_{\text{dR}}^0(M) = H_{\text{dR}}^n(M) = \mathbb{R}.$$

- C. Die Betti-Zahlen entsprechen der Dimension des Raums der harmonischen k -Formen

$$b_k(M) = \dim H_{\text{dR}}^k(M) = \dim \mathcal{H}^k(M).$$

Somit ist die Euler-Charakteristik gegeben durch

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k(M) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M). \quad \rightarrow$$

BEISPIEL 39 a.) Die Kohomologie der Sphäre ist in den Graden 0 und n konzentriert

$$b_1(S^n) = b_n(S^n) = 1, \quad b_k(S^n) = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

b.) Auf dem komplex projektiven Raum existiert die sogenannte Kählerform, diese ist gerade und harmonisch und nicht ausgeartet, so dass

$$b_{2k}(\mathbb{C}P^n) = 1, \quad b_{2k+1}(\mathbb{C}P^n) = 0.$$

c.) Sei Σ_g eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht g , dann gilt $b_1 = 2g$.

d.) Die Betti-Zahlen des Torus $T^n = S_1 \times \dots \times S_1$ sind

$$b_k(T^n) = \binom{n}{k}. \quad \blacksquare$$

7.39 **Korollar** Sei (M^n, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$H_{\text{dR}}^k(M) \cong H_{\text{dR}}^{n-k}(M).$$

Insbesondere gilt $b_{n-k}(M) = b_k(M)$. \times

Beweis. Da $*$ mit Δ vertauscht, definiert der Hodge- $*$ -Operator den gewünschten Isomorphismus von $\mathcal{H}^{n-k}(M)$ und $\mathcal{H}^k(M)$. \blacksquare

7.40 *Bemerkung.* Die Schnittform

$$H_{\text{dR}}^k(M) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

ist nicht entartet, denn

$$\int_M \alpha \wedge * \alpha = \int_M g(\alpha, \alpha) dM = \|\alpha\|^2. \quad \rightarrow$$

7-H Die Weizenböck-Formeln

7.41 **Definition** Der Bochner-Laplace-Operator (auch rough Laplacian) ist definiert durch

$$\nabla^* \nabla : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M), \quad \nabla^* \nabla \omega = -\text{tr}(\nabla^2 \omega). \quad \times$$

Wie wir noch sehen werden, unterscheidet sich der Bochner-Laplace-Operator vom gewöhnlichen Laplace-Operator nur durch einen Term nullter Ordnung und auf Funktionen stimmen beide Operatoren überein.

7.42 *Bemerkung.* Seien E und F Vektorbündel, dann ist der Zusammenhang auf $E \otimes F$ gegeben durch

$$\nabla_X^{E \otimes F}(e \otimes f) = (\nabla_X^E e) \otimes f + e \otimes (\nabla_X^F f).$$

Somit ist ∇^2 beschrieben durch

$$\Gamma(\Lambda^k T^* M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^* M \otimes \Lambda^k T^* M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^* M \otimes T^* M \otimes \Lambda^k T^* M).$$

Für eine k -Form ω und Vektorfelder X und Y auf M berechnet man explizit

$$(\nabla^2 \omega)_{XY} = \nabla_X \nabla_Y \omega - \nabla_{\nabla_X Y} \omega.$$

Auf Funktionen (also Nullformen) entspricht ∇^2 also genau der Hessischen. Wählen wir eine lokale Orthonormalbasis $\{e_i\}$, dann schreibt sich

$$\nabla^2 \omega = \sum_{i,j=1}^n e_i^* \otimes e_j^* \otimes \nabla_{e_i e_j}^2 \omega.$$

Durch Kontraktion des Ausdrucks erhalten wir

$$\nabla^* \nabla \omega = -\text{tr}(\nabla^2 \omega) = -\sum_{i,j=1}^n \nabla_{e_i e_j}^2 \omega$$

und daher ist insbesondere $\nabla^* \nabla f = \Delta f$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$. \rightarrow

