$$\Rightarrow \quad \hat{h}_p(X,Y) = \frac{2}{(1+r^2)^2} \operatorname{Re}\left(X_1\bar{Y}_1 + (1+r^2)\sum_{i=2}^{m} X_i\bar{Y}_i \right)$$

ist positiv-definit.

<u>Bezeichnung</u>: Die so konstruierte Kähler-Metrik auf $\mathbb{C}P^m$ nennt man Fubini-Studi-Metrik h_{FS}

<u>Bemerkung</u>: Die Funktionen $u \circ \phi_j$ sind lokale Kähler-Potentiale

(3) Geometrische Eigenschaften der Fubini-Study-Metrik

<u>Lemma</u>: Die kanonische Projektion $\pi: \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^m$ ist eine Submersion und für jedes $z \in \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}$ gilt:

$$\operatorname{Ker} d\pi_z = \mathbb{C}z \qquad d\pi_z : T_z(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}) \to T_{\pi(z)}\mathbb{C}P^m, \quad T_z(\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}) \cong \mathbb{C}^{m+1}$$

<u>Beweis</u>: $z \in \mathbb{C}^{m+1}$, $z_j \neq 0$ $\quad f_j := \phi_j \circ \pi$

$f_j(z_0,\dots,z_m) = \frac{1}{z_j}(z_0,\dots,\hat{z}_j,\dots,z_m)$ $\qquad f: \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^m$

sei $j = 0$, $f = f_0$ $\qquad f(z_0,\dots,z_m) = \frac{1}{z_0}(z_1,\dots,z_m)$

$df_z(v) = \frac{1}{z_0}(v_1,\dots,v_m) - \frac{v_0}{z_0^2}(z_1,\dots,z_m)$ $\qquad \left(v(z_j) = v_j \right)$

$\Rightarrow v \in \operatorname{Ker} d\pi_z \iff v \in \operatorname{Ker} df_z$, $\quad f = \phi_0 \circ \pi$ $\qquad \left(v(z_0^{-1}) = -\frac{1}{z_0^2}\cdot v(z_0) = -\frac{v_0}{z_0^2} \right)$

$\iff v = \frac{v_0}{z_0} z$ in $\mathbb{C}^{m+1}$!
0te Komponente automatisch gleich

- d.h.: $\operatorname{Ker} d\pi_z = \mathbb{C}z$
- $d\pi_z$ ist surjektiv (aus Dimensionsgründen)

$\Rightarrow \pi$ ist eine Submersion

<u>Bemerkung</u>: π Submersion $\Rightarrow \pi_*$ surjektiv
$\Rightarrow \pi^*$ injektiv

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^2$$

$$X = a+bi \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad JX = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} i\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 &= i\,(dx_1 + i\,dy_1) \wedge (dx_1 - i\,dy_1) \\ &= i\,(-i\,dx_1 \wedge dy_1 + i\,dy_1 \wedge dx_1) \\ &= 2\,dx_1 \wedge dy_1 \end{aligned}$$

$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dy_1 \,(X, JY) &= dx_1 \wedge dy_1 \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix} \right) \\ &= +ac + db \\ &= \mathrm{Re}\,(X \cdot \bar{Y}) \\ &= \mathrm{Re}\,(a+bi)(c-id) \\ &= ac + bd \end{aligned}$$

$dx_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a$

$dy_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b$

$z \in \mathbb{C}^{m+1}$

$z^\perp := \{ Y \in \mathbb{C}^{m+1} \mid \langle z, Y \rangle := \sum_{j=0}^{m} z_j \overline{Y_j} = 0 \}$

$D_z := z^\perp \subset T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$ Kodimension-1-Distribution

dh: $T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{C}z \oplus D_z$

$X \mapsto X^\perp$ sei die Projektion auf D_z

man definiert einen symmetrischen Tensor $\tilde{h}$ auf $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$

$\tilde{h}_z(X, Y) := \frac{2}{|z|^2} \langle X^\perp, Y^\perp \rangle$ $\quad \forall X, Y \in T_z(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\})$

$\langle A, B \rangle := A \cdot \overline{B}^T$

<u>Lemma</u>: Sei φ die $(1,1)$-Form $\varphi(X, Y) = \tilde{h}(JX, Y)$, dann gilt auf $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$:

$$\varphi = i \partial \bar\partial \log |z|^2$$

<u>Beweis</u>: φ und $i\partial\bar\partial \log |z|^2$ sind U_{m+1}-invariant

$\Rightarrow$ oBdA Rechnung in $p = (r, 0, \dots, 0)$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$

- $\partial \bar\partial \log |z|^2 = \partial \left(\frac{1}{|z|^2} \sum z_i \, d\bar z_i \right)$

$$= \frac{1}{|z|^2} \sum_{i=0}^{m} dz_i \wedge d\bar z_i - \frac{1}{|z|^4} \left(\sum_{i=0}^{m} \bar z_i \, dz_i \right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{m} z_i \, d\bar z_i \right)$$

in $p = (r, 0, \dots, 0)$ erhält man

$$\partial\bar\partial \log(|z|^2)_p = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{m} (dz_i \wedge d\bar z_i)_p$$

- $-i\,\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta} \right) = -i\,\tilde{h}\left(i\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta} \right) = \tilde{h}\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta} \right)$

$\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z_\alpha}^\perp = 0$, $\quad \alpha \neq 0$: $\frac{\partial}{\partial z_\alpha}^\perp = \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$

