15. Vorlesung
17. 12. 2019

Wiederholung

- $$\Lambda^k_{\mathbb{C}} M = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} M \qquad (*)$$

$$= \bigoplus_{j\geq 0} \bigoplus_{p+q=k-2j} L^j \left(\Lambda^{p,q}_0 M\right)$$

$$\Lambda^{p,q}_0 M = P^{p,q} = \operatorname{Ker} \Lambda|_{\Lambda^{p,q}}$$

primitiver Teil

zB: $$\Lambda^2_{\mathbb{C}} M = \Lambda^{2,0} M \oplus \Lambda^{1,1} M \oplus \Lambda^{0,2} M$$

$$= \Lambda^{2,0}_0 M \oplus \left(\Lambda^{1,1}_0 M \oplus \mathbb{C}\omega\right) \oplus \Lambda^{0,2}_0 M$$

Bemerkung:
- Die Zerlegung $(*)$ entspricht (punktweise) der Zerlegung von Λ^k in irreduzible Summanden als $U(n)$-Darstellung (Lefschetz-Zerlegung)
- Die Zerlegung $(*)$ induziert eine entsprechende Zerlegung der Kohomologie

  da: L, H, Λ kommutieren mit Δ

- $L^s : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{k+2s}$

ist: injektiv für $0 \leq s \leq n-k$ $\qquad (n = \dim_{\mathbb{C}})$

surjektiv für $s \geq n-k$

Insbesondere:

$$\left.\begin{aligned} L^{n-k} &: \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{2n-k} \\ L^r &: \Lambda^{n-r} \longrightarrow \Lambda^{n+r} \end{aligned}\right\} \text{ ist ein Isomorphismus}$$

- $$P^k = \{\alpha \in \Lambda^k_{\mathbb{C}} \mid L^{n-k+1}\alpha = 0\} \qquad \text{für } k \leq n$$

Die Hodge – Riemann Bilinear – Relationen

↗ D. Huybrechts

$\dim V = 2n$

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ ein euklidischer VR mit verträglicher fast-komplexer Struktur J, $\omega(X,Y) = \langle JX, Y \rangle$

Definition: Die Hodge – Riemann – Bilinearform ist definiert durch:

$(\omega^n = n!\, vol)$

$$Q : \Lambda^k V^* \times \Lambda^k V^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Q(\alpha, \beta) := (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \quad \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-k}$$

wobei $\Lambda^{2n} V^* \cong \mathbb{R}$ mittels der Volumenform.

es gilt:

$Q(L^s\alpha, L^s\beta) = Q(\alpha, \beta)$!

Bemerkung:
- Es ist $Q = 0$ für $k > n$
- Q bezeichnet auch die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von Q auf $\Lambda^* V^*_{\mathbb{C}}$

Folgerung (Hodge – Riemann – Bilinear-Relation)

- $Q \equiv 0$ auf $\Lambda^{p,q} V^* \times \Lambda^{p',q'} V^*$ für $(p,q) \neq (q', p')$
- $i^{p-q} Q(\alpha, \bar{\alpha}) = (n - (p+q))! \, \langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathbb{C}} > 0$

  für alle $\alpha \in P^{p,q}$, $\alpha \neq 0$, $p+q \leq n$

$(n = \dim_{\mathbb{C}})$

zum Beweis: $p+q = k$, $p' + q' = k$

$p + p' + n-k = n$

$\rightarrow p + p' = k$

$\rightarrow p = k - p' = q'$

analog: $q = p'$

Bemerkung:
$Q(\alpha, \beta) = (-1)^k Q(\beta, \alpha)$

Beweis:

- Man setzt J fort zu einem Endomorphismus von $\Lambda^k V^*$

  $(J\alpha)(v_1, \dots, v_k) := \alpha(Jv_1, \dots, Jv_k)$

  andere Vorzeichen-Konvention! (gruppenwirkung)

  $\Rightarrow J|_{\Lambda^{p,q}} = i^{p-q}\, \mathrm{Id}$

- Satz: $\ast L^j \alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \dfrac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j} J(\alpha)$

  für alle $\alpha \in P^k$

  Insbesondere: $\ast L^{n-k} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (n-k)!\, J$