Wir betrachten für einen Moment die allgemeine Situation eines Vektorbündels E versehen mit einem metrischen Zusammenhang ∇^E , einer Fasermetrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der induzierten L^2 Metrik (\cdot, \cdot) . Die kovariante Ableitung schreibt sich dann als

$$\nabla^E : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^* M \otimes E), \quad e \mapsto \nabla e,$$

und ihr Dual schreibt sich als

$$(\nabla^E)^* : \Gamma(T^* M \otimes E) \rightarrow \Gamma^E, \quad X^* \otimes e \mapsto \nabla^{T^* M \otimes E}(X^* \otimes e).$$

7.43 **Lemma** *a) Die adjungierte kovariante Ableitung ist gegeben durch*

$$(\nabla^E)^* = -\text{tr}(\nabla^{T^* M \otimes E}).$$

b) Für einen Schnitt e in E und eine lokale Orthonormalbasis $\{e_i\}$ in $T_m M$ gilt

$$((\nabla^E)^* \nabla^E e)_m = -\operatorname{tr} \left((\nabla^E)^2 e \right)_m = -\sum_{i=1}^n \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} e - \nabla_{\nabla_{e_i} e} e \right)_m. \quad \times$$

7.44 **Bemerkung.** Die Fasermetrik auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$ berechnet sich für Schnitte e_1, e_2 in E und f_1, f_2 in F zu

$$\langle e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2 \rangle = \langle e_1, f_1 \rangle \langle e_2, f_2 \rangle. \quad \rightarrow$$

BEISPIEL 40 Seien $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ und $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormalbasis von $T_m M$, dann gilt

$$\alpha = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \alpha(e_i), \quad \beta = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \beta(e_i).$$

So gilt dann

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha(e_i), \beta(e_i) \rangle.$$

Seien ω, η zwei k -Formen auf M , dann gilt

$$\langle \nabla \omega, \nabla \eta \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \omega, \nabla_{e_i} \eta \rangle. \quad \blacksquare$$

Beweis des Lemmas. a): Um zu zeigen, dass $(\nabla^E)^* = -\operatorname{tr}(\nabla^{T^*M \otimes E})$ müssen wir zeigen, dass $-\operatorname{tr}(\nabla^{T^*M \otimes E})$ dual zu ∇^E ist.

Seien e und f Schnitte in E und X ein Vektorfeld auf M , dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \nabla^E e, X^* \otimes f \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle e_i^* \otimes \nabla_{e_i}^E e, X^* \otimes f \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle e_i^*, X^* \rangle \langle \nabla_{e_i}^E e, f \rangle \\ &= \langle \nabla_X^E e, f \rangle = X(\langle e, f \rangle) - \langle e, \nabla_X^E f \rangle, \end{aligned}$$

denn der Zusammenhang ist metrisch. Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tr}(\nabla^{T^*M \otimes E} X^* \otimes f) &= \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \nabla_{e_i}^{T^*M \otimes E} (X^* \otimes f) \right) \\
 &= \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes (\nabla_{e_i}^{T^*M} X^*) \otimes f + e_i^* \otimes X^* \otimes (\nabla_{e_i}^E f) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\langle e_i^*, \nabla_{e_i}^{T^*M} X^* \rangle f + \langle e_i^*, X^* \rangle \nabla_{e_i}^E f \right) \\
 &= \operatorname{div}(X) f + \nabla_X^E f.
 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 \langle \nabla^E e, X^* \otimes f \rangle &- \langle e, -\operatorname{tr}(\nabla^{T^*M \otimes E} X^* \otimes f) \rangle \\
 &= \operatorname{div}(X) \langle e, f \rangle + X \langle e, f \rangle \\
 &= \operatorname{div}(\langle e, f \rangle X).
 \end{aligned}$$

Bei Integration über M verschwindet der Divergenzterm aufgrund des Satzes von Gauß-Green. Wir haben damit gezeigt, dass

$$(\nabla^E e, X^* \otimes f) = (e, -\operatorname{tr}(\nabla^{T^*M \otimes E} X^* \otimes f)),$$

d.h. es gilt $(\nabla^E)^* = -\operatorname{tr}(\nabla^{T^*M \otimes E})$.

