<u>Satz:</u> Auf einer hermiteschen Mfk. (M, h, J) stimmen Chern- und Levi-Civita-Zusammenhang genau dann überein, wenn (M, h, J) Kähler ist

<u>Beweis:</u> $H := h - i\omega$ sei die hermitesche Struktur von TM

$\bar{\nabla} :=$ Chern-Zus., $\nabla :=$ Levi-Civita-Zus.

$\bar{\nabla} J = 0$ <u>da</u> $\bar{\nabla}$ ist komplexer Zus. $J \hat{=} i$.

- $\bar{\nabla} = \nabla \Rightarrow J$ ist ∇-parallel $\rightarrow h$ ist Kähler

- (M, h, J) Kähler $\rightarrow \nabla J = 0$ d.h. Levi-Civita-Zus. ist komplex-linearer Zus auf TM

  $\nabla h = 0$ <u>d.h.</u> ∇ ist ein H-Zus.

$$\nabla^{01}_X = \nabla_{\frac{1}{2}(X + iJX)} = \frac{1}{2}(\nabla_X + i\nabla_{JX})$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla_X + J\nabla_{JX})$$

$$= \bar{\partial}^{\nabla}\_(X)$$

<u>d.h.</u> $\nabla^{01} = \bar{\partial}$

und damit $\nabla = \bar{\nabla}$

12. Der Krümmungstensor von Kähler-Mfh.

1 Der Kählersche Krümmungstensor

Sei (M^{2m}, g, J) eine Kähler-Mfk. mit Levi-Civita-Zus ∇

$R = R^{\nabla}$ Riemannsche Krümmungstensor $\quad R_{X,Y}Z = R(X,Y)Z$

Symmetrien.
- $R(X,Y,Z,V) = -R(X,Y,V,Z)$
- $R(X,Y,Z,V) = R(Z,V,X,Y)$
- $R(X,Y,Z,V) + R(Y,Z,X,V) + R(Z,X,Y,V) = 0$
- $(\nabla_X R)(Y,Z,V,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,V,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,V,W) = 0$

Ricci-Krümmung.
$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= Tr(V \mapsto R(V,X)Y) \\ &= \sum_i g(R(e_i,X)Y, e_i) \\ &= \sum_i R(e_i,X,Y,e_i) \\ &= \sum_i R(X,e_i,e_i,Y) \end{aligned}$$

J ist ∇-parallel $\quad \{e_i\}$ lokale ONB

$\Rightarrow \quad R(X,Y)JZ = J R(X,Y)Z$

$\Rightarrow \quad R(X,Y,JZ,JV) = R(X,Y,Z,V) = R(JX,JY,Z,V)$

$$\begin{aligned} Ric(JX,JY) &= \sum_i R(e_i, JX, JY, e_i) = \sum_i R(Je_i, X, Y, Je_i) \\ &= \sum_i R(e_i, JX, JY, e_i) \\ &= Ric(X,Y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \rho(X,Y) := Ric(JX,Y)$ ist eine $(1,1)$-Form

Definition: Die Ricci-Form einer Kähler-Mfk. ist definiert durch.

$$\rho(X,Y) := Ric(JX,Y)$$

Satz: ① $Ric(X,Y) = \frac{1}{2} Tr\,(R(X,JY) \circ J)$

② $d\rho = 0$

Bem: $c_1(M)$ ist repräsentiert durch ρ, Krümmung von K

Beweis: zu ① $\{e_i\}$ lokale ONB

$$
\begin{aligned}
Ric(X,Y) &= \sum_i R(e_i, X, Y, e_i) = \sum_i R(e_i, X, JY, Je_i) \\
&= \sum_i \big(- R(X, JY, e_i, Je_i) - R(JY, e_i, X, Je_i) \big) \qquad (1.\,BI) \\
&= \sum_i \big(R(X, JY, Je_i, e_i) + R(Y, Je_i, X, Je_i) \big) \\
&= Tr\,(R(X,JY) \circ J) - Ric(X,Y)
\end{aligned}
$$

zu ②: $2\rho(X,Y) = Tr\,(R(X,Y) \circ J)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 2\, d\rho\,(X,Y,Z) &= 2\big((\nabla_X \rho)(Y,Z) + (\nabla_Y \rho)(Z,X) + (\nabla_Z \rho)(X,Y) \big) \\
&= Tr\big([(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y)] \circ J \big) \\
&= 0 \qquad (2.\,BI)
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

