Kähler-Mfk

1. Vorlesung
~~[illegible]~~
15.10.2019

1 Vorbemerkungen

Definition: Eine Kähler-Mfk. ist eine Riemannsche Mfk. (M^n, g) mit einer 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$ und ein Endomorphismus $J \in \operatorname{End} TM$ mit:

algebraische Bedingungen

(i) J ist eine fast-komplexe Struktur: $J^2 = -\mathrm{Id}$

(ii) Die Metrik ist fast-hermitesch bzgl. J, dh

$$g(X,Y) = g(JX, JY)$$

(iii) $\omega(X,Y) = g(JX, Y)$

g: Kähler Metrik

ω: Kähler-Form
fund. 2-Form

analytische Bedingungen

(iv) ω ist geschlossen: $d\omega = 0$

(v) J ist integrabel, dh. es existieren komplexe Koordinaten

Bemerkung:
- M ist automatisch orientiert und $n \equiv 0 \ (2)$
- (g, J) definieren ω, (g, ω) definieren J

Beispiele:
- $(\mathbb{C}^m, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\quad \langle u, v \rangle := u \cdot \bar{v} = \operatorname{Re} \sum_i dz_i \otimes d\bar{z}_i$
- orientierte Flächen
- $(\mathbb{C}P^m, g_{FS})$ $\quad g_{FS}$: Fubini-Study-Metrik
- projektive Mfk.: Untermfk. in $\mathbb{C}P^m$ definiert durch homogene Polynome auf $\mathbb{C}^{m+1}$

  zB $F_k := \{ x_0^k + \dots + x_m^k = 0 \}$

- LA von $\mathbb{C}$-VR ↗ Daniel ↗ Wells

<u>Bemerkung</u>: • bemerkenswerte Eigenschaften von Kähler-Metriken:

h sei hermitesche Metrik auf einer komplexen Mfk.

in lokalen Koordinaten schreibt sich die fundamentale 2-Form ω als:

$$\omega = i \sum h_{\alpha\bar\beta} \, dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta$$

mit $h_{\alpha\bar\beta} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta}\right)$

(Kähler 1933) $d\omega = 0 \iff \exists$ (lokal) Funktion u mit

$$h_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}$$

äquivalente Charakterisierungen von Kähler

d.h. die Metrik ist im Kähler-Fall vollständig durch eine Funktion festgelegt, (u eindeutig lokal)

Bezeichnung: u ist das <u>Kähler-Potential</u> (lokales)

• es existieren holomorphe Normalkoordinaten

• spezielle Krümmungseigenschaften

im Wesentlichen (ausser spez. Geometrien in Dimension 7 + 8) die einzigen kompakten, irreduziblen, Lösungen der Einstein-Gleichung

$$\mathrm{Ric} = 0 \qquad (\text{Ricci-flach})$$

sind auf Kähler-Mfk. konstruiert

Calabi-Yau-Metriken

aber: keine expliziten Metriken nur Existenzresultat

Lösung einer Monge-Ampère-Gleichung

<u>Notation</u>: $\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)$ $\qquad dz_\alpha = dx_\alpha + i\, dy_\alpha$

2 Holomorphe Funktionen

Bezeichnung: $F = f + ig : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heisst holomorph

$$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann DGL

$j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abb. die der Multiplikation mit i auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ entspricht

$$\underset{x+iy}{\overset{\|}{z}} \mapsto (x,y)$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad p \in \mathbb{R}^2,$

$$(F_*)_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(p) & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

Differential von F in p
Jacobi-Matrix

Lemma: F holomorph $\Leftrightarrow j \circ F_* = F_* \circ j$ in p $\forall p \in U$

dh F_* ist $\mathbb{C}$-linear

Übertragung auf $\mathbb{C}^m$: $\mathbb{C}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{2m}$

$$(z_1, \dots, z_m) = (x_1+iy_1, \dots, x_m+iy_m) \mapsto (x_1 \dots x_m, y_1, \dots y_m)$$

$j_m : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ lineare Abb., die der (komponentenweise) Multiplikation mit i auf $\mathbb{C}^m$ entspricht

$$j_m = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

$F : U \subset \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ holomorph $\Leftrightarrow j_m \circ (F_*)_p = (F_*)_p \circ j_m$

F_* = Differential von F als reelle Abb.

