20. Weitzenböck-Techniken

<u>allgemeines Prinzip:</u> (M^{2m}, g, J) Kähler-Mfk, kompakt

$(E, h) \longrightarrow M$ holomorphes, hermit. VB

holomorphe Struktur: $\bar\partial : \Omega^{p,q}(E) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(E)$

Chern-Zus. $\nabla : \Omega^{p,q}(E) \to \Gamma(\Lambda^1 T^*M^{\mathbb{C}} \otimes \Lambda^{p,q} E)$

auf $\Omega^{p,q}(E)$: $2(\bar\partial^* \bar\partial + \bar\partial \bar\partial^*) = \nabla^* \nabla + R$

mit $R \in \operatorname{End}(\Lambda^{p,q} E)$ $\left(\begin{array}{l} \Lambda^{p,q} E \\ = \Lambda^{p,q} T^*M \otimes E \end{array} \right)$

Term 0.ter Ordnung!

<u>Anwendung</u>: • $R \geq 0$ auf $\Lambda^{p,0} E$, dann ist jeder holom. Schnitt parallel

• $R > 0$ " – " dann ex. keine nicht-triv. holomorphen Schnitte

<u>Lemma:</u> Sei $\{e_j\}$ eine lokale ONB in TM, dann gilt lokal:

① $\bar\partial \sigma = \sum \frac{1}{2}(e_j - i J e_j) \wedge \nabla_{e_j} \sigma$

② $\bar\partial^* \sigma = - \sum \frac{1}{2}(e_j + i J e_j) \lrcorner \nabla_{e_j} \sigma$

③ $\nabla^* : \Gamma(\Lambda^1 T^*M^{\mathbb{C}} \otimes \Lambda^{p,q} E) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^{p,q} E)$

$\nabla^*(\omega \otimes \sigma) = (d^*\omega)\sigma - \nabla_\omega \sigma$

<u>zum Beweis.</u>

<u>zu ①</u> • $d\sigma = \partial\sigma + \bar\partial\sigma = \sum e_j \wedge \nabla_{e_j} \sigma$

$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum (e_j + iJe_j) \wedge \nabla_{e_j}\sigma}_{\partial\sigma} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum (e_j - iJe_j) \wedge \nabla_{e_j} \sigma}_{\bar\partial\sigma}$

• $g : T^{10}M \xrightarrow{\sim} \Lambda^{01} TM$

$\partial = \sum f^k \wedge \nabla_{f_k}$

$f_k^* := g(f_k, \cdot)$, g-$\mathbb{C}$-bilinear

$f_k^* = \frac{1}{2} \bar f^k$

zu ③ $\nabla^*(\omega \otimes \sigma) = - \operatorname{tr} \circ \nabla(\omega \otimes \sigma) = - \operatorname{tr}\left(\sum e_i \otimes [\nabla_{e_i} \omega \otimes \sigma + \omega \otimes \nabla_{e_i} \sigma]\right)$

$= d^*\omega \cdot \sigma - \nabla_\omega \sigma$

Theorem: Sei $(E, h) \longrightarrow (M^{2m}, g, J)$ ein holomorphes, hermitesches VB über einer Kähler-Mfk.. Dann gilt auf Schnitten von $\Lambda^{p,q} E$

$$2(\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\,\bar\partial^*) = \nabla^*\nabla + \mathcal{R}$$

wobei

$$\mathcal{R}\sigma = \sum \tfrac{i}{2}\, \tilde R(Je_k, e_k)\sigma - \tfrac{1}{2}\sum (e_j - iJe_j)\wedge(e_k + iJe_k) \lrcorner \tilde R(e_j, e_k)\sigma$$

(statt $\nabla e_j = 0$ in p!)

$\tilde R$ ist die Krümmung des Tensorprodukt-Zus auf $\Lambda^{p,q} T^*M \otimes E$

$\tilde R(a\otimes b) = Ra\otimes b + a\otimes R^E b$

Beweis:

$$2\bar\partial^*\bar\partial = -\tfrac{1}{2}\sum (e_k + iJe_k)\lrcorner \nabla_{e_k}\big((e_j - iJe_j)\wedge\nabla_{e_j}\big)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sum (e_k + iJe_k)\lrcorner (e_j - iJe_j)\wedge \nabla_{e_k}\nabla_{e_j}$$

$$= -\sum \big(g(e_k, e_j) + i\,g(Je_k, e_j)\big)\nabla_{e_k}\nabla_{e_j}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum (e_j - iJe_j)\wedge(e_k + iJe_k)\lrcorner \nabla_{e_k}\nabla_{e_j}$$

$$= \nabla^*\nabla - \sum i\,g(Je_k, e_j)\nabla_{e_k}\nabla_{e_j}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum (e_j - iJe_j)\wedge(e_k + iJe_k)\lrcorner \nabla_{e_j}\nabla_{e_k}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum (e_j - iJe_j)\wedge(e_k + iJe_k)\lrcorner \tilde R(e_j, e_k)$$

$$= \nabla^*\nabla - \tfrac{i}{2}\sum g(Je_k, e_j)\tilde R(e_k, e_j)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum (e_j - iJe_j)\wedge\nabla_{e_j}\big((e_k + iJe_k)\lrcorner\nabla_{e_k}\big)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum (e_j - iJe_j)\wedge(e_k + iJe_k)\lrcorner \tilde R(e_j, e_k)$$

$$= \nabla^*\nabla - 2\bar\partial\bar\partial^* + \mathcal{R}$$

wobei
$$\sum g(Je_k, e_j)\nabla_{e_k}\nabla_{e_j} = \sum g(Je_k, e_j)\nabla_{e_j}\nabla_{e_k} + \sum g(Je_k, e_j)\tilde R(e_j, e_k)$$
$$= \sum g(Je_j, e_k)\nabla_{e_k}\nabla_{e_j} + \sum g(Je_k, e_j)\tilde R(e_j, e_k)$$
$$= -\sum g(e_j, Je_k)\nabla_{e_k}\nabla_{e_j} + \sum g(Je_k, e_j)\tilde R(e_j, e_k)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum g(e_j, Je_k)\tilde R(e_j, e_k)$$

