Fachbereich Mathematik
Institut für Geometrie und Topologie
Prof. U. Semmelmann

Riemannsche Geometrie
Übungsblatt 1

1. Sei E ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M, mit einer kovarianten Ableitung ∇. Sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine Kurve in M mit $x = \gamma(a)$ und $y = \gamma(b)$. Bezeichne $P_\gamma^\nabla : E_x \to E_y$, die durch ∇ definierte Parallelverschiebung entlang γ (siehe Vorlesung vom 27.Juni). Zeigen Sie: Ist $E = P \times_\rho V$ ein assoziiertes Vektorbündel und ist die kovariante Ableitung ∇ induziert von einem Zusammenhang auf P, dann stimmen die durch A und ∇ definierten Parallelverschiebungen überein, d.h.

$$P_\gamma^\nabla \;=\; P_\gamma^A \;.$$

2. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $\pi : P \to M$ ein G-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang A. Weiter sei B eine nicht-ausgeartete, Ad-invariante symmetrische Bilinearform auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G (z.B. die Killingform für kompakte Lie-Gruppen G). Beweisen Sie:

1. $h \;:=\; \pi^* g \,+\, B(A(\cdot), A(\cdot))$ ist eine Riemannsche Metrik auf P.
2. Die Rechtstranslationen $R_a : P \to P, a \in G$, sind Isometrien bzgl. der Metrik h auf P.
3. Die fundamentalen Vektorfelder der G-Wirkung auf P sind Killing-Vektorfelder für die Metrik h.

3. Sei P das Rahmenbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M und sei A der Zusammenhang auf P, der den Levi-Civita-Zusammenhang auf M induziert. Beweisen Sie, dass dann die Bianchi-Identität auf P genau der zweiten Bianchi-Identität auf M entspricht.