b): Sei e ein Schnitt und $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormalbasis, die durch Parallelverschiebung fortgesetzt wird, d.h. $(\nabla e_i)_m = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (\nabla^E)^* (\nabla^E e) &= (\nabla^E)^* \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \nabla_{e_i} e_i \right) = -\operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^n \nabla^{T^*M \otimes E} (e_i^* \otimes \nabla_{e_i} e) \right) \\
 &= -\operatorname{tr} \left(\sum_{j,i=1}^n e_j^* \otimes \nabla_{e_j}^{T^*M \otimes E} (e_i^* \otimes \nabla_{e_i} e) \right) \\
 &= -\operatorname{tr} \left(\sum_{j,i=1}^n e_j^* \otimes e_i^* \otimes \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} e \right) \\
 &= -\operatorname{tr}(\nabla^2 e). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

7.45 *Bemerkung.* Der Operator $\nabla^* \nabla$ ist nichtnegativ, denn für eine Form α gilt

$$(\nabla^* \nabla \alpha, \alpha) = (\nabla \alpha, \nabla \alpha) = \|\nabla \alpha\|^2 \geq 0. \quad \dashv$$

Wir wollen nun den Unterschied zwischen Δ und $\nabla^* \nabla$ präzisieren. Formeln dieser Art für Δ heißen Weitzenböck-Formeln.

7.46 **Weitzenböck-Formel I** Auf $\Omega^k(M)$ gilt

$$\Delta = \nabla^* \nabla + q(R),$$

wobei $q(R) \in \text{End}(\Lambda^k T^*M)$ in einer lokalen Orthonormalbasis bestimmt ist durch

$$q(R) := \sum_{i,j=1}^n e_j^* \wedge \left(e_i \lrcorner R_{e_i, e_j}^{\Lambda^k T^*M} \right).$$

Insbesondere gilt für $k = 1$, dass

$$\Delta = \nabla^* \nabla + \text{Ric.} \quad \times$$

7.47 **Bemerkungen.** A. Der Endomorphismus $q(R)$ ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.

B. Man kann den Raum der 2-Formen über einem Vektorraum V mit den schiefsymmetrischen Matrizen identifizieren

$$\Lambda^2 V^* \cong \mathfrak{so}(V).$$

Dann operiert Λ^2 auf Λ^k durch

$$(X^* \wedge Y^*) * \omega := Y^* \wedge X \lrcorner \omega - X^* \wedge Y \lrcorner \omega \in \Omega^k(M),$$

für Vektorfelder X und Y auf M und eine k -Form ω . Bezüglich dieser Wirkung schreibt sich auch

$$q(R) = \sum_{i,j=1}^n (e_i^* \wedge e_j^*) * R(e_i \wedge e_j) * . \quad \circ$$

7.48 **Lemma** a) Für die Sphäre S^n gilt auf $\Omega^k(S^n)$

$$q(R) = k(n-k) \text{Id}_{\Lambda^k T^*S^n}.$$

b) Falls $k = 1$, dann ist $q(R) = \text{Ric.}$ \times

Beweis. b): Sei $\lambda \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$, dann berechnet sich die kovariante Ableitung zu

$$(\nabla_X^{T^*M}\lambda)(Y) = X\lambda(Y) - \lambda(\nabla_X Y),$$

so dass für die Krümmung gilt

$$(R_{XY}^{T^*M}\lambda)(Z) = -\lambda(R_{XY}Z).$$

Somit rechnet man für $q(R)$ nach, dass

$$\begin{aligned} (q(R)\lambda)(X) &= \left(\sum_{i,j=1}^n e_j^* \wedge (e_i \lrcorner (R_{e_i e_j} \lambda)) \right) (X) \\ &= - \left(\sum_{i,j=1}^n e_j^* \wedge \lambda(R_{e_i e_j} e_i) \right) (X) \\ &= - \sum_{i=1}^n \lambda(R_{e_i X} e_i) = \lambda(\text{Ric}(X)) = \text{Ric}(\lambda)(X). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beweis der Weitzenböck-Formel I. Wir wählen in einem Punkt $m \in M$ geodätische Normalkoordinaten, so dass $(\nabla e_i)_m = 0$ gilt. Mit den lokalen Darstellungen von d und d^* erhalten wir,

