$\rightarrow \quad u \leq 0$ in jedem Maximum-Punkt nach (**)

$\rightarrow \quad u \leq 0$ auf M

analog: $u \geq 0$ in jedem Minimum-Punkt

$\rightarrow u \geq 0$ auf M

$\rightarrow \quad u \equiv 0$ auf M

schon gesehen: $d\,\mathrm{Cal}(v) = -\Delta^{\bar\partial} v$ in $u=0$, $v \in T_0 C^\infty_+(M)$

$\rightarrow \quad d\,\mathrm{Cal}^-(v) = -v - \Delta^{\bar\partial} v$

$\rightarrow \quad d\,\mathrm{Cal}^-$ ist eine Bijektion von $C^\infty(M)$

da $v \mapsto \frac{1}{2}\Delta v + v$ ist selbst-adjungiert, elliptisch ohne Kern, vom Index Null

__Bemerkung:__ • Dieses Argument ist __nicht__ möglich für Cal^+

• schwerer Teil des Beweises: Surjektivität von Cal^-

---

siehe oben

__Definition:__ Eine Fano-Mft. ist eine kompakte komplexe Mft. M mit $c_1(M) > 0$

__Folgerung:__ Ist M eine Fano-Mft., dann existiert auf M eine Kähler-Metrik mit positiver Ricci-Krümmung

__ab jetzt:__ $c_1(M) > 0$

__Frage:__ Existieren Kähler-Einstein-Metriken

$$\cancel{(**) \Rightarrow (\omega_1 + i\partial\bar\partial u)^m = e^u \omega_1^m \,, \quad \alpha := i\partial\bar\partial u}$$

$$\cancel{\Rightarrow (e^u - 1)\,\omega_1^m = \alpha \wedge (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} \wedge \omega_1 + \dots + \omega_1^{m-1})}$$

$$\cancel{\Rightarrow e^u - 1 \le 0}$$

$$\cancel{\Rightarrow u \le 0}$$

nochmal: man wählt Koordinaten mit

$$g^1_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\bar\beta} \,, \quad i \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\bar\beta} \,, \quad \lambda_\alpha \le 0$$

$$\Rightarrow \log \frac{(\omega_1 + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega_1^m} = \log \det (\delta_{\alpha\bar\beta} + \lambda_\alpha \delta_{\alpha\bar\beta})$$

$$= \sum \log(1 + \lambda_\alpha) \qquad \le 0$$

$$\partial\bar\partial f = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta$$

Einschub: Holomorphe Vektorfelder

$Z \in \Gamma(T^{10}M)$ holomorph $\Leftrightarrow Z = \sum_\alpha Z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}$, Z_α holom.

d.h. Z ist ein holomorpher Schnitt von $T^{10}M$

$X \in \Gamma(TM)$ ist (reell) holomorph $\Leftrightarrow Z = X - iJX$ ist holomorph

$\Leftrightarrow L_X J = 0$

$\Leftrightarrow [X, JY] = J[X,Y]$

d.h. Fluß von X sind holom. Transf.

$h(M)$ = LA der holomorphen VF

$a(M)$ = LA der (reell) holomorphen VF

$= \mathrm{Lie}\, A(M)$

M kompakt, komplex
$A(M)$ = Automorphismengruppe von (M, J) komplexe Lie-Gruppe

$H(M)$ = Gruppe der holom. Transf.
M kompakt $\Rightarrow$ Lie Gruppe
$H(\mathbb{C}^n)$ ist ∞-dim keine Lie Gruppe

Identifikation: $a(M) \xrightarrow{\sim} h(M)$
$X \mapsto X - iJX$

$(JX)^{10} = iX^{10}$
wieder holomorph!