$\left\langle \frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta} \right\rangle = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow -i\,\varphi\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha = 0 \text{ oder } \beta = 0 \\ \frac{1}{r^2}\delta_{\alpha\beta} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -i\,\varphi_p = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{m} (dz_i \wedge d\bar z_i)_p = \partial\bar\partial \log(|z|^2)_p$$

$\Rightarrow \quad \pi^* h_{FS} = \tilde{h} \qquad\qquad \pi : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{CP}^m$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad h_{FS}$

<u>da</u> $\quad \pi^* \omega = i\, \partial \bar{\partial}\, v \qquad\qquad v(z) = \log |z|^2$

$$= i\, \partial \bar{\partial} \log |z|^2$$

$$= \varphi$$

$$\omega(X,Y) = h_{FS}(\mathfrak{J}X, Y) \quad , \quad \varphi(X,Y) = \tilde{h}(\mathfrak{J}X, Y)$$

<u>Satz:</u> Die unitäre Gruppe U_{m+1} wirkt durch holomorphe Isometrien transitiv auf $(\mathbb{CP}^m, h_{FS})$. Insbesondere gilt:

$$\mathbb{CP}^m \cong U_{m+1} / U_1 \times U_m$$

<u>Beweis:</u> $\quad A \in U_{m+1}, \quad z \in \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$

$A(\alpha \cdot z) = \alpha \cdot Az$

$\Rightarrow$ A wirkt auf $\mathbb{CP}^m = \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*$

$\tilde{A}$ sei die Transformation zu A

- $\tilde{A} : \mathbb{CP}^m \to \mathbb{CP}^m$ ist holomorph $\qquad$ (Rechnung in lokalen Koordinaten)

  <u>d.h.</u> $\quad \tilde{A} \circ \pi = \pi \circ A$

- $\tilde{A}$ ist eine Isometrie bzgl. h_{FS}

<u>da</u> $\bullet$ $\quad \pi^* \omega = i\, \partial \bar{\partial}\, v \qquad\qquad v(z) = \log |z|^2$

$\bullet$ $\quad v(Az) = \log |Az|^2 = \log |z|^2 = v(z) \qquad$ d.h. $A^* v = v$

$\Rightarrow \quad \pi^*(\tilde{A}^* \omega) = A^* \pi^* \omega = A^*\, i\, \partial \bar{\partial}\, v$

$$= i\, \partial \bar{\partial}\, A^* v = i\, \partial \bar{\partial}\, v = \pi^* \omega$$

π_* ist surjektiv $\Rightarrow$ π^* ist injektiv auf Formen

$\Rightarrow \quad \tilde{A}^* \omega = \omega$

$\Rightarrow \quad \tilde{A}$ erhält h_{FS} $\qquad$ da $\tilde{A}$ auch $\mathfrak{J}$ erhält

<u>Satz</u>: Die Fubini-Study-Metrik ist Einstein mit Skalarkrümmung $\mathrm{scal} = 2m(m+1)$.

<u>Beweis</u>: man hat eine transitive isometrische Wirkung auf $\mathbb{CP}^m$

$\rightarrow$ o.B.d.A. Rechnung in $p = [1:0:\ldots:0] \in \mathbb{CP}^m$

- $$(\phi_0^*)^{-1}\omega = \cancel{i\partial\bar\partial \log |z|^2}$$
  $$= \cancel{\frac{1}{|z|^2}\sum_i dz_i \wedge d\bar z_i - \frac{1}{|z|^4}\left(\sum_i \bar z_i dz_i\right)\wedge\left(\sum_i z_i d\bar z_i\right)}$$
  $$= i\,\partial\bar\partial \log(1+|z|^2)$$
  $$= \frac{i}{1+|z|^2}\sum_i dz_i \wedge d\bar z_i - \frac{i}{(1+|z|^2)^2}\left(\sum_i \bar z_i dz_i\right)\wedge\left(\sum_i z_i d\bar z_i\right)$$

- <u>Lemma</u>: $$((\phi_0^*)^{-1}\omega)^m = \frac{2^m m!}{(1+|z|^2)^{m+1}}\, dx \qquad (*)$$

  wobei: $dx = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_m = \left(\frac{i}{2} dz_1 \wedge d\bar z_1\right)\wedge \ldots \wedge \left(\frac{i}{2} dz_m \wedge d\bar z_m\right)$

  <u>Beweis</u>: beide Seiten sind U_m-invariant

! $\rightarrow$ o.B.d.A. Rechng in $z = (r, 0, \ldots, 0)$ hier: klar

- h hermitesche Metrik auf $\mathbb{C}^m$ mit fundamentaler 2-Form φ
  $d := \det(h_{\alpha\bar\beta})$

<u>Lemma</u>: $$\frac{1}{m!}\varphi^m = d \cdot 2^m\, dx \qquad (**)$$

! <u>Beweis</u>: ÜA

hier:
$\Rightarrow d = \det(h_{\alpha\bar\beta}) = \frac{1}{(1+|z|^2)^{m+1}}$ da Vergleich von $(*)$ und $(**)$

$\rightarrow \log d = -(m+1)\log(1+|z|^2)$

$\rightarrow (\phi_0^*)^{-1}\rho = -i\partial\bar\partial \log d = (m+1)\, i\partial\bar\partial\log(1+|z|^2) = (m+1)(\phi_0^*)^{-1}\omega$

$\rightarrow \rho = (m+1)\omega$ $\qquad \rho = -i\partial\bar\partial \log d$

$\rightarrow \mathrm{Ric} = (m+1)\, g_{FS}$