(2) Kähler - Metriken

Definition: Eine hermitesche Metrik h auf einer fast-komplexen Mfk (M, J) heißt Kähler, wenn J integrabel und die fundamentale 2-Form ω geschlossen ist, d.h.

$$h \text{ Kähler} \iff N_J \equiv 0, \quad d\omega = 0$$

Bemerkung: Aus dem lokalen $i\partial\bar\partial$-Lemma folgt die Existenz einer reellen Funktion u (in einer Umgebung jedes Punktes) mit

$$\omega = i\partial\bar\partial u$$

In lokalen Koordinaten schreibt sich das als

$$h_{\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta}$$

Eine lokal definierte reelle Funktion u mit $\omega = i\partial\bar\partial u$ heisst lokales Kähler-Potential der Kähler-Metrik h

Übersetzung der Kähler-Bedingung in die Sprache der Riemannschen Geometrie.

Lemma. Sei h eine hermitesche Metrik auf einer fast-komplexen Mfk (M, J) und sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang von h. Dann ist J genau dann integrabel, wenn

$$(*) \qquad (\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_X J)Y \qquad \forall\, X, Y \in TM$$

Beweis: $(\nabla_X J)Y := \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$

nicht nötig [$x \in M$, man setzt X, Y fort zu VF auf M mit $\nabla X = 0 = \nabla Y$ in x]
$\hookrightarrow [X,Y]_x = 0$!

zz: $N_J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$

$$= J(\nabla_X J)Y - J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JX} J)Y + (\nabla_{JY} J)X$$

$$(*)' \quad = \big(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y\big) - \big(J(\nabla_Y J)X - (\nabla_{JY} J)X\big)$$

d.h. $(*) \Rightarrow N_J \equiv 0$

umgekehrt: Vor: $N_J \equiv 0$, $\quad A(X,Y,Z) := h\big(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z\big)$

- $(*)' \mathrel{\hat{=}} \quad A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z)$
- $A(X,Y,Z) = -A(X,Z,Y)$

da $\quad J \circ \nabla_X J = -\nabla_X J \cdot J \,, \quad J^2 = -\mathrm{Id} \Rightarrow \nabla_X J \circ J + J \circ \nabla_X J = 0$

und: $J, \nabla_X J$ sind schief-symmetrisch

$$h(J(\nabla_X J)Y - (\nabla_{JX} J)Y, Z)$$
$$= h(Y, (\nabla_X J) \cdot JZ + (\nabla_{JX} J)Z)$$
$$= -h(Y, J(\nabla_X J)Z - (\nabla_{JX} J)Z)$$
$$= -A(X,Z,Y)$$

$$\Rightarrow A(X,Y,Z) \overset{1}{=} A(Y,X,Z) = -A(Y,Z,X) \overset{2}{=} -A(Z,Y,X)$$
$$= A(Z,X,Y)$$
$$= -A(X,Y,Z) \qquad \text{da } 1 = 2$$

$\Rightarrow \quad A \equiv 0 \qquad$ d.h. $(*)$ ist erfüllt.

<u>Theorem</u>: Eine hermitesche Metrik h auf einer fast-komplexen Mft. (M, J) ist genau dann Kähler, wenn J parallel bzgl. des Levi-Civita-Zusammenhangs von h ist.

<u>Beweis</u>: • $\nabla J \equiv 0 \Rightarrow$ • $N_J \equiv 0$ d.h. J ist integrabel

da $(*)$ trivialerweise erfüllt ist

• $\nabla \omega \equiv 0$

da $\quad \omega = h \circ J \qquad \nabla h = 0$, ∇: LC-Zus. von h

$\Rightarrow d\omega = 0$

da $\quad d\omega = \sum_i e_i^* \wedge \nabla_{e_i} \omega \qquad \{e_i\}$ ONB

• <u>Vor.</u>: h Kähler : $\quad N_J \equiv 0, \; d\omega = 0$

$B(X,Y,Z) := h((\nabla_X J)Y, Z) \qquad B = \nabla J$

$\Rightarrow$ • $B(X,Y,JZ) = B(X,JY,Z) \qquad$ da $J, \nabla_X J$ anti-kom.

• $B(X,Y,JZ) = -B(JX,Y,Z) \qquad$ nach $(*)$

$\Rightarrow \quad B(X,JY,Z) = -B(JX,Y,Z)$

- $d\omega = \sum_i e_i^* \wedge \nabla_{e_i}\omega$

$$\Rightarrow d\omega(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\sigma} e_i^*(X)(\nabla_{e_i}\omega)(Y,Z)$$
$$= \underset{XYZ}{\sigma} (\nabla_X\omega)(Y,Z) = \underset{XYZ}{\sigma} h((\nabla_X J)Y,Z)$$
$$= h((\nabla_X J)Y,Z) + h((\nabla_Y J)Z,X) + h((\nabla_Z J)X,Y)$$

- man nutzt $d\omega = 0$ für $(X,Y,Z) = (X,Y,JZ)$ und (X,JY,Z)

$$\Rightarrow B(X,Y,JZ) + B(Y,JZ,X) + B(JZ,X,Y) = 0$$
$$B(X,JY,Z) + B(JY,Z,X) + B(Z,X,JY) = 0$$