3 Komplexe Mfk.

Definition: Eine <u>komplexe Mfk.</u> ist eine topologische Mfk. $(M, \mathcal{U})$ mit einem Atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ mit

- $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^m$ — m: komplexe Dimension
- $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ holomorph

$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ definiert eine holomorphe Struktur auf M

Beispiel: <u>komplexer projektiver Raum</u> $\mathbb{C}P^m$

$$\mathbb{C}P^m = 1\text{-dim. komplexen UR in } \mathbb{C}^{m+1}$$

$$= (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})/_\sim \qquad (z_0, \dots, z_m) \sim (c \cdot z_0, \dots, c z_m) \quad c \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$$

homogene komplexe Koordinaten.

$[z_0 : \dots : z_m]$ = Äquivalenzklasse von $(z_0, \dots, z_m)$

$$U_i := \{ [z_0 : \dots : z_m] \mid z_i \neq 0 \} \subset \mathbb{C}P^m$$

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

$$\varphi_i([z_0 : \dots : z_m]) = \left(\frac{z_0}{z_i} \cdots \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i} \cdots, \frac{z_m}{z_i} \right)$$

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} (w_1, \dots, w_m)$$

$$= \left(\frac{w_1}{w_i} \cdots \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i} \cdots \frac{w_j}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i} \cdots \frac{w_m}{w_i} \right)$$

holomorph auf dem Definitionsbereich

$$\mathbb{C}P^1 \cong S^2$$

$$\varphi_j^{-1}(w_1, \dots, w_m) = [w_1 : \dots : \underset{j\text{te}}{1} : \dots : w_m]$$

Definition: $F: M \to \mathbb{C}$ heisst holomorph falls $F \circ \phi_U^{-1}$ holomorph für alle U in einem holomorphen Atlas $\mathcal{U}$

Bemerkung: • Die Eigenschaft ist lokal, gilt es für ein U mit $p \in U$ dann für alle $V \in \mathcal{U}$ mit $p \in V$

• holomorphe Abb zwischen offenen Mengen in $\mathbb{C}^m$ sind glatt als reelle Abb zwischen $\mathbb{R}^{2m}$

$\Rightarrow$ eine komplexe Mfk. M ist auch eine (reelle) diff.bare Mfk. der Dimension $2m$, man schreibt: $M_{\mathbb{R}}$

Die Umkehrung gilt nicht, glatte Abb. sind nicht unbedingt holomorph. Für Mfk. gilt es ein einfaches Kriterium

Sei M eine komplexe Mfk., man definiert

$$J_U(X) := (\phi_U)_*^{-1} \circ J_m \circ (\phi_U)_* (X) \quad , \quad X \in T_x M_{\mathbb{R}}$$

Sei $V \in \mathcal{U}$ mit $x \in V$, $\phi_{VU} := \phi_V \circ \phi_U^{-1}$ holomorph

$$\begin{aligned} J_V(X) &= (\phi_V)_*^{-1} \circ J_m \circ (\phi_V)_* (X) \\ &= (\phi_V)_*^{-1} \circ J_m \circ (\phi_{VU})_* \circ (\phi_U)_* (X) \\ &= (\phi_V)_*^{-1} \circ (\phi_{VU})_* \, J_m \circ (\phi_U)_* (X) \qquad \text{da holomorph} \\ &= (\phi_U)_*^{-1} \, J_m \, (\phi_U)_* (X) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ J_U ist unabhängig von U und definiert einen Endomorphismus J von $TM_{\mathbb{R}}$ mit $J^2 = -\mathrm{Id}$

Definition: Ein $(1,1)$-Tensor J auf einer diff.baren (reellen) Mfk. M mit $J^2 = -\mathrm{Id}$ heisst fast-komplexe Struktur.

Das Paar (M, J) nennt man fast-komplexe Mfk.

zB S^6

Bemerkung: • jede komplexe Mfk. ist auch fast-komplex

• Die Umkehrung gilt, falls eine gewisse Integrabilitäts-Bedingung erfüllt ist