② Hermitesche Strukturen und Zusammenhänge

Sei $E \to M$ ein komplexes VB über einer diff.baren Mft. M

<u>Definition:</u> Eine <u>Hermitesche Struktur</u> auf E ist eine glatte Familie von Hermiteschen Skalarprodukten auf den Fasern von E, d.h. für alle $x \in M$ hat man eine Abbildung $H_x : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$ mit.

- $H_x(u,v)$ ist $\mathbb{C}$-linear in u für alle $v \in E_x$
- $H_x(u,v) = \overline{H_x(v,u)} \quad \forall u,v \in E_x$
- $H_x(u,u) > 0 \quad \forall u \neq 0$
- $H(u,v)$ ist eine glatte Funktion auf M für glatte Schnitte u,v von E

<u>Bezeichnung:</u> Ein komplexes VB mit einer Hermiteschen Struktur nennt man <u>Hermitesches VB</u>.

<u>Bemerkungen:</u>

- H ist $\mathbb{C}$-anti-linear im 2. Eintrag
- H ist nicht-ausgeartet, d.h. man hat einen $\mathbb{C}$-anti-linearen Isomorphismus $H : E \to E^*$
- Jedes komplexe VB besitzt eine Hermitesche Struktur

  <u>da:</u> · lokale Trivialisierung $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ Zerlegung der Eins: φ_α
  · auf U_α sei H_i der pull-back des Standard-SP von $\mathbb{C}^k$
  · $H := \sum_i f_i H_i$

Sei M eine komplexe Mft.

<u>Projektionen:</u> $\pi^{10} : \Lambda^1(E) \to \Lambda^{10}(E)$, $\quad \pi^{01} : \Lambda^1(E) \to \Lambda^{01}(E)$

Sei ∇ ein Zusammenhang auf E

$(1,0)$-Komponente: $\nabla^{1,0} := \pi^{10} \circ \nabla$

$(0,1)$-Komponente: $\nabla^{01} := \pi^{01} \circ \nabla$

$$\nabla = \nabla^{10} + \nabla^{01}$$

$$\nabla^{10} = \sum_i f^i \otimes \nabla_{f_i}$$

$$\nabla^{01} = \sum_i \bar{f}^i \otimes \nabla_{\bar{f}_i}$$

$$\nabla_{x^{10}} \sigma = \nabla^{1,0}_{x^{10}} \sigma$$

M komplex $\Rightarrow$ $d = \partial + \bar{\partial}$

Man kann $\nabla^{1,0}$ und ∇^{01} fortsetzen:

$$\nabla^{10} : \Omega^{p,q}(E) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(E)$$

$$\nabla^{10}(\omega \otimes \sigma) = \partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\, \omega \wedge \nabla^{10}\sigma$$

und analog:

$$\nabla^{0,1} : \Omega^{p,q}(E) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(E)$$

$$\nabla^{01}(\omega \otimes \sigma) = \bar\partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\, \omega \wedge \nabla^{01}\sigma$$

$\Rightarrow$ ∇^{01} ist eine pseudo-holomorphe Struktur

- Sei $\sigma \in \Gamma(E)$

$$\rightarrow R^{\nabla}\sigma = \nabla^2\sigma = (\nabla^{10} + \nabla^{01})^2\sigma$$

$$= (\nabla^{10})^2\sigma + (\nabla^{01})^2\sigma + (\nabla^{10}\nabla^{01} + \nabla^{01}\nabla^{10})\sigma$$

$$\rightarrow (R^{\nabla}\sigma)^{0,2} = (\nabla^{0,1})^2$$

<u>Lemma:</u> Sei ∇ ein Zusammenhang auf E mit $(R^{\nabla}\sigma)^{02} = 0$, dann ist E ein holomorphes Vektorbündel mit holomorpher Struktur $\bar\partial := \nabla^{01}$

<u>Bemerkung:</u> Einen Zusammenhang ∇ nennt man <u>H-Zusammenhang</u> oder <u>Hermitesch</u>, falls die Hermitesche Struktur H auf E ∇-parallel ist, d.h.

