19. Vorlesung
14.01.2020

Wiederholung

(M, J, g) kompakte Kähler-Mfk

Kähler-Form: ω
Ricci-Form: ρ

ρ_1 : geschlossene, reelle, $(1,1)$-Form

mit $c_1(M) = [\frac{1}{2\pi} \rho_1]$

Beh: $\exists$ Kähler-Metrik g mit Kähler-Form ω_1, Ricci-Form ρ_1 und $[\omega_1] = [\omega]$

$$\mathcal{H} := \{ g \text{ Kähler} \mid [\omega_g] = [\omega] \}$$
$$= \{ u \in C^\infty(M) \mid \omega + i\partial\bar\partial u > 0, \ \int u \omega^n = 0 \}$$

d.h. $\omega_1 = \omega + i\partial\bar\partial u$

$\rho_1 = \rho - i\partial\bar\partial f$

und f ist gegeben durch $e^f \omega^n = \omega_1^n$

$$\rightarrow f = \log \frac{(\omega + i\partial\bar\partial u)^n}{\omega^n}$$

Beh.': $u \mapsto f = \operatorname{Cal}(u)$
ist ein Diffeomorphismus

gezeigt: Cal ist injektiv

schwer: surjektiv

zu zeigen: Cal ist ein lokaler Diffeomorphismus

Bemerkung: In lokalen Koordinaten gilt:

$$\operatorname{Cal}(u) = \log \det \left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} \right) - \log \det (g_{\alpha\bar\beta})$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Cal}(u) = f$ ist eine Monge-Ampère PDE

Monge-Ampère: $\det \operatorname{Hess}(u) = f$

- Cal ist ein lokaler Diffeomorphismus

<u>ZZ:</u> $d\,Cal$ ist eine Bijektion

oBdA $u=0$ (sonst Änderung der Basismetrik)

$v \in T_0 K$

$$d\,Cal(v) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Cal(tv)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log \frac{(\omega + i\partial\bar\partial(tv))^m}{\omega^m}$$

(*) $$= m \cdot \frac{i\partial\bar\partial v \wedge \omega^{m-1}}{\omega^m} = \Lambda(i\partial\bar\partial v)$$

$$= -\bar\partial^* \bar\partial v$$

$$= -\Delta^{\bar\partial} v$$

aber: $\Delta^{\bar\partial}$ ist bijektiv auf dem Raum der Funktionen $v \perp 1$, d.h. v mit $\int v\,vol = 0$

$\Rightarrow$ $d\,Cal$ ist bijektiv

$\Rightarrow$ Cal ist lokaler Diffeomorphismus (Implizite-Funktion-Theorem)

$\Rightarrow$ Cal ist Diffeomorphismus auf sein Bild

<u>schwerer Teil:</u> Cal ist surjektiv

dazu: a-priori-Abschätzungen

$\Rightarrow$ Cal ist eigentlich $\Rightarrow$ $Im(Cal)$ abgeschl.
$\Rightarrow$ surjektiv

(*) • $f(t) = \log \frac{(\omega + t\alpha)^m}{\omega^m}$, $\alpha = i\partial\bar\partial v$ $\qquad (\omega + t\alpha)^m = e^{f(t)} \omega^m$

$\Rightarrow m \cdot \alpha \wedge \omega^{m-1} = \dot f(0)\, e^{f(0)}\, \omega^m = \dot f(0)\, \omega^m$

$\Rightarrow \dot f(0) = m \frac{\alpha \wedge \omega^{m-1}}{\omega^m}$ $\qquad \alpha_0 \perp \omega$

• $\frac{\alpha \wedge \omega^{m-1}}{\omega^m} = c$, $\Lambda \alpha = c \Lambda \omega = c \cdot m$ $\qquad \alpha = \alpha_0 + c \cdot \omega$
$\hookrightarrow \alpha \wedge \omega^{m-1} = c\,\omega^m$
$\alpha_0 \wedge \omega^{m-1} = 0$

$\rightarrow$

$$* \omega = \frac{1}{(m-1)!} \omega^{m-1} \quad , \quad vol = \frac{\omega^m}{m!} \quad , \quad |\omega|^2 = m$$

