(Ric > 0
→ es ex. keine
par. VF)

Theorem (Matsushima)

Sei (M, g, J) eine kompakte Kähler-Einstein-Mfk. mit positiver Skalarkrümmung. Dann ist die Lie-Algebra $i(M)$ der Killing-VF auf M ~~die~~ eine reelle Form der Lie-Algebra $h(M)$ der (reell) holomorphen VF auf.

reell?

komplexe LA von reellen VF?

Insbesondere ist $h(M)$ reduktiv, dh. die direkte Summe des Zentrums und einer halb-einfachen LA

$\mathfrak{g}$ reduktiv $\Leftrightarrow$ $ad(\mathfrak{g})$ ist vollst. red. $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{a}$ abelsch, $\mathfrak{g}'$ halbeinf.

↗ Basse

Beweis: $F : i(M) \otimes \mathbb{C} \longrightarrow h(M)$

$$F(\xi + i\zeta) = \xi + J\zeta$$

Killing VF → holomorph da M kompakt Kähler

$$\begin{Bmatrix}\text{reelle holom.} \\ \text{VF}\end{Bmatrix} \to \begin{Bmatrix}\text{holom.} \\ \text{VF}\end{Bmatrix}$$
$$X \mapsto X^{10}$$
$$JX \mapsto iX^{10}$$

- F ist ein Vektorraum-Isomorphismus
  - linear: klar
  - injektiv: $\xi + J\zeta = 0 \implies \xi = J\,dh \quad \zeta = J\,dh'$

$i(M) \cong E_\Delta(\frac{scal}{m})$
$J \operatorname{grad} f \leftarrow f$

$$\to J\,dh = dh'$$
$$\to -dh = J^2 dh = J\,dh'$$

Vorzeichen?!

$$\to d^c h = d(-h')$$
$$\to d^c h = 0 = dh' \quad \text{da } \operatorname{Im} d \perp \operatorname{Im} d^c$$

  - surjektiv: ζ holomorph

$$\implies \zeta = df + J\,dh = \xi_1 + J\xi_2$$
$$\text{mit: } \xi_1 = J\,dh, \quad \xi_2 = -J\,df$$

- F ist ein Lie-Algebren-Isomorphismus

ξ holom. VF $\implies J[\xi, X] = [\xi, JX] = [J\xi, X]$

da $F([\xi + i\zeta, \xi_1 + i\zeta_1]) = F([\xi, \xi_1] - [\zeta, \zeta_1] + i([\zeta, \xi_1] + [\xi, \zeta_1]))$

$$= [\xi, \xi_1] - [\zeta, \zeta_1] + J([\zeta, \xi_1] + [\xi, \zeta_1])$$
$$= [\xi, \xi_1] + J^2[\zeta, \zeta_1] + [J\zeta, \xi_1] + [J\xi, \zeta_1]$$
$$= [\xi, \xi_1] + [J\zeta, J\zeta_1] + [J\zeta, \xi_1] + [J\xi, \zeta_1]$$
$$= [F(\xi + i\zeta), F(\xi_1 + i\zeta_1)]$$
$$= [\xi + J\zeta, \xi_1 + J\zeta_1]$$

$$\left(J[X, Y] = [JX, Y] = [X, JY]\right)$$

$I(M)$ ist kompakt $\to$ $i(M)$, ist von kompakten Typ $\to$ $i(M)$, $i(M) \otimes \mathbb{C}$ ist reduktiv

Beispiel: • $M = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ Kähler, $c_1 > 0$

$h(M) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{C}) \right\}$

$Z(h(M)) = \{0\}$, $h(M)$ ist nicht halb-einfach ?

da $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3,\mathbb{C}) \right\}$ ist ein abelsches Ideal

$\to$ M trägt keine Kähler-Einstein-Metrik

$k=1$

es ex. Fubin. Metrik Einstein, $Ric > 0$

• $M = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$

trägt ebenfalls keine Kähler-Einstein-Metrik

$k = 1, 2$

Futaki-Invarianten sind ungleich Null

Bemerkung: • (Siu, Tian, Yau)

