14. Natural operators on Kähler manifolds

(1) Formal adjoint operators

(M^n, g) or. Riemannian manifold

E, F hermitesche Vektorbündel über M : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ hermitesche Struktur

L^2- Skalarprodukt. $\quad (\alpha, \beta)_{L^2} := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle_E \, d\mathrm{vol}$

$\alpha, \beta \in \Gamma(E)$ Schnitte mit kompakten Träger

Definition. Seien $P: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ und $Q: \Gamma(F) \to \Gamma(E)$ Differentialoperatoren. Dann heißt Q formal-adjungiert zu P falls

$$(P\alpha, \beta) = (\alpha, Q\beta)$$

für alle $\alpha \in \Gamma(E)$, $\beta \in \Gamma(F)$ mit kompakten Träger.

Bezeichnung: $\quad Q = P^*$

(2) Der Laplace-Operator

Hodge-Stern-Operator $\quad * : \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^*M$

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, d\mathrm{vol}$$

es gilt:
- $*$ ist eine Isometrie, $\quad *1 = d\mathrm{vol}$, $\quad * d\mathrm{vol} = 1$
- $*^2 = (-1)^{k(n-k)}$

$*(X \wedge \alpha) = (-1)^p X \lrcorner * \alpha$
$*(X \lrcorner \alpha) = -(-1)^p X \wedge * \alpha$

Differential: $\quad d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M), \quad d = \sum_i e_i \wedge \nabla_{e_i}$

Kodifferential: $\quad d^* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad d^* = -\sum_i e_i \lrcorner \nabla_{e_i}$

besser: δ !

Lemma:
- $d^* = -(-1)^{n \cdot k} * d *$ auf $\Omega^k(M)$
- d^* ist formal-adjungiert zu d

Laplace-Operator. $\quad \Delta := d d^* + d^* d$

3 Der Laplace-Operator auf Kähler-Mft.

(M^{2m}, h, J) (Kähler) fast-hermitesch, Kähler-Form: ω

<u>algebraische Operatoren</u>

- $L : \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{k+2} T^*M$

  $L\alpha = \omega \wedge \alpha = \frac{1}{2} \sum_i e_i \wedge J e_i \wedge \alpha$ $\qquad (e^i\,!)$

- $\Lambda : \Lambda^k T^*M \longrightarrow \Lambda^{k-2} T^*M$ $\qquad$ Kontraktion mit der Kähler-Form

  $\Lambda \alpha = \frac{1}{2} \sum_i J e_i \lrcorner\, e_i \lrcorner\, \alpha$

<u>Bemerkung</u>: • Λ ist zu L adjungiert $\qquad$ (punktweise)

• man setzt L, Λ $\mathbb{C}$-bilinear auf $\mathbb{C}$-wertige Formen fort $\qquad$ (auch $*$) $\longrightarrow$

<u>Lemma</u>: ① $* : \Lambda^{p,q} \longrightarrow \Lambda^{m-q, m-p}$ $\qquad$ (siehe Wells) ÜA

② $[X \lrcorner, \Lambda] = 0 \,, \quad [X \lrcorner, L] = JX \wedge$

$\uparrow$ Beweis:

<u>ab jetzt</u>: (M, h, J) Kähler !

<u>Definition</u>: • $d^c : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$

$d^c \alpha = \sum_i J e_i \wedge \nabla_{e_i} \alpha$ $\qquad e^i$

• $\delta^c : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$

$\delta^c := - * d^c * = - \sum_i J e_i \lrcorner\, \nabla_{e_i}$ $\qquad$ (da $n \equiv 0 (2)$)

<u>Bemerkung</u>: • δ^c ist formal adjungiert zu d^c

Lemma: Es gelten die folgenden "Kähler Identitäten":

$$[L, d^*] = d^c \qquad [L, d] = 0$$

$$[\Lambda, d] = -\delta^c \qquad [\Lambda, d^*] = 0$$

fundamentale Identität !

Beweis: • $[L, d^*] = -\sum_{i=1}^{2n} [L, e_i \lrcorner \nabla_{e_i}]$

$$= -\sum [L, e_i \lrcorner] \nabla_{e_i} = \sum J e_i \lrcorner \nabla_{e_i} = d^c$$

• $[L, d]\alpha = \omega \wedge d\alpha - d(\omega \wedge \alpha)$ da: $d\omega = 0$, $\omega \in \Omega^2$

$$= \omega \wedge d\alpha - \omega \wedge d\alpha = 0$$

• die zweite Zeile folgt durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators auf die Gleichungen der ersten Zeile →

Differential auf Kähler-Mfk.