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \omega^{m-1} &= (m-1)! \quad \alpha \wedge * \omega \\
&= (m-1)! \ \langle \alpha, \omega \rangle \frac{\omega^m}{m!} \\
&= \frac{1}{m} \langle \alpha, \omega \rangle \, \omega^m \\
&= \frac{1}{m} \ \Lambda \alpha \cdot \omega^m
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha \wedge \omega^{m-1}}{\omega^m} = \frac{1}{m} \Lambda \alpha = c$$

19. Kähler – Einstein – Metriken

(M, g, J) kompakte Kähler-Mfk.

mit $\mathrm{Ric} = \lambda g$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\hat{=}$ Kähler – Einstein – Metrik

hier: $\lambda \neq 0$ OBdA: $\lambda = \pm 1$

Kähler – Einstein – Bedingung: $\rho = \varepsilon \omega$, $\varepsilon = \pm 1$

$\Rightarrow$ notwendige Bedingung für die Existenz einer KE – Metrik:

$c_1(M)$ ist positiv – oder negativ definit, d.h. es existiert eine positiv – oder negativ definite $(1,1)$-Form, die $c_1(M)$ repräsentiert

(für generische Kähler Mfk. hat c_1 kein Vorzeichen)

Umkehrung:

Theorem: (Aubin, Yau) Eine kompakte komplexe Mfk. mit negativer erster Chern – Klasse besitzt eine Kähler- Einstein-Metrik mit Einstein – Konstante $\varepsilon = -1$.

$\boxed{\text{Beispiel: } X \subset \mathbb{C}P^N} \rightarrow$

Umformulierung $\varepsilon = \pm 1$

(M^{2n}, J) komplex, kompakt $c_1(M) > 0$ oder $c_1(M) < 0$

$\rightarrow \exists$ geschlossene, $(1,1)$- Form ω: $[\omega] = 2\pi\, \varepsilon\, c_1(M)$
ω positiv

$g := \omega(\cdot, J\cdot)$ Kähler – Metrik definiert durch ω

ρ : Ricci – Form $\rightarrow$ $[\omega] = 2\pi\, \varepsilon\, c_1(M) = [\varepsilon \rho]$

$\Rightarrow \exists f : \quad \rho = \varepsilon \omega + i \partial\bar\partial f$ $\quad$ ($\partial\bar\partial$ – Lemma)

ges.: neue Kähler – Metrik g_1 mit Kähler – Form ω_1
Ricci – Form ρ_1

mit: $\rho_1 = \varepsilon \cdot \omega_1$

~~Unmarkierung~~
~~Untertitel~~

$i: X \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$ komplexe Hyperfläche

$X = P^{-1}(0)$ P homogenes komplexes Polynom vom Grad d auf $\mathbb{C}^{N+1}$

zB $x_0^d + \dots + x_N^d$ $\to$ Fermat-Fläche

$\Rightarrow c_1(X) = (N+1-d)\, h$

+ allgemeine Formel $h = i^* h_0$, h_0 = positiver Erzeuger von $H^2(\mathbb{C}P^N, \mathbb{Z})$

dh. $c_1(X)$ hat immer ein Vorzeichen

$d > N \to X$ hat eine Kähler-Einstein Metrik

zB: $N = 3,\ d = 4$ $z_0^4 + \dots + z_3^4 = 0$

$\to c_1(X) = 0$

$\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ K3-Fläche

$c_1 > 0 \Rightarrow \exists\ \omega \in 2\pi c_1(M)$
$\omega(\cdot, J\cdot)$ Kähler-Metrik !

auch $c_1(X) > 0$ möglich

Definition: Eine Fano-Mfk. ist eine kompakte komplexe Mfk. M mit $c_1(M) > 0$.

Folgerung: Ist M eine Fano-Mfk., dann existiert auf M eine Kähler-Metrik mit positiver Ricci-Krümmung

$\left(\stackrel{g}{\exists} \mathrm{Ric} < 0\right)$

Bemerkung: Es existieren Obstruktionen gegen die Existenz von Kähler-Einstein Metriken positiver Skalarkrümmung.
(zB geknüpft an die Existenz holomorpher VF, siehe unten)

Beispiel: · $M_k = \mathbb{C}P^2 \# \overbrace{\overline{\mathbb{C}P^2} \# \dots \# \overline{\mathbb{C}P^2}}^{k\text{-mal}}$ $\to c_1(M_k) > 0$ für $0 \leq k \leq 8$