Addition
$$\Rightarrow 2B(X,Y,JZ) = 0$$
$$\Rightarrow \nabla J = 0$$

Bewegung von J:
1. $\to$ 3. Stelle : $-$
2. $\to$ 3. Stelle : $+$
1. $\to$ 2. Stelle : $-$

<u>Bemerkung</u>: • Man hat also gezeigt, dass
$$2h((\nabla_X J)Y,Z) = d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ)$$
und damit
$$d\omega = 0 \Rightarrow \nabla J = 0$$

$$(\nabla_X\omega)(Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y,Z) - \omega(Y,\nabla_X Z)$$
$$= X(h(JY,Z)) - h(J\nabla_X Y,Z) - h(JY,\nabla_X Z)$$
$$= h(\nabla_X(JY),Z) + h(JY,\nabla_X Z)$$
$$- h(J\nabla_X Y,Z) - h(JY,\nabla_X Z)$$
$$= h((\nabla_X J)Y,Z)$$

- (M,g,J) fast-Hermitesch
$$4g((\nabla_X J)Y,Z) = 6d\omega(X,Y,Z) - 6d\omega(X,JY,JZ)$$
$$+ g(N(Y,Z),JX)$$

Erinnerung:

- $E \to M$ holomorphes VB

$\rightsquigarrow$ $\bar\partial$ - Operator: $\bar\partial \sigma = \sum_i \bar\partial \sigma_i \otimes e_i$

wobei $\sigma = \sum_i \sigma_i \otimes e_i$, $\{e_i\}$ lokale holomorphe Schnitte

(i) $\bar\partial^2 = 0$

(ii) Leibniz - Regel: $\bar\partial(\omega \wedge \sigma) = (\bar\partial \omega) \wedge \sigma + (-1)^{p+q} \omega \wedge \bar\partial \sigma$

umgekehrt: (i), (ii) bestimmen eine holomorphe Struktur

- E holom. VB mit holomorpher Struktur $\bar\partial$ und einer Hermiteschen Struktur H

$\to \exists!$ H-Zus. ∇ mit $\nabla^{01} = \bar\partial$

Chern - Zus.

④ Vergleich von Levi-Civita- und Chern-Zusammenhang

Sei (M, h, J) eine hermitesche Mft. → TM ist ein komplexes Vektorbündel mit einer hermiteschen Struktur und einer holomorphen Struktur

→ auf TM hat man den Levi-Civita-Zus. ∇^h von h und den Chern-Zus. ∇ mit $\nabla^{01} = \bar\partial$

__Lemma:__ Der $\bar\partial$-Operator des komplexen Vektorbündels (TM, J) ist gegeben durch:

$$\bar\partial^\nabla Y(X) = \frac{1}{2}\left(\nabla^h_X Y + J\nabla^h_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X\right) \qquad \bar\partial : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$$

__Bemerkung:__ $\bar\partial^\nabla Y \in \Omega^{01}(TM)$

da: $$\bar\partial^\nabla Y(JX) = \frac{1}{2}\left(\nabla_{JX} Y - J\nabla_X Y - (\nabla_Y J)X\right)$$
$$= -J\,\frac{1}{2}\left(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X\right)$$
$$= -J\,\bar\partial^\nabla Y(X)$$
$$\Rightarrow \bar\partial^\nabla Y(X) - J\,\bar\partial^\nabla Y(JX) = 0$$
$$\Rightarrow \bar\partial^\nabla Y(X - iJX) = 0$$

__Beweis:__ • $$\bar\partial f(X) = \frac{1}{2} df(X + iJX) \qquad \text{da } df = \partial f + \bar\partial f$$
$$X = \tfrac{1}{2}(X - iJX) + \tfrac{1}{2}(X + iJX)$$
$$= \frac{1}{2}(X + iJX)(f)$$

• $$\bar\partial^\nabla(f\cdot Y)(X) = f\cdot\frac{1}{2}\left(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(X(f)Y + JX(f)JY\right) \qquad JY =: iY$$
$$= f\cdot\bar\partial^\nabla Y(X) + \bar\partial f(X)\cdot Y$$

d.h. $\bar\partial^\nabla$ erfüllt die Leibniz-Regel

• $Y \in \Gamma(TM)$ holomorpher Schnitt $\Leftrightarrow$ Y ist reell holomorph
$\Leftrightarrow L_Y J = 0$

$$\Rightarrow 0 = (L_Y J)X = L_Y(JX) - J L_Y X = [Y, JX] - J[Y, X]$$
$$= \nabla_Y \underline{JX} - \nabla_{JX} Y - J\nabla_{\underline{Y}} X + J\nabla_X Y = (\nabla_Y J)X - \nabla_{JX} Y + J\nabla_X Y$$
$$= J\left(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X\right) = J\bar\partial^\nabla Y(X) \quad \Longrightarrow \bar\partial^\nabla = \bar\partial \quad !?$$

$\Rightarrow \bar\partial^\nabla = \bar\partial$
$\bar\partial^\nabla$ verschwindet auf holom. Schnitte