- $$Q(\alpha, \bar\alpha)\, vol = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha \wedge \bar\alpha \wedge \omega^{n-k}$$
  $$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha \wedge L^{n-k} \bar\alpha$$
  $$= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}}\, vol$$

wobei: $k = p+q$, $\beta \in \Lambda^k V^*$ mit: $\ast \bar\beta = L^{n-k} \bar\alpha$

$$\to \ast^2 \bar\beta = (-1)^k \bar\beta = \ast L^{n-k} \bar\alpha$$
$$= (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} (n-k)!\, i^{q-p} \bar\alpha$$

$$\to \beta = (-1)^{k + \frac{k(k+1)}{2}} (n-k)!\, i^{p-q} \alpha$$

$$\to Q(\alpha, \bar\alpha) = (-1)^{k + \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}} (n-k)!\, i^{q-p} \langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\Rightarrow i^{p-q} Q(\alpha, \bar\alpha) = (n-k)! \langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathbb{C}} > 0$$

später: für alle $\alpha \in P^{p,q}$, $\alpha \neq 0$ $\qquad k = p+q$

Anwendung: Sei $p+q \equiv 0 (2)$ $\to$ p, q haben die gleiche Parität $\to (p+q)^2 \equiv 0 (4)$

$$i^{p-q} \cdot (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} = i^{(p+q)(p+q-1) + p-q} = i^{-p-q+p-q} = (-1)^q = (-1)^p$$

$\Rightarrow$ die Schnittform ist positiv-definit auf $H^{p,q}$ mit $p, q \equiv 0 (2)$ und negativ definit auf $H^{p,q}$ mit $p, q \equiv 1 (2)$.

Beispiel: $n \geq 2$

$$(\Lambda^{1,1} V^*)_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\omega \oplus P^{1,1}_{\mathbb{R}} \qquad \left((\cdots)_{\mathbb{R}} = (\cdots) \cap \Lambda^2 V^* \right)$$

- Die Zerlegung ist Q-orthogonal

  da $Q(\alpha, \omega) = \alpha \wedge \omega \wedge \omega^{n-2} = \alpha \wedge \omega^{n-1} = 0$

  da $\alpha \in P^{1,1}$

  $\alpha \in P^2 \rightarrow L^{n-1}\alpha = 0$!

- Q ist negativ-definit auf $\mathbb{R}\omega$

  da $Q(\omega, \omega) = -\omega^n = -1$

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \in P^{1,1}_{\mathbb{R}} \\ \Leftrightarrow \alpha \in P^{1,1} \\ \bar{\alpha} = \alpha \end{array} \right)$$

- Q ist positiv-definit auf $P^{1,1}_{\mathbb{R}}$

  da $Q(\alpha, \bar{\alpha}) = (n-2)! \langle \alpha, \alpha \rangle_c \qquad p = q = 1$!

Satz: Sei (M^{2n}, g, J) eine kompakte Kähler-Mfk. Dann gilt für $\alpha \in H^{p,q}(M)_0 = H^{p,q}(M) \cap \operatorname{Ker} \Lambda$ (primitive Kohomologie)

$$i^{p-q} (-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} \int_M \alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \omega^{n-p-q} > 0$$

Bemerkung: • Aufgrund der Lefschetz-Zerlegung

$$H^m(M) = \bigoplus_{k \geq 0} L^k H_0^{m-2k}$$

und da $Q(L^k\alpha, L^k\beta) = Q(\alpha, \beta)$ folgt, dass Q auf $H^m(M)$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

?

$$\left(\begin{array}{l} \bullet\ p+q \equiv 0(2), \quad k = p+q \\ \rightarrow i^{p-q} \cdot Q \text{ ist positiv-definite} \\ \text{quadratische Form auf dem reellen VR} \\ (H^{p,q}(M)_0 \oplus H^{q,p}(M)_0) \cap H^{p,q}(M, \mathbb{R}) \end{array} \right)$$

Später genauer →

Sei M eine kompakte, or. Mft., $\dim M = 2n$, $n \equiv 0(2)$

dann ist auf $H^n_{dR}(M)$ eine symmetrische Bilinearform definiert.

$$B(\alpha, \beta) := \int_M \alpha \wedge \beta$$ Schnittform

Aufgrund der Poincaré-Dualität ist B ~~[illegible]~~ nicht entartet.