$$\begin{aligned} d^* d\omega &= d^* \left(\sum_{i=1}^n e_i^* \wedge \nabla_{e_i} \omega \right) = - \sum_{i,j=1}^n e_j \lrcorner \nabla_{e_j} (e_i^* \wedge \nabla_{e_i} \omega) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n e_j \lrcorner (e_i^* \wedge \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \omega) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \omega + \sum_{i,j=1}^n e_i^* \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \omega) \\ &= \nabla^* \nabla \omega + \sum_{i,j=1}^n e_i^* \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \omega). \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\begin{aligned} dd^* \omega &= d \left(- \sum_{j=1}^n e_j \lrcorner \nabla_{e_j} \omega \right) = - \sum_{i,j=1}^n e_i^* \wedge \nabla_{e_i} (e_j \lrcorner \nabla_{e_j} \omega) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n e_i^* \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega). \end{aligned}$$

Addieren dieser Terme ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= d^*d\omega + dd^*\omega \\ &= \nabla^*\nabla\omega + \sum_{i,j=1}^n e_i^* \wedge \left(e_j \lrcorner \left(\nabla_{e_j} \nabla_{e_i} \omega - \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \omega \right) \right) \\ &= \nabla^*\nabla\omega + \sum_{i,j=1}^n e_i^* \wedge \left(e_j \lrcorner R_{e_j e_i} \omega \right). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Informationen über die Krümmung übersetzen sich mit den Weitzenböck-Formeln in Informationen über den Kern des Laplace Operators, durch den z.B. die Betti-zahlen beschrieben werden. Diese Formeln stellen somit eine Verbindung zwischen Topologie und Geometrie her.

7.49 **Korollar** Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativer Ricci-Krümmung, d.h. $(\text{Ric}(X), X) \geq 0$ für alle Vektorfelder X auf M . Dann sind alle harmonischen 1-Formen parallel, genauer gilt für solch eine Form ω ,

$$\nabla\omega = 0, \quad \text{und} \quad (\text{Ric}(\omega), \omega) = 0. \quad \times$$

Beweis. Sei ω eine harmonische 1-Form, dann gilt nach der Weitzenböckformel I,

$$0 = \Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + \text{Ric}(\omega).$$

Da M kompakt ist, ist ω integrabel und wir erhalten durch Integration

$$0 = (\nabla^*\nabla\omega + \text{Ric}(\omega), \omega) = \|\nabla\omega\|^2 + (\text{Ric}(\omega), \omega).$$

Die beiden Summanden auf der rechten Seite sind nichtnegativ, folglich sind beide Null. Insbesondere ist $\nabla\omega = 0$ und ω parallel. \blacksquare

7.50 *Bemerkung.* Solche Beweise bezeichnet man als "Anwendung der Bochner Methode". \rightarrow

7.51 **Korollar** Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- a) Gilt in einem Punkt $\text{Ric} > 0$, so verschwindet die erste de-Rham Kohomologie, d.h. $b_1(M) = 0$.

b) Die Dimension der ersten de-Rham Kohomologie ist durch die der Mannigfaltigkeit beschränkt, d.h.

$$b_1(M) \leq \dim M,$$

wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn g flach ist. \times

Beweis. a): Nach vorigem Korollar gilt $(\text{Ric}(\omega), \omega) = 0$ für jede harmonische 1-Form. Die Ricci-Krümmung ist jedoch nach Voraussetzung in mindestens einem Punkt strikt positiv. Daher kann es keine nichttriviale harmonische 1-Form geben und folglich ist $b_1(M) = \dim \mathcal{H}^1(M) = 0$.

b): Auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit kann es höchstens n linear unabhängige parallele 1-Formen geben, denn diese trivialisieren das Bündel $\Lambda^1 TM$ lokal.