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

$$\rightarrow \quad \partial^* : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p-1,q} \qquad \partial^* = -*\bar{\partial}*$$

$$\bar{\partial}^* : \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p,q-1} \qquad \bar{\partial}^* = -*\partial*$$

Bemerkung: $\partial^*, \bar{\partial}^*$ sind formal-adjungiert zu $\partial, \bar{\partial}^*$ bzgl. des hermiteschen Produktes $H(\alpha, \beta) = \langle \alpha, \bar{\beta} \rangle$ (α, β komplexwertige Formen)

Definition: $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

Theorem: Sei (M, g, J) eine Kähler Mft.. Dann gilt.

$$\Delta = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}$$

! **Beweis:** • $\partial = \sum_j \frac{1}{2}(e_j + iJe_j) \wedge \nabla_{e_j}$ $\qquad (\bar\partial v^* = (\partial v)^* !)$

$$\bar\partial = \sum_j \frac{1}{2}(e_j - iJe_j) \wedge \nabla_{e_j}$$

$d = \partial + \bar\partial$

$\Lambda^{p,q}$ sind parallele Unterbündel !

$$\Rightarrow d^c = i(\bar\partial - \partial)$$

$$\delta^c = i(\partial^* - \bar\partial^*)$$

da: $\partial^* = -*\bar\partial*$

$\delta^c = -*d^c*$

• $\rightarrow$ Kähler - Identitäten

$$[L, \partial^*] = i\bar\partial, \quad [L, \bar\partial^*] = -i\partial, \quad [L, \partial] = 0 = [L, \bar\partial]$$

$$[\Lambda, \partial] = i\bar\partial^*, \quad [\Lambda, \bar\partial] = -i\partial^*, \quad [\Lambda, \partial^*] = 0 = [\Lambda, \bar\partial^*]$$

da zB: $[L, \delta^*] = d^c = i\bar\partial - i\partial$

$$= [L, \partial^*] + [L, \bar\partial^*]$$

mit Projektion auf $\Omega^{p,q+1}$ bzw $\Omega^{p+1,q}$

$L: \Omega^{p,q} \longrightarrow \Omega^{p+1,q+1}$ $\qquad [L, \partial^*]: \Omega^{p,q} \to \Omega^{p-1,q} \to \Omega^{p,q+1}$

• $-i(\bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial) = \bar\partial[\Lambda, \bar\partial] + [\Lambda, \bar\partial]\bar\partial$ $\quad , \bar\partial^2 = 0!$

$$= \bar\partial\Lambda\bar\partial - \bar\partial\Lambda\bar\partial = 0$$

analog: $\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial = 0$

$$\Rightarrow \Delta = (\partial + \bar\partial)(\partial^* + \bar\partial^*) + (\partial^* + \bar\partial^*)(\partial + \bar\partial)$$

$$= (\partial\partial^* + \partial^*\partial) + (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) + (\bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial)$$

$$= \Delta_\partial + \Delta_{\bar\partial} \qquad + (\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial)$$

es bleibt zu zeigen: $\Delta_\partial = \Delta_{\bar\partial}$

$$
\begin{aligned}
-i\,\Delta_\partial &= -i\,(\partial\partial^* + \partial^*\partial) = \partial[\Lambda,\bar\partial] + [\Lambda,\bar\partial]\partial \\
&= \partial\Lambda\bar\partial - \partial\bar\partial\Lambda + \Lambda\bar\partial\partial - \bar\partial\Lambda\partial \\
&= \partial\Lambda\bar\partial + \bar\partial\partial\Lambda - \Lambda\partial\bar\partial - \bar\partial\Lambda\partial \\
&= [\partial,\Lambda]\bar\partial + \bar\partial[\partial,\Lambda] \\
&= -i\,\bar\partial^*\bar\partial - i\,\bar\partial\bar\partial^* = -i\,\Delta^{\bar\partial}
\end{aligned}
$$

Folgerung: Sei (M^{2n}, g, J) eine Kähler-Mfk., dann kommutiert Δ mit J, Λ, d, ∂, $\bar\partial$, ∂^* und δ, und mit $*$ und L

Beweis: • Δ kommutiert mit d und δ

zB $\Delta d = (d\delta + \delta d)d = d\delta d = d(\delta d + d\delta)$

• analog kommutiert $\Delta_{\bar\partial}$ mit $\bar\partial, \bar\partial^*$ und Δ_∂ mit ∂, ∂^* → entsprechend mit Δ

$$
\begin{aligned}
\bullet\ \Delta L - L\Delta &= d\delta L + \delta d L - L d\delta - L\delta d \\
&= d\delta L + \delta L d - d L\delta - L\delta d \\
&= -d[L,\delta] - [L,\delta]d \\
&= -d d_c - d_c d
\end{aligned}
$$