$k \le 8 \to c_1 > 0$

$M_k = \mathbb{C}P^2 \# k\, \overline{\mathbb{C}P}^2$

trägt Kähler-Einstein-Metriken für $3 \le k \le 8$

• Fermat Fläche $z_0^d + \ldots + z_n^d = 0$ in $\mathbb{C}P^n$

trägt Kähler-Einstein Metriken für : $\mathrm{scal} > 0$

$\frac{1}{2}(n+1) \le d \le n$

und $c_1 > 0$ (extremale Kähler-Metrik: $\mathrm{grad}(\mathrm{scal})$ holom. VF)

• Für kompakte Kähler-Mfk mit konstanter Skalarkrümmung gilt immer noch $h(M) = i(M) \otimes \mathbb{C}$

• Futaki-Invarianten: Linearform auf $h(M)$

Die Futaki - Invariante

↗ Ballmann
↗ Besse

Sei (M, g, J) eine kompakte Kähler-Mfk.

Kähler-Form: ω Ricci-Form ρ

Voraussetzung: $\omega \in 2\pi c_1(M)$ (d.h. $c_1(M) > 0$ und daraus folgt umgekehrt auch die Existenz von ω)

$\rightarrow \exists\, F_\omega \in C^\infty(M)$: $\rho - \omega = i\partial\bar\partial F_\omega$

Die Funktion F_ω ist bis auf Konstanten eindeutig

Definition: Die Futaki-Invariante ist definiert als die Linearform:

$$\mathcal{F}_\omega : \mathfrak{a}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_\omega(X) := \int_M X(F_\omega)\, \omega^m$$

$\mathcal{F}_\omega$ ist wirklich eine "Invariante", da:

Theorem (Futaki, 1983): Die Linearform $\mathcal{F}_\omega$ ist konstant auf der Kähler-Klasse $[\omega]$, d.h. nicht abhängig von der Wahl der Kähler-Form

Futaki-Invariante: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega$

für ein $\omega \in 2\pi c_1(M)$

Bemerkung:
- ω Kähler-Einstein

  $\rightarrow \omega = \rho \rightarrow F_\omega$ ist konstant

  $\rightarrow \mathcal{F}_\omega \equiv 0$ auf $\mathfrak{a}(M)$ d.h. notwendige Bedingung

- Futaki-Invarianten von $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ und $\mathbb{C}P^2 \# 2\overline{\mathbb{C}P}^2$ sind ungleich Null $\rightarrow$ keine KE-Metrik (Tian)

- $H_1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$, $H_2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ Hyperebenen-Bündel

  $M = \mathbb{P}(H_1 \oplus H_2) \rightarrow \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ $\dim_{\mathbb{C}} M = 4$

  (Futaki) M ist Fano, $\mathfrak{a}(M)$ ist reduktiv
  Futaki-Invarianten ungleich Null

Beweis des Theorems

Sei ω_t eine glatte Familie von Kähler-Formen in $2\pi c_1(M)$

ZZ: $\frac{d}{dt}\left(F_{\omega_t}(X) \right) = 0$

$\exists$ Familien von glatte Funktionen F_t, ϕ_t mit: (nach $\partial\bar\partial$-Lemma)

$$\omega_t - \omega_0 = i\partial\bar\partial \phi_t \quad , \quad \rho_t - \omega_t = i\partial\bar\partial F_t$$

$$\Rightarrow -i\partial\bar\partial \log \frac{\omega_t^m}{\omega^m} = \rho_t - \rho_0 = i\partial\bar\partial\left(F_t + \phi_t - F_0 \right)$$

da: $\rho_t - \rho_0 = \rho_t - \omega_t + \omega_t - \omega_0 - \rho_0 + \omega_0$

$$\Rightarrow -\log \frac{\omega_t^m}{\omega^m} = F_t + \phi_t - F_0 + \text{const.} \qquad (*)$$

$$\varphi = \frac{d}{dt}\phi = \dot\phi \quad , \quad f = \dot F$$

$$\rightarrow \dot\omega = i\partial\bar\partial\varphi \quad , \quad \dot\rho - \dot\omega = i\partial\bar\partial f$$

$$\rightarrow \Delta\varphi = 2f + 2\varphi$$

hatten schon gezeigt $d\,\mathrm{Cal} = -\Delta_{\bar\partial} = -\frac{1}{2}\Delta$