Gilt Gleichheit, so existieren n linear unabhängige, parallele Vektorfelder E_1, \dots, E_n . Auf diesen verschwindet der Krümmungstensor an jedem Punkt, d.h.

$$R_{E_i, E_j} E_k = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Also ist g flach. ■

Eine Verschärfung dieses Resultats liefert der folgende

7.52 **Satz von Myers** Sei (M, g) eine kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\text{Ric} \geq \kappa > 0$. Dann ist die Fundamentalgruppe von M endlich und daher insbesondere die erste de-Rham Kohomologie trivial. \times

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen der kovarianten Ableitung und dem Differential und dem Kodifferential genauer untersuchen. Dazu benötigen wir noch folgendes Ergebnis aus der linearen Algebra.

7.53 **Lemma** Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt

$$V^* \otimes \Lambda^k V^* \cong \Lambda^{k+1} V^* \oplus \Lambda^{k-1} V^* \oplus \Lambda^{k,1} V^*,$$

wobei für die Abbildungen

$$\text{pr}_{k+1} : V^* \otimes \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k+1} V^*,$$

$$i_{k+1} : \Lambda^{k+1} V^* \rightarrow V^* \otimes \Lambda^k V^*,$$

$$X^* \otimes \omega \mapsto X \wedge \omega,$$

$$\alpha \mapsto \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge (e_i \lrcorner \alpha),$$

gilt $\text{pr}_{k+1} \circ i_{k+1} = \text{Id}_{\Lambda^{k+1}}$, und $i_{k+1} \circ \text{pr}_{k+1}$ ist die Projektion auf $i_{k+1}(\Lambda^{k+1}V^*) \subset V^* \otimes \Lambda^k V^*$. Weiterhin erfüllen die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{pr}_{k-1} : V^* \otimes \Lambda^k V^* &\rightarrow \Lambda^{k-1} V^*, & X^* \otimes \omega &\mapsto X \lrcorner \omega, \\ i_{k-1} : \Lambda^{k-1} V^* &\rightarrow V^* \otimes \Lambda^k V^*, & \alpha &\mapsto \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes (e_i^* \wedge \alpha) \end{aligned}$$

die Relation $\text{pr}_{k-1} \circ i_{k-1} = \text{Id}_{\Lambda^{k-1}}$. Schließlich ist der Raum $\Lambda^{k,1}V^*$ gegeben durch

$$\Lambda^{k,1}V^* = \ker(\text{pr}_{k-1} \cap \text{pr}_{k+1}) \subset V^* \otimes \Lambda^k V^*,$$

und seine Projektion $\text{pr}_{k,1} : V^* \otimes \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k,1}V^*$ ist definiert durch

$$\text{pr}_{k,1}(X^* \otimes \omega)\nu = X^*(\nu)\omega - \frac{1}{k+1}\nu \lrcorner (X^* \wedge \omega) - \frac{1}{n-k+1}\nu^* \wedge (X^* \lrcorner \omega). \quad \times$$

Wir wollen dies nun auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Hier erhalten wir folgende orthogonale Aufspaltung

$$T^*M \otimes \Lambda^k T^*M \cong \Lambda^{k+1}T^*M \oplus \Lambda^{k-1}T^*M \oplus \Lambda^{k,1}T^*M,$$

die vom Levi-Civita-Zusammenhang erhalten wird. Man nennt $\Lambda^{k,1}T^*M$ auch den Cartan-Summanden. Für eine k -Form ω schreibt sich ihre kovariante Ableitung als

$$\nabla \omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes \nabla_{e_i} \omega,$$

während Differential und Kodifferential gegeben sind durch

$$d\omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge \nabla_{e_i} \omega, \quad d^* \omega = - \sum_{i=1}^n e_i \lrcorner \nabla_{e_i} \omega.$$

Wenden wir obige Projektionsabbildungen an, erhalten wir unmittelbar folgendes Ergebnis.

7.54 **Lemma** Sei ω eine k -Form auf M . Dann gelten

- a) $d\omega = \text{pr}_{k+1}(\nabla \omega)$, und
- b) $d^* \omega = -\text{pr}_{k-1}(\nabla \omega)$. \times

Die Projektion der kovarianten Ableitung auf den Cartan-Summanden $\Lambda^{k,1}T^*M$ hat ebenfalls einen Namen.

