Fachbereich Mathematik
Institut für Geometrie und Topologie
Prof. U. Semmelmann

Riemannsche Geometrie
Übungsblatt 2

1. Bestimmen Sie die Geodätischen bzgl. der Standardmetrik auf der Sphäre S^n. Zeigen Sie, dass die Geodätischen auf einer kompakten Lie-Gruppe mit bi-invarianter Metrik genau die 1-parametrigen Unterergruppen sind. Folgern Sie, dass die Exponentialabbildung von Lie-Gruppen mit der von Riemannschen Mannigfaltigkeiten übereinstimmt.

2. Sei (M^n, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Finden Sie auf der $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit TM ein Vektorfeld, dessen Integralkurven genau die Geodätischen der Metrik g sind.

3. Zeigen Sie, dass Isometrien Geodätische in Geodätische überführen.

4. Sei $\gamma : I \to M$ eine Geodätische. Zeigen Sie: eine Umparametrisierung $\gamma \circ h : J \to M$ ist genau dann eine Geodätische, wenn $h(t) = at + b$ gilt.

5. Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Beweisen Sie, dass je zwei Punkte durch eine (gebrochene) Geodätische verbunden werden können.