16 Vorlesung
20.12.2019

16. Chern-Klassen

① Chern-Weil-Theorie

Satz. Zu jedem komplexen Vektorbündel E über M kann man eine Kohomologieklasse $c_1(E) \in H^2(M,\mathbb{Z})$ assoziieren, die erste Chern-Klasse, die folgende Axiome erfüllt:

① Natürlichkeit: $\quad f^*(c_1(E)) = c_1(f^*E)$

für $f: N \to M$

② Whitney-Summen-Formel: $\quad c_1(E \oplus F) = c_1(E) + c_1(F)$

③ Normalisierung: $\quad c_1(E) = -1$ in $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

für $E \to \mathbb{C}P^1$ das tautologische Bündel

Chern-Weil-Theorie beschreibt die Bilder der Chern-Klassen in der reellen Kohomologie

Sei $E \to M$ VB, ∇ ein Zusammenhang auf E

$(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ lokale Basis von E über $U \subset M$

$$\nabla \sigma_i = \sum_j \omega_{ij} \otimes \sigma_j \qquad \omega_{ij} \in \Omega^1(U)$$

$$R^\nabla \sigma_i = \sum_j R^\nabla_{ij} \otimes \sigma_j = \sum_j \Big(d\omega_{ij} - \sum_l \omega_{il} \wedge \omega_{lj} \Big) \otimes \sigma_j$$

$$R^\nabla_{ij} \in \Omega^2(U)$$

Bemerkung: Beim Übergang zu einer anderen Basis $(\sigma_1', \dots, \sigma_k')$ von E über U ändert sich die Matrix (R^∇_{ij}) durch Konjugation.

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}(R^\nabla) = \sum_i R^\nabla_{ii} \in \underbrace{\Omega^2(U)}_{\Omega^2(M)} \quad \text{ist wohl-definiert}$$

Lemma: $\mathrm{Tr}(R^\nabla) = d\sum_i \omega_{ii}$

d.h. die 2-Form $\mathrm{Tr}(R^\nabla)$ ist geschlossen, da lokal exakt.

Beweis: $\mathrm{Tr}(R^\nabla) = \sum_i R^\nabla_{ii}$

$= \sum_i d\omega_{ii} - \sum_i \omega_{ie} \wedge \omega_{ei}$

$$\sum_i \omega_{ie} \wedge \omega_{ei} \underset{i \leftrightarrow e}{=} \sum_i \omega_{ei} \wedge \omega_{ie} = -\sum_i \omega_{ie} \wedge \omega_{ei} \qquad \omega_{ie}, \omega_{ei} \in \Lambda^1$$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(R^\nabla) = d\sum_i \omega_{ii}$

Lemma: Die Kohomologie-Klasse $[\mathrm{Tr}(R^\nabla)] \in H^2(M, \mathbb{C})$ ist unabhängig von ∇.

Beweis: seien $\nabla, \tilde{\nabla}$ zwei Zusammenhänge auf E

$\Rightarrow A := \tilde{\nabla} - \nabla \in \Omega^1(M, \mathrm{End}\, E)$

$\Rightarrow \mathrm{Tr}(A)$ ist eine wohl definierte 1-Form auf M

$\mathrm{Tr}(R^{\tilde{\nabla}}) = \sum_i d\tilde{\omega}_{ii}$

$= \mathrm{Tr}(R^\nabla) + d(\mathrm{Tr} A)$

Lemma: $\mathrm{Tr}(R^\nabla)$ ist eine rein-imaginäre 2-Form

Beweis: man wählt eine hermitesche Struktur h auf E und ∇ verträglich mit h, d.h. $\nabla h \equiv 0$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ lokale ONB

$0 = \nabla \delta_{ij} = \nabla h(\sigma_i, \sigma_j) = h(\nabla\sigma_i, \sigma_j) + h(\sigma_i, \nabla\sigma_j)$

$= \omega_{ij} + \overline{\omega_{ji}}$

$\Rightarrow \overline{R^\nabla_{ij}} = d\overline{\omega_{ij}} - \sum_i \overline{\omega_{ie}} \wedge \overline{\omega_{ej}} = -d\omega_{ji} - \sum_i \omega_{ei} \wedge \omega_{je}$

$= -d\omega_{ji} + \sum_i \omega_{je} \wedge \omega_{ei}$

$= -R^\nabla_{ji}$ d.h. R^∇ ist rein-imaginär

Theorem: Sei ∇ ein Zus. auf einem komplexen Vektorbündel E über M. Die reelle Kohomologie-Klasse

$$c_1(\nabla) := \left[\frac{i}{2\pi} \operatorname{Tr}(R^\nabla) \right]$$

ist gleich dem Bild von $c_1(E)$ in $H^2(M,\mathbb{R})$

Beweis: man muss zeigen, dass $c_1(\nabla)$ die drei Bedingungen / Axiome erfüllt.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, dashed] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

- Natürlichkeit: $f: N \to M$

$$f^*E = \{ (x,v) \in N \times E \mid f(x) = \pi(v) \}$$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ lokale Basis in E $\Rightarrow$ $(f^*\sigma_1, \dots, f^*\sigma_k)$ lokale Basis in f^*E

$$(f^*\sigma_i)(x) = (x, \sigma_i(f(x)))$$

Zus. auf f^*E: $\quad f^*(\nabla f^*\sigma) := f^*(\nabla\sigma)$ pull-back Zusammenhang