7.55 **Definition** Der *Twistor-Operator* ist definiert durch

$$P := \text{pr}_{k,1} \circ \nabla : \Omega^k(M) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^k T^*M),$$

d.h. für ein Vektorfeld X auf M und eine k -Form ω gilt

$$(P\omega)(X) = \nabla_X \omega - \frac{1}{k+1} X \lrcorner d\omega + \frac{1}{n-k+1} X^* \wedge d^* \omega. \quad \times$$

7.56 **Lemma** Sei X ein Vektorfeld auf M .

- a) Es gilt $PX^* = 0$ genau dann, wenn X ein konformes Vektorfeld ist, d.h. wenn $L_X g = f \cdot g$ mit einer glatten Funktion f gilt.
- b) Es gilt $PX^* = 0$ und $d^* X^* = 0$ genau dann, wenn X ein Killing-Vektorfeld auf M ist, d.h. wenn $L_X g = 0$ gilt. \times

Beweis. Wir schreiben $\omega = X^*$, dann gilt $P\omega = 0$ genau dann, wenn für jedes Vektorfeld Y, Z auf M gilt,

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_Y \omega)(Z) - \frac{1}{2} d\omega(Y, Z) + \frac{1}{n} Y^*(Z) \cdot d^* \omega \\ &= (\nabla_Y \omega)(Z) - \frac{1}{2} ((\nabla_Y \omega)(Z) - (\nabla_Z \omega)(Y)) + \frac{1}{n} g(Y, Z) \cdot d^* \omega \\ &= \frac{1}{2} ((\nabla_Y \omega)(Z) + (\nabla_Z \omega)(Y)) + \frac{1}{n} g(Y, Z) \cdot d^* \omega \\ &= \frac{1}{2} (L_X)g(Y, Z) + \frac{1}{n} g(Y, Z) \cdot d^* \omega. \end{aligned}$$

Also gilt $PX^* = 0$ genau dann, wenn

$$L_X g = -\frac{2}{n} d^* X^* \cdot g.$$

Somit folgen a) und b). \blacksquare

7.57 **Weitzenböck Formel II** Sei ω eine k -Form auf M . Dann gelten die Formeln

- a) $\frac{1}{k+1} d^* d\omega + \frac{1}{n-k+1} dd^* \omega + P^* P\omega = \nabla^* \nabla \omega,$
- b) $\frac{k}{k+1} d^* d\omega + \frac{n-k}{n-k+1} dd^* \omega - P^* P\omega = q(R)\omega. \quad \times$

Offenbar ergeben a) und b) aufaddiert wiederum $\Delta \omega = \nabla^* \nabla \omega + q(R)\omega$. Für 1-Formen erhalten wir unmittelbar das folgende Resultat.

7.58 **Korollar** Sei ω eine 1-Form auf M . So gilt

$$\frac{1}{2}d^*d\omega + \frac{n-1}{n}dd^*\omega - P^*P\omega = \text{Ric}(\omega). \quad \times$$

7.59 **Satz von Lichnerowicz-Obata** Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric} \geq \kappa g$ für ein $\kappa > 0$. Dann gilt für den ersten von Null verschiedenen Eigenwert λ_1 des Laplace-Operators auf Funktionen, dass

$$\lambda_1 \geq \frac{n}{n-1}\kappa,$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn (M, g) isometrisch zur Standardsphäre ist. \times

Beweis. Sei λ_1 der erste positive Eigenwert, also $\Delta f = \lambda_1 f$ mit einer nichtkonstanten Funktion f , d.h. $df \neq 0$. Dann gilt nach der Weitzenböck Formel II, dass

$$\frac{1}{2}d^*ddf + \frac{n-1}{n}dd^*df = \frac{n-1}{n}\Delta df = \text{Ric}(df) + P^*P(df).$$

Durch Integration dieser Gleichung und Verwendung von $\text{Ric} \geq \kappa$ und $P^*P \geq 0$, erhalten wir

$$\frac{n}{n-1}\kappa(df, df) \leq (\Delta df, df) = (d\Delta f, df) = \lambda_1(df, df).$$

Folglich ist $\lambda_1 \geq n/(n-1)\kappa$. ■

7-1 Charakterisierung von Killing Vektorfeldern

Sei (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Vektorfeld X auf M heißt Killing, wenn $L_X g = 0$ gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass der lokale Fluss von X aus Isometrien von g besteht.