$a(M)$ hat die Struktur einer komplexen LA, isomorph zu $h(M)$

Bezeichnung: $\nabla = \nabla^{10} + \nabla^{01}$

auf TM: $\nabla X \in \Omega^1(TM)$

$\nabla^{10}X = \frac{1}{2}(\nabla X - J\nabla X \circ J)$ J-invariant

$\nabla^{01}X = \frac{1}{2}(\nabla X + J\circ\nabla X\circ J)$ J-antiinvariant

Lemma: X ist reell-holomorpher VF

$\Leftrightarrow \nabla^{01}X = 0 \Leftrightarrow \nabla X \circ J = J \circ \nabla X$ $\left(\hat{=}\ \underbrace{\bar\partial X^{10}}_{=\nabla^{01}X} = 0 \ ! \right)$

Beweis: X reell-holomorph $\Leftrightarrow \nabla_X JY - \nabla_{JY}X = J\nabla_X Y - J\nabla_Y X$

$\Leftrightarrow \nabla_{JY}X = J\nabla_Y X$ da $\nabla_X JY = J\nabla_X Y$

$\Leftrightarrow \nabla_Y X + J\nabla_{JY}X = 0$

$\Leftrightarrow \nabla^{01}X = 0$

Sei (M,g) eine Riemannsche Mfk.

Killing-VF: $X \in \mathfrak{X}(M)$ mit $L_X g = 0$ (= Fluß aus Isometrien)

$\Leftrightarrow$ ∇X ist schief-symmetrisch

$\Leftrightarrow$ $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$

Satz: X Killing $\rightarrow$ ① $\Delta X = 2\,\mathrm{Ric}(X)$ ② $d^* X = 0$

d.h. $\nabla^* \nabla X = \mathrm{Ric}(X)$

(Bochner-Formel auf 1-Formen: $\Delta X = \nabla^*\nabla X + \mathrm{Ric}(X)$)

z.B. $\mathrm{Ric} > 0 \rightarrow$ es ex. keine parallelen VF, $\neq 0$

(M,g) kompakt, X Killing $\Leftrightarrow$ ①, ② sind erfüllt

Bemerkung: $d^* X = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}(X) = 0 \Leftrightarrow L_X \mathrm{vol}_g = 0$

d.h. der Fluß ist volumenerhaltend

Sei E ein Vektorbündel mit einem Zus. ∇ und damit Struktur

$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E)$

$\nabla^* : \Gamma(T^*M \otimes E) \longrightarrow \Gamma(E)$ adjungierter Operator bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$\nabla^* = -\mathrm{Tr} \circ \nabla^{T^*M \otimes E} : \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes E) \xrightarrow{-\mathrm{Tr}} \Gamma(E)$

$\Rightarrow \nabla^*\nabla = -\mathrm{Tr}\,\nabla^2 = -\sum_i (\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i})$

Bochner-Formel. $\Delta X = \nabla^*\nabla X + \mathrm{Ric}(X)$

für alle VF X auf M

M kompakt

Folgerung: ① $\mathrm{Ric} \leq 0$, X Killing $\Leftrightarrow \nabla X = 0$

② $\mathrm{Ric} < 0 \rightarrow$ es ex keine Killing-VF, keine parallele VF $\neq 0$

$\rightarrow \mathrm{Iso}(M,g)$ ist diskret

Lemma: Sei (M, g, J) eine Kähler-Mft., dann gilt.

$$\nabla^* \nabla^{10} - \nabla^* \nabla^{01} = Ric \qquad (*)$$

Beweis. $\nabla^* \nabla^{10} - \nabla^* \nabla^{01} = -\nabla^* J \circ \nabla X \circ J$

$= - J \circ \nabla^* \circ \nabla X \cdot J$

$\Rightarrow (\nabla^* \nabla^{10} - \nabla^* \nabla^{01}) X = J \sum_i Tr\,(e_i \otimes e_j \otimes \nabla_{e_i} \nabla_{Je_j} X)$