Bem:

$\omega = \tfrac{1}{2}\sum e_k\wedge Je_k$

$\mathcal{R}(\omega) = -9$

2. Verschwindungssätze auf Kähler-Mfk

<u>Spezialfall</u>: $q = 0$ $\qquad \Lambda^{p,0} E$

$$\Rightarrow R\sigma = \frac{i}{2} \sum \tilde{R}(\partial e_k, e_k)\sigma \quad , \quad \bar{\partial}^* = 0 \,!$$

<u>Bezeichg</u>: Wirkung der Ricci-Form auf $\Lambda^{p,0}$

$$\rho^{(p)}(\omega) := \sum \rho(e_k) \wedge e_k \lrcorner \omega$$

wobei $\quad g(\rho(X), Y) = \rho(X, Y)$.

<u>Satz</u>: Für $\omega \otimes \xi \in \Omega^{p,0}(E)$ gilt:

$$2\bar{\partial}^* \bar{\partial}(\omega \otimes \xi) = \nabla^* \nabla(\omega \otimes \xi) + i\rho^{(p)}(\omega) \otimes \xi + \frac{i}{2} \sum \omega \otimes R^E(\partial e_k, e_k)\xi$$

<u>Beweis</u>:

- $\tilde{R}(X,Y)(\omega \otimes \xi) = (R(X,Y)\omega) \otimes \xi + \omega \otimes R^E(X,Y)\xi$!
- Riemannsche Krümmung: $R(X,Y)\omega = \sum R(X,Y)e_k \wedge e_k \lrcorner \omega$
- $2\rho = \sum R(\partial e_k, e_k)$ $\qquad \rho(X) = \mathrm{Ric} \circ \partial X = \partial \circ \mathrm{Ric}\, X = -\frac{1}{2}\sum R_{e_i, \partial e_i} X = \frac{1}{2}\sum R_{\partial e_i, e_i} X$

$$R(\omega \otimes \xi) = \frac{i}{2} \sum \tilde{R}(\partial e_k, e_k)(\omega \otimes \xi)$$
$$= \frac{i}{2} \sum (R(\partial e_k, e_k)\omega) \otimes \xi + \omega \otimes R^E(\partial e_k, e_k)\xi$$
$$= i\rho^{(p)}(\omega) \otimes \xi + \frac{i}{2} \sum \omega \otimes R^E(\partial e_k, e_k)\xi$$

schon gezeigt ↙

{ kurz: $\mathrm{Ric} < 0$ }

Theorem: Sei M eine kompakte Kähler-Mfl. mit $\mathrm{Ric}(X,X) < 0$ für alle $X \neq 0$. Dann existiert auf M kein holomorphes VF $(\neq 0)$

Beweis: $p = 0$, $E = T^{10}M$, ξ holomorphes VF (als Schnitt in $T^{10}M$ mit $\bar\partial\xi = 0$ $\hookrightarrow J\xi = i\xi$)

$$0 = 2\bar\partial^*\bar\partial\xi = \nabla^*\nabla\xi + \frac{i}{2}\sum R(Je_k, e_k)\xi$$

$$= \nabla^*\nabla\xi + i\,\rho(\xi)$$

$$\rho(\xi) = \mathrm{Ric}(J\xi) = i\,\mathrm{Ric}(\xi)$$

$$\rightarrow 0 = \int_M H(\nabla^*\nabla\xi - \mathrm{Ric}(\xi), \xi)\,dM = \int_M |\nabla\xi|^2 dM - \int_M H(\mathrm{Ric}(\xi),\xi)\,dM$$

$\mathrm{Ric} < 0 \Rightarrow \xi = 0$

mit c_1 formulieren!

Theorem: Sei M eine kompakte Kähler-Mfh.

$\frac{\mathrm{zB}}{\mathbb{C}P^m}$

a) $\mathrm{Ric} \equiv 0$: jedes holomorphe Form ist parallel

b) $\mathrm{Ric} > 0$: Es existiert keine holomorphe $(p,0)$-Form, $p \geq 1$ $\neq 0$

Beweis: $E =$ triviales LB, $\omega \in \Omega^{p,0}(M)$ $\rightarrow JX \lrcorner \omega = i X \lrcorner \omega$ da $(X + iJX)\lrcorner\omega = 0$

$\Rightarrow 0 = \nabla^*\nabla\omega + i\,\rho^{(p)}(\omega)$

a) $\rho = 0 \rightarrow 0 = \nabla^*\nabla\omega \xrightarrow{\text{Integration}} \nabla\omega = 0$

b) $0 = \nabla^*\nabla\omega + i\,\rho^{(p)}(\omega)$

$$i\,\rho^{(p)}(\omega) = i\sum \rho(e_k)\wedge e_k \lrcorner \omega$$

$$= i\sum \rho(Je_k)\wedge Je_k \lrcorner \omega$$

$$= -\sum \rho(Je_k)\wedge e_k \lrcorner \omega$$

$$= \sum \mathrm{Ric}(e_k)\wedge e_k \lrcorner \omega = \mathrm{Ric}(\omega)$$

$\mathrm{Ric} > 0$ auch auf Formen

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\int |\nabla\omega|^2 dM}_{\geq 0} + \underbrace{\int H(\mathrm{Ric}(\omega),\omega)\,dM}_{> 0} \rightarrow \omega = 0$$