④ Das komplexifizierte Tangentialbündel

Einschub: lineare Algebra

Man betrachtet $TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \dot{\bigcup}_{x \in M} T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$

reelle Endomorphismen (z.B. J) und Differentialoperatoren (z.B. d) werden $\mathbb{C}$-linear von TM auf $TM^{\mathbb{C}}$ fort-gesetzt

$T^{10}M :=$ J-Eigenbündel zum Eigenwert i

$T^{01}M :=$ " — " $-i$

$J^2 = -\mathrm{Id}$
GEW $\pm i$

Lemma:
- $T^{10}M = \{X - iJX \mid X \in TM\}$
- $T^{01}M = \{X + iJX \mid X \in TM\}$
- $TM^{\mathbb{C}} := T^{10}M \oplus T^{01}M$

Theorem (Newlander-Nirenberg)

Sei (M, J) eine fast-komplexe Mfk. Die fast-komplexe Struktur J kommt von einer holomorphen Struktur genau dann, wenn die Distribution $T^{01}M$ integrabel ist, d.h. $Z_1, Z_2 \in T^{01}M$ $\Rightarrow [Z_1, Z_2] \in T^{01}M$

Beweis: (eine Richtung): holomorphe Struktur $\Rightarrow$ T^{01} integrabel

Vor: J definiert durch holomorphe Struktur $\mathcal{U} = \{(U, \varphi_U)\}$

$(U, \varphi_U) \in \mathcal{U}$, $z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$ mit $\varphi_U(p) = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$
$\updownarrow$ $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)$

$\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ kanonische Basis von $\mathbb{R}^{2m}$

$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} := (\varphi_U)^{-1}_*(e_\alpha)$, $\frac{\partial}{\partial y_\alpha} := (\varphi_U)^{-1}_*(e_{m+\alpha})$ $\alpha = 1, \dots, m$

$j_m(e_\alpha) = e_{m+\alpha}$

$\Rightarrow J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$ $(*)$!

Notation: $\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)$

lokale Schnitte von $T^{10}M$ — lokale Schnitte von $T^{01}M$

lokale Basis über U

Bem: Das ist eine Art von Frobenius-Satz im Komplexen

(T, J, g) sei ein hermitescher VR

$T \cong \mathbb{R}^{2m}$, $J^2 = -\mathrm{Id}$, $g(JX, JY) = g(X, Y)$

$e_1, \dots, e_{2m}$ (ONB) mit $J e_{2k-1} = e_{2k}$

ONB ist nicht nötig!

zB $T = T_x M$, $J = J_x$, $g = g_x$ für eine fast-hermitesche Mfk. (M, g, J)

~~$T^{10} := ER_J(i) = \mathrm{span}\{X - iJX \mid X \in T\}$~~

J, g werden $\mathbb{C}$-linear bzw $\mathbb{C}$ bilinear auf $T^{\mathbb{C}} = T \otimes \mathbb{C}$ fortgesetzt

$T^{\mathbb{C}} = T^{10} \oplus T^{01}$ mit $\overline{T^{10}} = T^{01}$ ($\mathbb{C}$-VR)

$T^{10} := ER_J(i) = \mathrm{span}\{X - iJX \mid X \in T\}$

$= \mathrm{span}\{e_{2k-1} - i e_{2k}\}$ =

$T^{01} := ER_J(-i) = \mathrm{span}\{X + iJX \mid X \in T\}$

$= \mathrm{span}\{e_{2k-1} + i e_{2k}\}$

man definiert: $f_k = \frac{1}{2}(e_{2k-1} - i e_{2k})$

$\overline{f_k} = \frac{1}{2}(e_{2k-1} + i e_{2k})$

d.h. $T^{10} = \mathrm{span}\{f_k\}$

$T^{01} = \mathrm{span}\{\overline{f_k}\}$

<u>komplexe Koordinaten</u>

~~$(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$ $J \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$~~

$(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m)$ mit $J \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i}$
$e_1 \qquad\qquad e_{2m}$

$z_k := x_k + i y_k$

$f_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i \frac{\partial}{\partial y_k}\right)$

Z, W seien lokale Schnitte von $T^{01}M$

$$Z = \sum Z_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \quad , \quad W = \sum W_\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}$$

$$\Rightarrow [Z,W] = \sum_{\alpha,\beta} Z_\alpha \frac{\partial W_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} - \sum W_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}$$

$\Rightarrow [Z,W]$ ist ein lokaler Schnitt in $T^{01}M$, d.h. $T^{01}M$ ist integrabel

<u>**Bemerkung**</u>: Der entscheidende Punkt im Beweis ist die Existenz von lokalen Koordinaten mit (*)

Seien (u_α, v_α) weitere Koordinaten mit $J\left(\frac{\partial}{\partial u_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial v_\alpha}$, dann ist der Kartenwechsel holomorph

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\beta} + \sum \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_\beta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\beta} + \sum \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial v_\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = J \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial v_\beta} - \sum \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha} = - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} \quad , \quad \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial v_\beta}{\partial y_\alpha}$$

d.h. die Übergangsfunktionen sind holomorph (ÜA!)