Signatur von M: $\sigma(M) =$ Signatur von B — topologische Invariante

Spezialfall:

Folgerung (Hodge-Index-Satz)

Sei M eine kompakte Kähler-Fläche, dann hat die Schnittform ~~[illegible]~~ den Index

$$(2h^{2,0}+1,\ h^{1,1}-1)$$

und eingeschränkt auf H^{11} den Index $(1, h^{11}-1)$

d.h. immer genau einen pos. EW

Beweis:

$$H^2(M,\mathbb{R}) = \left((H^{20} \oplus H^{02}) \cap H^2(M,\mathbb{R}) \right) \oplus H^{11}(M,\mathbb{R})$$

- $\alpha = \alpha^{20} + \alpha^{02} \in H^2(M,\mathbb{R})$ $\longrightarrow$ $\alpha^{2,0}, \alpha^{0,2}$ sind primitiv

$\rightarrow \int_M \alpha \wedge \alpha = 2\int_M \alpha^{20} \wedge \alpha^{02}$

$= 2\int_M \alpha^{20} \wedge \overline{\alpha^{20}} > 0$ da $p=2, q=0, p+q=2$

dh die Schnittform ist positiv-definit auf dem 1. Summanden

- $H^{11}(M,\mathbb{R}) = \mathbb{R}[\omega] \oplus H^{11}(M)_0$

orthogonal: $\int_M \omega \wedge \alpha = 0$ α primitiv

Hodge-Riemann: $\int_M \alpha^2 < 0$ $\alpha \in H^{11}(M)_0$

pos.-def. auf ω $\int \omega^2 = c \cdot \mathrm{vol}(M) > 0$

Beispiel: • $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ trägt keine Kähler-Struktur

dim M = 4:

Donaldson: $B > 0 \rightarrow$ diagonalisierbar zu 1

da $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Friedman: Jede symm., unimodulare BF ist Schnittform einer top. Mfk.

• $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ trägt keine komplexe Struktur

Schnittform bestimmt Homöomorphietyp rk, Sig., par

da: $b_1(X^4) \equiv 0 \ (2)$, X komplex, kompakt $\rightarrow X$ Kähler

Anwendung $\longrightarrow$

Satz (Hodge-Index-Satz)

Sei M eine kompakte Kähler-Mft. der reellen Dimension $2m$ mit m gerade. Dann gilt:

$$\sigma(M) = \sum_{p+q \equiv 0(2)} (-1)^q h^{p,q}(M)$$

$$= \sum_{p,q} (-1)^q h^{p,q}(M)$$

$k = p+q$

Beweis: • $\displaystyle\sum_{p+q=k} (-1)^q h^{p,q}(M) = 0$ für $k \equiv 1 \ (2)$

da: $h^{p,q} = h^{q,p}$, $p+q \equiv 1(2) \rightarrow q \equiv 1(2) \Leftrightarrow p \equiv 0(2)$

$m \equiv 0(2)$!

$\Rightarrow$ die zweite Gleichung folgt aus der ersten

• $$\sigma(M) = \sum_{\substack{p+q \leq m \\ p,q \equiv 0(2)}} h_0^{p,q}(M) - \sum_{\substack{p+q \leq m \\ p,q \equiv 1(2)}} h_0^{p,q}(M)$$

da: $p+q \leq m$ + $Q(L^s\alpha, L^s\beta) = Q(\alpha, \beta)$ siehe oben

Schnittform ist positiv-definit / negativ-definit auf $L^s H_0^{p,q}$, $p,q \equiv 0(2)$ / $p,q \equiv 1(2)$

• $$h_0^{p,q}(M) = h^{p,q}(M) - h^{p-1,q-1}(M)$$

$m = n$

$$\Rightarrow \sigma(M) = \sum_{\substack{p+q \leq m \\ p+q \equiv 0(2)}} (-1)^q \left(h^{p,q}(M) - h^{p-1,q-1}(M) \right)$$

$$= \sum_{\substack{p+q = m \\ p+q \equiv 0(2)}} (-1)^q h^{p,q}(M) + 2 \sum_{\substack{0 < p+q < m \\ p+q \equiv 0(2)}} (-1)^q h^{p,q}(M)$$?

$$= \sum_{p+q \equiv 0(2)} (-1)^q h^{p,q}(M)$$

in diese Summe lat man noch die Summe der mit $m \leq p+q \leq 2m$

da • $h^{p,q}(M) = h^{m-p,m-q}(M)$

und $p \equiv m-p \ (2)$, $q \equiv m-q \ (2)$

• $p+q < m \iff (m-p) + (m-q) > n$

Beispiel: $\dim_{\mathbb{C}} M = m = 2$

$b_2 = 2h^{20} + h^{11}$

$h^{11} = h^{11}_0 + h^{00} = h^{11}_0 + 1$

$b^1 = 2h^{10}$

$\sigma = h^{00} + h^{0,2} + h^{2,0} + h^{22} - h^{11}$

$= 2 + b_2 - 2h^{11}$

$\rightarrow h^{1,0}, h^{0,1}, h^{2,1}, h^{1,2}$ sind topologische Invarianten

$h^{2,0}, h^{0,2}, h^{1,1}$ sind diff.bare Invarianten ?