$\Rightarrow$ $R^{f^*\nabla}_{ij} = f^*(R^\nabla_{ij})$ bzgl. $\{f^*\sigma_i\}$

$\Rightarrow$ $c_1(f^*\nabla) = f^*(c_1(\nabla))$

Whitney-Summen-Formel

(E,∇), $(F,\tilde\nabla)$ VB über M

$\Rightarrow$ $\nabla \oplus \tilde\nabla$ ist ein Zusammenhang auf $E \oplus F$

$$(\nabla \oplus \tilde\nabla)_X \, \sigma \oplus \tilde\sigma := (\nabla_X \sigma) \oplus (\tilde\nabla_X \tilde\sigma)$$

$\{\sigma_i\}$ lokale Basis von E, $\{\tilde\sigma_i\}$ lokale Basis von F

$\Rightarrow$ $\{\sigma_i \oplus 0, 0 \oplus \tilde\sigma_i\}$ lokale Basis von $E \oplus F$, bzgl. dieser Basis.

$$R^{\nabla \oplus \tilde\nabla} = \begin{pmatrix} R^\nabla & 0 \\ 0 & \tilde R^\nabla \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tr}(R^{\nabla \oplus \tilde\nabla}) = \operatorname{Tr}(R^\nabla) + \operatorname{Tr}(R^{\tilde\nabla})$$

Normalisierung : $L \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ tautologisches VB

$U_0 = \{[z_0:z_1] \mid z_0 \neq 0\}$
$U_1 = \{[z_0:z_1] \mid z_1 \neq 0\}$

$\sigma : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow L$

in lokalen Koordinaten: $\sigma_0 : U_0 \to \mathbb{C}$, $\sigma_1 : U_1 \to \mathbb{C}$

bzgl. der Standard-Trivialisierung

$\psi_i : \pi^{-1} U_i \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}$, $\psi_i(w) = (\pi(w), w_i)$

hermitesche Struktur h sei induziert von der Standardstruktur auf $\mathbb{C}$

∇ = Chern-Zus. auf L bzgl. h mit Zus-Form ω

σ sei ein lokaler holomorpher Schnitt in L d.h. $\nabla\sigma = \omega \otimes \sigma$

$u := |\sigma|^2$

$L = \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in \ell\}$

$\forall\, x \in T\mathbb{C}P^1$: $\partial_x u = \partial_x h(\sigma, \sigma)$

$x(u) = h(\nabla_x \sigma, \sigma) + h(u, \nabla_x \sigma)$

$= \omega(x)\, u + \overline{\omega}(x)\, u$

$\Rightarrow \omega + \overline{\omega} = d \log u = \frac{du}{u}$

ω ist eine (1,0)-Form da σ holomorph
$\nabla^{01} = \overline{\partial}$

$\rightarrow \omega = \partial \log u$

$\rightarrow R^\nabla = d\omega = d\,\partial \log u = \overline{\partial}\partial \log u$

d.h. z.z. ist: $\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}P^1} \overline{\partial}\partial \log u = -1$

Rechnung in $U_0 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{[0:1]\}$

$z := \phi_0 = \frac{z_1}{z_0}$ holomorphe Koordinate auf U_0

σ holom. Schnitt auf U_0 mit $\sigma_0 \equiv 1$

$\rightarrow \sigma(z) = (1, z)$

($\sigma(z)$ der Vektor in $\mathbb{C} \cdot (z_0, z_1)$ mit erster Koordinate $= 1$)

$\rightarrow u(z) = |(1,z)|^2 = 1 + |z|^2$

Polarkoordinaten: $z = r\cos\theta + i r \sin\theta$

Bsp.

$$\bar\partial\partial f = \frac{i}{2}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) dr\wedge d\theta \qquad , f = f(r,\theta)$$

Sei $\quad f(r,\theta) := \log(1+r^2)$

$$\Rightarrow \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}P^1} \bar\partial\partial \log u = \frac{i}{2\pi}\int_{(0,\infty)\times[0,2\pi)} \frac{i}{2}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) dr\wedge d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty d\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} r\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$= -\lim_{r\to\infty}\frac{r}{2}\cdot\frac{2r}{1+r^2} = -1$$

<u>Bezeichnung:</u> Sei M eine fast-komplexe Mfk., man definiert die erste Chern-Klasse von M, $c_1(M)$, als erste Chern-Klasse von $E = TM$, betrachtet als komplexes Vektor-bündel, d.h.

$$c_1(M) := c_1(TM)$$

<u>später:</u> $\quad c_1(M) = \left[\frac{1}{2\pi}\rho\right]$,

falls M Kähler mit Ricci-Form ρ

<u>Lemma:</u> Sei L ein holomorphes Geradenbündel mit Chern-Zus. D und sei σ ein beliebiger lokaler holomorpher Schnitt, dann gilt:

$$R^D = \bar\partial\partial\log|\sigma|^2 \qquad \left(\begin{array}{l}|\sigma|^2 = h(\sigma,\sigma)\\ h: \text{hermit. Struktur}\end{array}\right)$$

$$= -\partial\bar\partial\log|\sigma|^2$$

<u>Bemerkung:</u> Für die Ricci-Form wurde gezeigt:

$$\rho = -i\,\partial\bar\partial\log d$$

für $d = \det(h_{\alpha\bar\beta})$ $\qquad h = (h_{\alpha\bar\beta})$ Kähler-Metrik