$d\,\mathrm{Cal} = \frac{d}{dt}\log\frac{\omega_t^m}{\omega^m}$

da:

es gilt: $2\frac{d}{dt}\omega_t^m = 2m\,\dot\omega\wedge\omega^{m-1}$

$$= 2mi\,\partial\bar\partial\varphi\wedge\omega^{m-1}$$

$$= -\Delta\varphi\;\omega^m$$

$$\rightarrow 2\frac{d}{dt} F_{\omega_t}(X) = 2\int_M \left(X(f)\,\omega^m + X(F)\frac{d}{dt}\omega_t^m \right)$$

$$= \int_M \left(X(\Delta\varphi - 2\varphi) - X(F)\,\Delta\varphi \right)\omega^m$$

$\textcircled{\scriptsize 2}$

- X ist holomorph (ω^m als Volumenform wird jetzt weggelassen)

$$\Rightarrow \int X(\Delta\varphi) = \int g(X, \operatorname{grad}\Delta\varphi)$$

$$= \int g(\operatorname{Ric} X, \operatorname{grad}\varphi) + g(X, \nabla^*\nabla \operatorname{grad}\varphi)$$

$$= \int g(\operatorname{Ric} X, \operatorname{grad}\varphi) + g(\nabla^*\nabla X, \operatorname{grad}\varphi)$$

$$= 2\int g(\operatorname{Ric} X, \operatorname{grad}\varphi)$$

$\left(\begin{array}{c}\operatorname{grad}\Delta\varphi \\ \Downarrow \\ \Delta \operatorname{grad}\varphi \\ \Downarrow \\ (\nabla^*\nabla + \operatorname{Ric}) \operatorname{grad}\varphi\end{array}\right)$

(X holomorph $\Rightarrow \nabla^*\nabla X = \operatorname{Ric}(X)$)

$$\Rightarrow \int X(\Delta\varphi - 2\varphi) = 2\int g(\operatorname{Ric} X, \operatorname{grad}\varphi) - g(X, \operatorname{grad}\varphi)$$

$$= 2\int \rho_t(X, J\operatorname{grad}\varphi) - \omega_t(X, J\operatorname{grad}\varphi)$$

$$= 2\int (i\partial\bar\partial F_t)(X, J\operatorname{grad}\varphi)$$

$$= \int_M \nabla^2 F_t(\operatorname{grad}\varphi, X) + \nabla^2 F_t(J\operatorname{grad}\varphi, JX)$$

da:
- $\rho_t - \omega_t = i\partial\bar\partial F_t$
- $2i\partial\bar\partial u\,(X, JY) = \nabla^2 u(X,Y) + \nabla^2 u(JX, JY)$

  wobei $\nabla^2 u = \operatorname{Hess}(u)$

- $\operatorname{div}(X(F_t)\cdot \operatorname{grad}\varphi) = g(\operatorname{grad}(X(F_t)), \operatorname{grad}\varphi) - X(F)\Delta\varphi$

da:
- $\Delta u = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$
- $\operatorname{div}(f\cdot X) = g(\operatorname{grad} f, X) + f\operatorname{div}(X)$

$$\Rightarrow \int_M X(F_t)\,\Delta\varphi = \int_M g(\operatorname{grad} X(F_t), \operatorname{grad}\varphi)$$ da $\int \operatorname{div} X = 0$

$$= \int \nabla^2 F_t(\operatorname{grad}\varphi, X) + g(\nabla_{\operatorname{grad}\varphi} X, \operatorname{grad} F_t)$$

da: $(\nabla^2 F_t)(Y, X) = (\nabla_Y dF_t)(X)$, $Y = \operatorname{grad}\varphi$