$d^c = i(\bar\partial - \partial)$ →
$$
\begin{aligned}
d d_c &= i(\partial + \bar\partial)(\bar\partial - \partial) \\
&= i(\partial\bar\partial - \bar\partial\partial) = 2i\partial\bar\partial \quad !
\end{aligned}
$$
$$
\begin{aligned}
d_c d &= i(\bar\partial - \partial)(\partial + \bar\partial) \\
&= i(\bar\partial\partial - \partial\bar\partial) = -2i\partial\bar\partial
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow [\Delta, L] = 0$

Folgerung: Der Laplace-Operator erhält die Aufspaltung in Formen vom Typ (p,q).

15. Hodge und Dolbeault Theorie

① Hodge-Theorie

(M^n, g) kompakt or. Riemannsche Mfk.

$\mathbb{C}$-wertige Formen $\quad \Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes \mathbb{C})$

de Rham-Kohomologie $\quad H^k_{dR}(M, \mathbb{C}) = \ker(d : \Omega^k_{\mathbb{C}} \to \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}) / \operatorname{Im}(d : \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}} \to \Omega^k_{\mathbb{C}})$

harmonische Formen $\quad \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) = \{ \alpha \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(M) \mid \Delta\alpha = 0 \}$

Lemma: $\Delta\alpha = 0 \iff d\alpha = 0 = \delta\alpha$

Hodge-Zerlegung: $\Omega^k_{\mathbb{C}}(M) = \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \oplus \delta\Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}(M) \oplus d\Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}(M)$

Hodge-Isomorphismus: $\left.\begin{array}{l} \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^k_{dR}(M, \mathbb{C}) \\ \qquad \alpha \longmapsto [\alpha] \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Beweis}}$

kte Betti-Zahl: $\quad b_k(M) = \dim_{\mathbb{C}} H^k_{dR}(M, \mathbb{C})$

(top. Invariante)

Poincaré-Dualität: $\quad \mathcal{H}^k(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^{n-k}(M, \mathbb{C}), \quad \alpha \mapsto *\alpha$

$[*, \Delta] = 0$!

d.h.: $b_k(M) = b_{n-k}(M)$

Anwendung:

Satz: Jedes Killing-VF auf einer kompakten Kähler-Mfk. ist reell-holomorph

Beweis: X sei Killing-VF: $L_X g = 0$

- $L_X \omega = d X \lrcorner \omega + X \lrcorner d\omega = d X \lrcorner \omega \qquad$ d.h. $L_X\omega$ ist exakt
- $L_X \circ * = * \circ L_X \qquad$ da der Fluß von X als Isometrie mit $*$ kommutiert
- $[L_X, d] = 0 \Rightarrow [L_X, \delta] = 0$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \delta L_X \omega = L_X \delta\omega = 0 \\ \quad\; d L_X \omega = L_X d\omega = 0 \end{array}\right\}$
$\Rightarrow L_X\omega$ ist harmonisch + exakt
$\Rightarrow L_X\omega = 0$
$\Rightarrow L_X J = 0 \quad$ da Fluß von X ω und g erhält
$\Rightarrow X$ ist reell-holom.

$$L_X \alpha = X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} d L_X \alpha &= d X \lrcorner d\alpha \\ L_X d \alpha &= d X \lrcorner d\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow [L_X, d] = 0$$

Beweis: $f : \mathcal{H}^k \to H^k_{dR}$ $\qquad f(\alpha) = [\alpha]$

- $\alpha \in \mathcal{H}^k \to d\alpha = 0$ dh f ist wohl-definiert
- $\alpha \in \ker f \Leftrightarrow \alpha = d\beta$
  $\Leftrightarrow \alpha = 0$ denn $\mathcal{H}^k \perp \operatorname{Im} d$

  dh. f ist injektiv $\qquad \mathcal{H}^k \cap \operatorname{Im} d = \{0\}$
- $c \in H^k_{dR} \to c = [\alpha]$ mit $d\alpha = 0$

  Hodge-Zerlegung

  $$\alpha = d\alpha' + \delta\alpha'' + \alpha^H$$

  $$d\alpha = 0 \Rightarrow d\delta\alpha'' = 0$$

  $$\Rightarrow \|\delta\alpha''\|^2 = 0 \to \delta\alpha'' = 0$$

  $$\Rightarrow \alpha = d\alpha' + \alpha^H$$

  $$\Rightarrow f(\alpha) = [\alpha^H] = [d\alpha' + \alpha^H] = [\alpha] = c$$

  dh. f ist surjektiv