- $d^*\rho = -\frac{1}{2} J\, d\, scal$ ✓ (Übungsaufgaben)

- $R(\omega) = -\rho$ ✓

- R ist Null auf Λ^{02} und Λ^{20} ✓
  d.h. $R \in \Omega^{11}(\Lambda^{11})$

- (M,J) komplexe Mfk. ✓
  h, h' Kähler-Metriken mit $vol_h = vol_{h'}$
  $\Rightarrow \rho_h = \rho_{h'}$

- $Ric(X) = \frac{1}{2} \sum_j J R_{e_j, Je_j} X$

  da $Ric(X,Y) = \frac{1}{2} \sum_i g(R_{X,JY} Je_i, e_i) = \frac{1}{2} \sum_i g(R_{Je_i, e_i} X, JY)$
  $= \frac{1}{2} \sum_i g(J R_{e_i, Je_i} X, Y)$

13. Beispiele von Kähler-Metriken

① Die flache Metrik auf $\mathbb{C}^m$

$$h_{\alpha\bar\beta} = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar z_\beta}\right) = \frac{1}{4} h\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\beta} + i\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right) = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = i \cdot \frac{1}{2} \sum dz_\alpha \wedge d\bar z_\alpha = \frac{i}{2}\partial\bar\partial |z|^2$$

$$\Rightarrow \quad u(z) := \frac{1}{2}|z|^2$$

ist ein (globales) Kähler-Potential der kanonischen hermiteschen Metrik auf $\mathbb{C}^m$

② Die Fubini-Study-Metrik auf dem komplex projektiven Raum

(U_j, ϕ_j) kanonische holomorphe Karten auf $\mathbb{C}P^m$

$\pi : \mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^m$ kanonische Projektion

$\pi(z_0, \dots, z_m) = [z_0 : \dots : z_m]$ $\mathbb{C}^*$-HFB

lokale Trivialisierung $\psi_j : \pi^{-1}U_j \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^*$

$\psi_j(z) = ([z], z_j)$

Übergangsfunktionen: $\psi_j \circ \psi_k^{-1}([z], \alpha) = \left([z], \frac{z_j}{z_k}\cdot\alpha\right)$

$u : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ϕ_j Standardkarten für $\mathbb{C}P^m$

$u(w) = \log(1+|w|^2)$ $v(z) = \log(|z|^2)$

$j \in \{0, \dots, m\}$

man definiert: $f_j = \phi_j \circ \pi$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} & \mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\} \arrow[l, "v"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f_j"'] & U_j \subset \mathbb{C}P^m \arrow[dl, "\phi_j"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{C}^m \arrow[l, "u"'] &
\end{tikzcd}$$

- f_j ist holomorph
- $u \circ f_j(z) = v(z) - \log(|z_j|^2)$ auf $\mathbb{C}^{m+1}\setminus\{0\}$

$$f_j(z_0, \dots, z_m) = \phi_j([z_0 : \dots : z_m]) = \left(\frac{z_0}{z_j} \dots \frac{z_m}{z_j}\right)$$

$$\log |z|^2 - \log |z_j|^2$$

$$= \log \frac{|z|^2}{|z_j|^2} = \log \left(1 + \sum \frac{|z_i|^2}{|z_j|^2} \right)$$

$$u \circ f_j(z) = \log \left(1 + \sum_{i \neq j} \frac{|z_i|^2}{|z_j|^2} \right)$$

$\to \quad f_j^* \, \partial\bar\partial u = \partial\bar\partial v \qquad \forall j \qquad \longrightarrow$

§ da $\quad \partial\bar\partial \log(|z_j|^2) = 0 \quad$ dh $\omega_{[z]} = i\,\partial\bar\partial\, u \circ \phi_j$,

$[z] \mapsto (\frac{z}{z_j} \dots$
$\mapsto \log(1 + \sum |\frac{z_i}{z_j}|^2)$
$= \log \sum_i |\frac{z_i}{z_j}|^2$

Defi:

$\to \quad \omega|_{U_j} := i \; \phi_j^* \, \partial\bar\partial u \quad$ ist global auf $\mathbb{CP}^m$ definiert

und $\quad \pi^*\omega = i \; \pi^* \phi_j^* \, \partial\bar\partial u \qquad \forall j$

$\quad = i \, (\phi_j \circ \pi)^* \, \partial\bar\partial u \qquad \phi_j \circ \pi = f_j$