<u>**Bemerkung**</u> $T^{01}M$ ist integrabel $\Leftrightarrow [X+iJX, Y+iJY] \in \Gamma(T^{01}M)$

$$\Leftrightarrow J([X+iJX, Y+iJY]) = -i[X+iJX, Y+iJY]$$

$$\Leftrightarrow J([X,Y] - [JX,JY] + i[X,JY] + i[JX,Y])$$

$$= -i([X,Y] - [JX,JY] + i[X,JY] + i[JX,Y])$$

$$\Leftrightarrow J[X,Y] - J[JX,JY] = [X,JY] + [JX,Y]$$

$$J[X,JY] + J[JX,Y] = -[X,Y] + [JX,JY]$$

$$\Leftrightarrow N_J(X,Y) := [X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY] = 0$$

Nijenhuis-Tensor

<u>**Folgerung**</u>: Eine fast-komplexe Mfk. (M,J) ist genau dann komplex, wenn

$$N_J \equiv 0$$

Holomorphe Formen und Vektorfelder

1 Formenzerlegung

lineare Algebra → !

Sei (M, J) eine komplexe Mfk.

komplexifiziertes Formenbündel: $\Lambda^*_{\mathbb{C}} T^*M = \Lambda^* T^*M \otimes \mathbb{C}$

$$\sigma \in \Gamma(\Lambda^*_{\mathbb{C}} T^*M) \to \sigma = \alpha + i\beta \quad , \quad \alpha, \beta \in \Gamma(\Lambda^* T^*M) = \Omega^*(M)$$

$$\Lambda^{10} T^*M := \{ \lambda \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*M \mid \lambda(Z) = 0 \, , \forall Z \in T^{01}M \}$$

$$\Lambda^{01} T^*M := \{ \lambda \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*M \mid \lambda(Z) = 0 , \ \forall Z \in T^{10}M \}$$

Bezeichnung: $(1,0)$-Formen bzw. $(0,1)$-Formen, oder auch Formen vom Typ $(1,0)$ bzw. vom Typ $(0,1)$

Lemma:

$$\Lambda^{10} T^*M = \{ \omega - i\omega \circ J \mid \omega \in T^*M \}$$

$$\Lambda^{01} T^*M = \{ \omega + i\omega \circ J \mid \omega \in T^*M \}$$

$$\Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*M = \Lambda^{10} T^*M \oplus \Lambda^{01} T^*M$$

$(\lambda \leftrightarrow \omega)$

Bemerkung: Sei $\lambda \in T^*M$ dann definiert man $J\lambda \in T^*M$ durch $(J\lambda)(X) := -\lambda(JX)$

$\to \Lambda^{10} T^*M$ Eigenbündel zum EW $-i$, $\Lambda^{01} T^*M$ zum EW i

Bezeichnung:

$$\Lambda^{p,0} T^*M := \Lambda^p (\Lambda^{10} T^*M)$$

$$\Lambda^{0,q} T^*M := \Lambda^q (\Lambda^{01} T^*M)$$

$$\Lambda^{p,q} T^*M := \Lambda^{p,0} T^*M \otimes \Lambda^{0,q} T^*M$$

Lemma:

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} T^*M \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^*M$$

Beweis

- $\Lambda^k_{\mathbb{C}} T^*M = \Lambda^k (\Lambda^1_{\mathbb{C}} T^*M) = \Lambda^k (\Lambda^{10} T^*M \oplus \Lambda^{01} T^*M)$
- seien E, F zwei VR, dann gilt:

$$\Lambda^k (E \oplus F) \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p E \otimes \Lambda^q F$$

<u>Bezeichnung</u>: $\Gamma(\Lambda^{p,q} T^* M) = \Omega^{p,q}(M)$ Formen vom Typ (p,q)
oder: (p,q)-Formen

! • $\omega \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \Gamma(\Lambda^k_{\mathbb{C}} T^* M)$