7.60 **Definition** Die *Isometriegruppe* von M ist definiert durch

$$\text{Iso}(M, g) := \{f : M \rightarrow M : f \text{ ist ein Diffeomorphismus mit } f^*g = g\}. \quad \times$$

7.61 **Satz** Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten.

a) Die Isometriegruppe ist eine endlichdimensionale Lie-Gruppe, genauer gilt

$$\dim \text{Iso}(M, g) \leq \frac{1}{2}n(n+1) - \dim \text{Iso}(S^n, g_0).$$

b) Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, so auch $\text{Iso}(M, g)$.

c) Ist M vollständig, so ist die Lie-Algebra von $\text{Iso}(M, g)$ genau die Lie-Algebra der Killing-Vektorfelder auf M . \times

Die Killing-Vektorfelder kodieren also Informationen über die Isometriegruppe. Je mehr man über die Killing-Vektorfelder weiß, desto mehr kann man über die Isometriegruppe aussagen. Die Killing-Vektorfelder sind daher wichtige und häufig untersuchte Objekte der Differentialgeometrie.

7.62 **Korollar** Sei X ein Killing-Vektorfeld auf M . Dann gelten

a) $\Delta X^* = 2\text{Ric}(X^*)$, und

b) $d^*X^* = 0$. \times

Ist die Mannigfaltigkeit M kompakt, so charakterisieren die Eigenschaften a) und b) die Killing-Vektorfelder. \times

Beweis. Nach Lemma 7.56 ist ein Vektorfeld X genau dann Killing, wenn $PX^* = 0$ und $d^*X^* = 0$ gilt. Sei X Killing, also $PX^* = 0$, dann folgt mit der Weitzenböck Formel II, dass

$$\frac{1}{2}\Delta X^* = \frac{1}{2}d^*dX^* = \text{Ric}(X^*).$$

Umgekehrt sei nun $\Delta X^* = 2\text{Ric}(X^*)$ und $d^*X^* = 0$. Dann gilt $\Delta X^* = d^*dX^*$ und es folgt

$$P^*P(X^*) = \frac{1}{2}\Delta X^* - \text{Ric}(X^*) = 0.$$

Integration liefert nun $(PX^*, PX^*) = 0$ und daher ist X ein Killing Vektorfeld. \blacksquare

7.63 **Korollar** Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit.

a) Trägt M in einem Punkt strikt negative Ricci-Krümmung, so ist die Isometriegruppe endlich.

b) Gilt $\text{Ric} \leq 0$, so sind alle Killing Vektorfelder parallel und $I(M, g)_o$ ist ein Torus.

c) Gilt $\text{Ric} \equiv 0$, so ist $\dim I(M, g) = b_1(M)$. \times

Beweis. a): Für Killing Vektorfelder gilt $\Delta X^* = 2\text{Ric}(X^*)$. Da Δ ein positiver Operator ist, aber $\text{Ric} < 0$ in einem Punkt gilt, kann es keine nichttrivialen Killing Vektorfelder geben. Also ist $\text{Lie}(I(M, g)) = (0)$ und daher ist $I(M, g)$ diskret und kompakt, also endlich.

b): Sei X ein Killing-Vektorfeld. So gilt

$$2\text{Ric}(X^*) = \Delta X^* = \nabla^* \nabla X^* + \text{Ric}(X^*),$$

d.h. $\nabla^* \nabla X^* = \text{Ric}(X^*)$. Integration liefert nun

$$\|\nabla X^*\|^2 = (\text{Ric}(X^*), X^*) \leq 0,$$

also gilt $\nabla X^* = 0$ und X ist parallel.