$= J \sum_i \nabla_{e_i} \nabla_{Je_i} X$

$= \frac{1}{2} J \sum_i R_{e_i, Je_i} X = Ric(X)$

da $g(Ric(X), Y) = Ric(X, Y) \overset{\text{uma}}{=} \frac{1}{2} \sum_i g(R_{X, JY} Je_i, e_i)$

$= \frac{1}{2} \sum_i g(R_{Je_i, e_i} X, JY) = \frac{1}{2} \sum_i g(J R_{e_i, Je_i} X, Y)$

Folgerung: Sei (M, g, J) eine Kähler-Mft., dann gilt:

① $\Delta X = 2 \nabla^* \nabla^{10} X$

② $\Delta X = 2 \nabla^* \nabla^{01} X + 2 Ric(X)$

③ $Ric \geq c \Rightarrow \Delta \geq 2c$

Einstein: $Ric = \frac{scal}{2m} \Rightarrow \Delta \geq \frac{scal}{m}$

} auf TM

Beweis: $\nabla^* \nabla = \nabla^* \nabla^{10} + \nabla^* \nabla = \Delta - Ric \qquad (**)$

- $(*) + (**)$: $2 \nabla^* \nabla^{10} = \Delta$ auf TM !
- $(**) - (*)$: $2 \nabla^* \nabla^{01} = \Delta - 2 Ric$

Bemerkung: Lichnerowicz-Obata-Theorem

(M, g) Riemannsche Mft. mit $Ric \geq c$

$\Rightarrow \Delta \geq \frac{n}{n-1} \cdot c$

"=" $\Leftrightarrow M = S^n$, $\qquad (2c \geq \frac{n}{n-1} c\,!)$

Satz: Sei (M, g, J) eine Kähler-Mft., dann gilt

$$X \text{ reell holomorph} \rightarrow \nabla^*\nabla X = \mathrm{Ric}(X) \qquad (*)$$

Ist M kompakt, dann gilt auch die Umkehrung

Beweis: X reell holomorph $\Leftrightarrow \nabla^{01} X = 0$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \Delta X = 2\,\mathrm{Ric}(X)$

$\overset{\text{Bochner}}{\longrightarrow} \nabla^*\nabla X = \mathrm{Ric}(X)$

M kompakt,

$\nabla^*\nabla X = \mathrm{Ric}(X) \overset{(*)}{\Longrightarrow} 2\, \nabla^*\nabla^{01} X = 0$

$\overset{\text{Integration}}{\longrightarrow} \nabla^{01} X = 0$ d.h. X reell-holomorph

Satz: Sei (M, g, J) eine kompakte Kähler-Mft., dann gilt.

(schon gezeigt →) ① X Killing-VF $\rightarrow X$ reell holomorphes VF

② X reell holomorph, $L_X \mathrm{vol} = 0 \rightarrow X$ Killing

Beweis: zu ① X Killing $\rightarrow \nabla^*\nabla X = \mathrm{Ric}(X)$

zu ② X volumenerhaltend (bzw. der Fluß von X)

$\Leftrightarrow L_X \mathrm{vol} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}\, X = 0 \Leftrightarrow d^* X = 0$

siehe oben: X Killing $\Leftrightarrow \nabla^*\nabla X = \mathrm{Ric}(X)$
$d^* X = 0$

• KE: X holom. $\rightarrow \Delta X = \frac{\mathrm{scal}}{m} X$

• $\mathrm{Ric} = 0$: holomorph $\Leftrightarrow$ parallel

Bemerkung: • (M, g, J) kompakte Kähler Mft., $\mathrm{Ric} < 0$ (d.h. $c_1(M) < 0$)

$\rightarrow A(M)$ ist endlich

da: • $(*) \rightarrow \mathfrak{a}(M) = 0 \rightarrow A(M)$ ist diskret

endlich viele Zus. komp.

• $c_1(M) < 0 \rightarrow M$ ist projektiv, $M \hookrightarrow \mathbb{C}P^N \rightarrow A(M) \subset PGL(N+1, \mathbb{C})$