$\omega \in \Omega^{k,0}(M) \Leftrightarrow Z \lrcorner \omega = 0 \quad \forall Z \in T^{01} M$

$\omega \in \Omega^{p,q}(M) \Leftrightarrow Z_1 \lrcorner \ldots \lrcorner Z_{p+1} \lrcorner \omega = 0, \quad Z_i \in T^{10} M$

oder $Z_1 \lrcorner \ldots \lrcorner Z_{q+1} \lrcorner \omega = 0, \quad Z_i \in T^{01} M$

<u>Beschreibung in lokalen Koordinaten</u>

$(U, \varphi_U) \in \mathcal{U}, \quad \varphi_U = (z_1, \ldots, z_m), \quad z_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha$

man definiert: $dz_\alpha := dx_\alpha + i\, dy_\alpha$ ($\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von d)

$d\bar z_\alpha := dx_\alpha - i\, dy_\alpha$

$\Rightarrow \{dz_1, \ldots, dz_m\}$ ist lokale Basis für $\Lambda^{10} T^* M$

$\{d\bar z_1, \ldots, d\bar z_m\}$ " — " $\Lambda^{01} T^* M$

<u>da</u> $J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \Rightarrow (J\, dx_\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right) = -\, dx_\alpha\left(J \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)$

$= dx_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow J\, dx_\alpha = dy_\alpha$

$\Rightarrow \{ dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar z_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar z_{j_q} \mid i_1 < \ldots < i_p,\ j_1 < \ldots < j_q \}$
ist eine lokale Basis von $\Lambda^{p,q} T^* M$

<u>Bemerkung</u>: $\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)$ lokale Basis von $T^{10} M$

$\frac{\partial}{\partial \bar z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)$ " — " $T^{01} M$

$\Rightarrow \quad dz_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) = \delta_{\alpha\beta}$

<u>neue Notation</u>: $\Lambda^{p,q} M$

Satz: Sei (M, J) eine fast-komplexe Mfk., $\dim M = 2m$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

① J ist eine (integrable) komplexe Struktur ($\hat{=}$ (M,J) komplexe Mfk.)

② $T^{0,1}M$ ist integrabel, dh. $[Z,W] \in \Gamma(T^{0,1}M)$ für alle $Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$

③ $d(\Omega^{1,0}(M)) \subset \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$

④ $d(\Omega^{p,q}(M)) \subset \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$

⑤ $N_J \equiv 0$

Beweis: ① $\Leftrightarrow$ ② : Newlander – Nirenberg – Theorem

② $\Leftrightarrow$ ⑤ : schon gezeigt

② $\Leftrightarrow$ ③ : $\alpha \in \Omega^{1,0}(M)$

$(0,2)$ – Komponente von $d\alpha$ ist Null

$\Leftrightarrow \quad d\alpha(Z,W) = 0 \quad \forall\, Z,W \in T^{0,1}M$

Fortsetzung zu lokalen VF

$d\alpha(Z,W) = Z(\alpha(W)) - W(\alpha(Z)) - \alpha([Z,W])$

$= -\alpha([Z,W])$ da $\alpha(W) = 0 = \alpha(Z)$ $\forall\, \alpha \in \Omega^{1,0}(M)$

dh: $d\alpha(Z,W) = 0$ $\forall\, \alpha \in \Omega^{1,0}(M)$, $\forall\, Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$ $\Leftrightarrow \alpha([Z,W]) = 0$ $\forall\, Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$

$\Leftrightarrow [Z,W] \in \Gamma(T^{0,1}M)$ $\forall\, Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$

③ $\Leftrightarrow$ ④ Vor: ③ $\Rightarrow d(\Omega^{0,1}(M)) \subset \Omega^{0,2}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$ (Konjugation)

$\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$, lokal LK von

$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \wedge \bar{\tau}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\tau}_q$, $\quad \omega_i \in \Omega^{1,0}(M)$, $\tau_i \in \Omega^{1,0}(M)$

$d(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\tau}_q) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 \wedge \ldots \pm \omega_1 \wedge \ldots \wedge (d\bar{\tau}_q)$

$d\omega_i \in \Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$

$d\bar{\tau}_i \in \Omega^{0,2}(M) \oplus \Omega^{1,1}(M)$

$\Rightarrow d\alpha \in \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M)$

Folgerung: Das Differential d auf komplexen Mfk. ist Summe zweier Diff.operatoren $d = \partial + \bar{\partial}$ mit $\partial : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p+1,q}$, $\bar{\partial} : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1}$