Da Killing-Vektorfelder parallel sind, kommutieren diese, denn

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

Somit ist die Lie-Algebra der Killing-Vektorfelder abelsch und folglich $\text{Lie}(I(M, g)_o)$ eine abelsche, zusammenhängende, kompakte Gruppe. Eine solche Gruppe nennt man Torus.

c): Da die Ricci-Krümmung identisch verschwindet, ist ein Vektorfeld genau dann Killing, wenn

$$\Delta X^* = 2\text{Ric}(X^*) = 0$$

gilt. Somit gilt

$$b_1(M) = \dim \mathcal{H}^1(M) = \dim \text{Lie}(I(M, g)) = \dim I(M, g). \blacksquare$$

Index

- λ -Reduktion, 26
- Übergangsfunktion, 5
- EE-Satz, 86
- 1-Form
 - kanonische, 77
- Bündelmetrik, 24
- Basis, 5
- Bianchi Identität, 66
- Chern-Klasse, 69
- Differential, 60
 - absolutes, 56
- Differentialform
 - horizontal, 54
 - in Vektorbündeln, 53
 - vom Typ ρ , 54
- Distribution, 33, 73
 - integral, 73
 - involutiv, 73
- Divergenz, 175
- Energiefunktional, 110
- Euler-Klasse, 167
- Exponentialabbildung, 113
- Faser, 5
 - typ, 5
- Faserbündel
 - assoziertes, 15
- Faserung, 5
 - isomorph, 6
 - lokal-triviale, 5
 - trivial, 6
- Geodätische, 108
 - radiale, 115
- Geradenbündel, 19
- Gradient, 174
- Hauptfaserbündel
 - isomorph, 10
 - trivial, 10
- Hauptfaserbündel (HFB), 8
- Hessische, 178
- Hintereinanderausführung
 - von Kurven, 88
- Hodge-*-Operator, 173
- Holonomiegruppe, 125
 - in Vektorbündeln, 126
- horizontaler Lift
 - von Kurven, 85
 - von Vektorfeldern, 81
- Injektivitätsradius, 116
- Inverse

- von Kurven, 88
- Kodifferential, 177
- Kommutator
 - g -wertiger Formen, 63
- kovariante Ableitung, 55
 - induzierte, 61
- Kozyklen-Bedingung, 6
- Krümmung
 - eines Zusammenhangs, 63
- Krümmungsform
 - lokale, 72
- Laplace-Operator, 179
 - Hodge-, 190
- lokale Trivialität, 5
- Mannigfaltigkeit
 - irreduzibel, 142
- Maurer-Cartan-Form, 40
- Maximaler Torus, 149
- normale Umgebung, 115
- Normalkoordinaten, 118
- Parallelverschiebung
 - im Hauptfaserbündel, 88
 - im Tangentialbündel, 102
 - im Vektorbündel, 95
- Polynom
 - invariantes, 149
- Pontrjagin-Klasse, 165
- Produktformel für Kurven, 44
- Projektion, 5
- Pullback-Bündel, 7
- Rahmenbündel, 7, 10
- Satz
 - von Gauß-Green, 176
- Schnitt
 - glatter, 8
 - lokaler, 8
 - paralleler, 105
- Strukturgleichung, 64
- Tangentialbündel
 - horizontales, 36
 - vertikales, 35
- Tangentialraum
 - horizontaler, 36
 - vertikaler, 34
- Torsionsform, 78
- Totalraum, 5
- Unterbündel
 - ∇^E -invariant, 105
- Vektorbündel, 18
 - Homomorphismus, 19
 - duales, 23
 - Homomorphismenbündel, 23
 - isomorph, 19
 - Tensorprodukt, 23
 - trivial, 20
 - Whitney-Summe, 23
- Vektorfeld
 - entlang einer Kurve, 98
 - fundamentales, 34
 - parallel, 101
- Wegeraum, 110
- Weyl-Gruppe, 149
- Zusammenhang, 36
 - flach, 74
 - kanonischer flacher, 39

Zusammenhangsform, 37

lokale, 44

Literaturverzeichnis

- [1] Helga Baum. *Eichfeldtheorie: Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln (Springer-Lehrbuch Masterclass) (German Edition)*. Springer, 1 edition, March 2009.
- [2] Georges de Rham and S S Chern. *Differentiable Manifolds: Forms, Currents, Harmonic Forms (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 1 edition, September 1984.