$$= Y(dF_t(X)) - dF_t(\nabla_Y X)$$

$$= Y(X(F)) - g(\operatorname{grad} F_t, \nabla_Y X)$$

$$= g(\operatorname{grad} X(F), Y) - g(\operatorname{grad} F_t, \nabla_Y X)$$

X ist reell-holomorph, $\nabla J = 0$

$$\Rightarrow 2\frac{d}{dt} F_{\omega_t}(X) = \int_M X(\Delta\varphi - 2\varphi) - X(F_t)\,\Delta\varphi$$

$$= \int_M \nabla^2 F_t(J\operatorname{grad}\varphi, JX) - g(\nabla_{\operatorname{grad}\varphi} X, \operatorname{grad} F_t)$$

$$= \int_M \nabla^2 F_t(J\operatorname{grad}\varphi, JX) + g(\nabla_{J\operatorname{grad}\varphi} JX, \operatorname{grad} F_t)$$

$$= \int_M (J\operatorname{grad}\varphi)(JX(F_t))$$

$$= -\int_M JX(F_t)\cdot \operatorname{div}(J\operatorname{grad}\varphi)$$

(nach (*) und X holomorph, d.h.: $\nabla X \circ J = J \circ \nabla X$
$\hookrightarrow \nabla_{JY} X = J\nabla_Y X$
$\hookrightarrow \nabla_{JY} JX = -\nabla_Y X$)

da: $\operatorname{div}(f\cdot X) = f\operatorname{div}(X) + g(\operatorname{grad} f, X)$

$f = JX(F_t)$, $X = J\operatorname{grad}\varphi$, $\int \operatorname{div} = 0$

$g(\operatorname{grad} f, X) = X(f)$

$$= 0$$

da: $\operatorname{div}(J\operatorname{grad}\varphi) = 0$

siehe oben: • ∇X symmetrisch $\to$ JX ist volumenerhaltend d.h. $\operatorname{div}(JX) = 0$

• hier: $X = \operatorname{grad}\varphi$, $\nabla\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{Hess}(\varphi)$ symmetrisch!

Verallgemeinerung der Futaki-Invariante (Calabi) $\nearrow$ Besse

Sei (M, g, J) eine kompakte Kähler-Mft.

Kähler-Form ω, Ricci-Form ρ_ω

$\rightarrow$ $\rho_\omega = \gamma_\omega + i \partial\bar\partial F_\omega$,

wobei: γ_ω eindeutiger harmonische Repräsentant in $2\pi c_1(M)$

Calabi-Futaki-Invariante

$$\mathcal{CF}_\omega : \mathfrak{h}(M) \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{CF}_\omega(X) := \int_M X(F_\omega)\, \omega^m$$

Satz: $\mathcal{CF}_\omega$ ist unabhängig von der Wahl von ω in der Kähler-Klasse $[\omega]$.

Lemma: $\exists\, h$ mit $\omega_h \in [\omega]$, $\mathrm{scal}_h = \mathrm{const}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{CF}_\omega \equiv 0$

Spezialfall: $\omega \in 2\pi c_1(M)$ (d.h. $c_1(M) > 0$)

Beweis des Lemmas. $\mathrm{scal} = \mathrm{const} \Leftrightarrow F_\omega = 0$

$\rho_\omega = \gamma_\omega + i\partial\bar\partial F_\omega \quad | \Lambda$

$$\left(\begin{aligned} &\Lambda(i\partial\bar\partial F) \\ &= -\bar\partial\bar\partial^* F \\ &= -\tfrac{1}{2}\Delta F \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(\rho_\omega) &= \tfrac{1}{2}\sum_i Je_i \lrcorner\, e_i \lrcorner\, \rho \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_i \rho(e_i, Je_i) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_i \mathrm{Ric}(Je_i, Je_i) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{scal} \end{aligned}$$

$\Lambda(\gamma_\omega) = \langle \omega, \gamma_\omega \rangle$ ist konstant, da ω, γ_ω harmonisch

$\Delta F_\omega = \mathrm{const} \xrightarrow{\int} \Delta F_\omega = 0 \to F_\omega$ const