· $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$

M_k, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ sind die einzigen komplexen Flächen mit $c_1 > 0$

Bemerkung: Es ex. nur endlich viele Diffeomorphismentypen von Fano-Mfk.
$n = 3$: 104

allgemeine Formel:

vollständige Durchschnitte

$$X_n(d_1, \ldots, d_r) = \{ [z] \in \mathbb{C}P^{n+r} \mid P_1(z) = \ldots = P_r(z) = 0 \}$$

P_i : homogenes Polynom vom Grad d_i

Vor: $\operatorname{grad} P_1, \ldots, \operatorname{grad} P_r$ linear unabhängig

$\rightarrow$ X_n ist eine glatte Unterm(f). in $\mathbb{C}P^{n+r}$

$\dim_{\mathbb{C}} X_n = n$

$d := d_1 + \ldots + d_r$

$c_1(X_n(d_1, \ldots, d_n)) = (n + r + 1 - d)\, h$

$\Rightarrow \exists$ KE Metrik mit $\mathrm{scal} \leq 0$ für $d \geq n + r + 1$

sei g_1 eine solche Metrik $\qquad [\omega] = 2\pi\,\varepsilon\, c_1(M) = [\varepsilon\,\rho_1] = [\omega_1]$

$\rightarrow [\omega_1] = [\omega]$

$\rightarrow \exists\, u \in \mathcal{K}: \quad \omega_1 = \omega + i\partial\bar\partial u$

$$\xrightarrow{\text{s.o.}} \rho_1 = \underline{\rho} - i\partial\bar\partial \log \frac{(\omega + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega^m}$$

$$\left(\begin{aligned} \partial\bar\partial h &= 0 \\ \text{da } \Lambda(i\partial\bar\partial h) &= -\bar\partial^*\bar\partial h \\ &= -\Delta_{\bar\partial} h \end{aligned} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{KE}} \varepsilon\omega_1 = \varepsilon\omega + i\partial\bar\partial f - i\partial\bar\partial \log \frac{(\omega + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega^m}$$

d.h. $$\log \frac{(\omega + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega^m} + \varepsilon u = f + \text{const.} \qquad (*)$$

umgekehrt: $\quad u \in C^\infty_+(M)$ mit $(*)$ $\qquad C^\infty_+(M) = \{ f \in C^\infty(M) \,/\, \omega + i\partial\bar\partial f > 0 \}$

$\Rightarrow \omega_1 := \omega + i\partial\bar\partial u$

ist Kähler-Einstein

$\Rightarrow$ das Aubin-Yau-Theorem ist äquivalent zu:

$\mathrm{Cal}^\varepsilon : C^\infty_+(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

$\mathrm{Cal}^\varepsilon(u) = \mathrm{Cal}(u) + \varepsilon u$

ist ein Diffeomorphismus.

zur Injektivität:

$\mathrm{Cal}^-(u_1) = \mathrm{Cal}^-(u_2)$ $\qquad \omega_1 := \omega + i\partial\bar\partial u_1$

$\qquad \omega_2 := \omega + i\partial\bar\partial u_2$

$$\Rightarrow \log\frac{\omega_1^m}{\omega^m} - u_1 = \log\frac{\omega_2^m}{\omega^m} - u_2 \Rightarrow \log\frac{(\omega_1 + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega_1^m} = u \qquad (**)$$

$u := u_2 - u_1$

<u>Behauptung</u>: Sei x ein lokales Maximum von u, dann gilt $i\partial\bar\partial u \leq 0$ in x

da: $X \in T_xM$, $(\nabla X)_x = 0$ $\qquad \partial_x = x(\ldots)$

$i\partial\bar\partial u(X, JX) = \frac{1}{2}(dd^c u)(X, JX)$ $\qquad d^c u = J du$

! in x $= \frac{1}{2}\left(\partial_X (d^c u(JX)) - \partial_{JX}(d^c u(X)) \right)$ $\qquad \left([X, JX]_x = 0 \,!\right)$ Kähler !

! $= \frac{1}{2}\left(H^u(X, X) + H^u(JX, JX) \right) \leq 0$

da x Max.-Punkt

$$H^u(X,X) = (\nabla_X du)(X)$$
$$= X(du(X)) - du(\nabla_X X)$$
$$= X(du(X)) \qquad \text{in } x \text{ mit } \nabla X = 0 \text{ in } x$$