$\quad = i \, \partial\bar\partial v$

$\pi^* \phi_j^* \partial\bar\partial u = f_j^* \partial\bar\partial u = \partial\bar\partial v = \pi^* \phi_i^* \partial\bar\partial u$

π^* ist injektiv!
$\to$ ω ist global definiert

$\to \quad \omega$ ist eine geschlossene, reelle $(1,1)$-Form

da • $d(\partial\bar\partial f) = (\partial + \bar\partial)\, \partial\bar\partial f$ und $\partial^2 = 0 = \bar\partial^2$, $\partial\bar\partial = -\bar\partial\partial$

$\quad = 0$

• $\partial\bar\partial f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta \quad \in \Omega^{11}$

$\to \quad h(X,Y) := \omega(X, \partial Y) \quad$ ist symmetrisch und hermitesch

__Lemma:__ Der Tensor h ist positiv-definit auf $\mathbb{CP}^m$

__Beweis:__ $\quad h = \phi_j^* \hat h \quad$ mit $\hat h(X,Y) := i\,\partial\bar\partial u(X, \partial Y)$

zz: $\hat h$ ist positiv-definit auf $\mathbb{C}^m$

$$\partial\bar\partial \log(1 + |z|^2) = \partial\left(\frac{1}{1+|z|^2} \sum z_i \, d\bar z_i\right)$$

$$= \frac{1}{1+|z|^2} \sum_i dz_i \wedge d\bar z_i - \frac{1}{(1+|z|^2)^2} \sum \bar z_i \, dz_i \wedge \sum_i z_i \, d\bar z_i$$

__oBdA:__ in $p = (r, 0, \dots, 0) \quad r \in \mathbb{R}$

U_m wirkt transitiv auf $S_r^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m$ und erhält u und $\hat h$ (durch holom. Transf.)

$$\to \quad \partial\bar\partial \log(1 + |z|^2) = \frac{1}{(1+r^2)^2} \cdots$$

$$= \frac{1}{(1+r^2)^2}\left(\underbrace{(1+r^2)}\sum_i dz_i \wedge d\bar z_i - r^2 \, dz_1 \wedge d\bar z_1 \right)$$

$$= \frac{1}{(1+r^2)^2}\left(dz_1 \wedge d\bar z_1 + (1+r^2) \sum_{i=2}^m dz_i \wedge d\bar z_i \right)$$

• da: $\partial\bar\partial \log|z|^2$ $\qquad \bar\partial f = \sum \frac{\partial f}{\partial \bar z_i} d\bar z_i$

$z\in\mathbb{C}$: $z = z_1$

$$= \partial\left(\frac{1}{|z|^2} z\, d\bar z\right)$$

$$= \frac{1}{|z|^2} dz \wedge d\bar z - \frac{1}{|z|^4} \bar z\, dz \wedge z\, d\bar z$$

$$= \frac{1}{|z|^2} dz \wedge d\bar z - \frac{1}{|z|^2} dz \wedge d\bar z = 0$$

• $\omega_j := i\, \phi_j^* \,\partial\bar\partial \log(1+|w|^2)$ auf U_j

$$= i\,\partial\bar\partial \log\left(\sum_{j=0}^{m} \left|\frac{z_k}{z_j}\right|^2\right)$$

$\left(\text{auf } \mathbb{C}^m: \; i\,\partial\bar\partial \log(1+\sum_{i=1}^{m}|w_i|^2)\right)$

direkt: $\omega_j\big|_{U_i\cap U_j} = \omega_i\big|_{U_i \cap U_j}$

da: $\log \sum \left|\frac{z_k}{z_i}\right|^2 = \log\left(\left|\frac{z_j}{z_i}\right|^2 \sum \left|\frac{z_k}{z_j}\right|^2\right)$

$$= \log\left|\frac{z_j}{z_i}\right|^2 + \log \sum \left|\frac{z_k}{z_j}\right|^2$$

$\Rightarrow$ zz $\partial\bar\partial \log\left(\left|\frac{z_j}{z_i}\right|^2\right) = 0$ auf $U_i \cap U_j$

$\frac{z_j}{z_i}$ ist die jte-Koordinatenfunktion auf U_i

! daher folgt die Behauptung aus.

$\partial\bar\partial \log|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{|z|^2} z\, d\bar z\right) = \partial\left(\frac{1}{z} d\bar z\right) = 0$ siehe oben