$$(\nabla_X H)(e_1, e_2) := X(H(e_1, e_2)) - H(\nabla_X e_1, e_2) - H(e_1, \nabla_X e_2)$$

d.h. falls

$$X(H(e_1, e_2)) = H(\nabla_X e_1, e_2) + H(e_1, \nabla_X e_2)$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$, $e_1, e_2 \in \Gamma(E)$

Theorem: Zu jeder Hermiteschen Struktur H auf einem holomorphen Vektorbündel E mit holomorpher Struktur $\bar\partial$ existiert genau ein H-Zusammenhang ∇ mit

$$\nabla^{01} = \bar\partial$$

Diesen Zusammenhang nennt man Chern-Zusammenhang.

holom. Struktur gleiche Notation

Beweis:
- E^* ist wieder ein holomorphes VB : $\bar\partial$

  ∇ induziert einen Zusammenhang ∇ auf E^*:

$$(\nabla_X \lambda)(\sigma) := X(\lambda(\sigma)) - \lambda(\nabla_X \sigma) \qquad (*)$$

  mit $\lambda \in \Gamma(E^*)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

- $\nabla^{01} = \bar\partial$ d.h. $\nabla\sigma \in \Omega^{1,0}(E)$ für alle holomorphen Schnitte σ

  und analog nach $(*)$ für E^*

- Sei ∇ ein H-Zusammenhang mit $\nabla^{01} = \bar\partial$

  $\Rightarrow$ $H: E \to E^*$ ist ∇-parallel, H: $\mathbb{C}$-anti-linear, Isom.

  d.h. $\nabla_X(H(\sigma)) = (\nabla_X H)(\sigma) + H(\nabla_X\sigma) = H(\nabla_X \sigma)$

  da
$$\begin{aligned}(\nabla_X H(\sigma))\tilde\sigma &= X(H(\sigma)\tilde\sigma) - H(\sigma)(\nabla_X\tilde\sigma) \qquad X \in TM\\ &= X(H(\sigma,\tilde\sigma)) - H(\sigma, \nabla_X\tilde\sigma)\\ &= H(\nabla_X\sigma, \tilde\sigma) = H(\nabla_X\sigma)(\tilde\sigma)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\nabla_Z H(\sigma) = H(\nabla_{\bar Z}\sigma)$ $\forall Z \in TM^{\mathbb{C}}$ da H $\mathbb{C}$-antilin.

$\Rightarrow$ $\nabla^{1,0}\sigma = H^{-1}\cdot\nabla^{01}H(\sigma) = H^{-1}(\bar\partial H(\sigma))$ $\qquad (*)$

da $\nabla_Z\sigma = H^{-1}\nabla_Z H(\sigma)$ $\Rightarrow$ $\nabla_Z\sigma = H^{-1}\nabla_{\bar Z} H(\sigma)$
$Z \in T^{10}$ $\Rightarrow$ $\nabla^{10}\sigma = H^{-1}\nabla^{01}H(\sigma)$

$Z \in T^{10} \Rightarrow \nabla_Z\sigma = \nabla_Z^{10}\sigma$

$\Rightarrow$ $\nabla = \bar\partial + H^{-1}\cdot\bar\partial\cdot H$

damit ist ∇ durch H eindeutig bestimmt, die Formel zeigt Eindeutigkeit und Existenz

Bemerkung:

- Die (0,2)-Komponente der Krümmung des Chern-Zusammenhangs verschwindet, d.h. das Theorem zeigt die Umkehrung des Lemmas

$$\exists \nabla : (R^\nabla)^{0,2} = 0 \iff E \text{ holomorph}$$

(jedes $\mathbb{C}$-VB hat eine Hermit. Struktur)

<u>da:</u>
$$(R^\nabla)^{0,2}\sigma = \nabla^{01}(\nabla^{01}\sigma) = \bar\partial^2\sigma = 0$$

- Für die Krümmung ist (falls nicht flach) nur der (1,1)-Teil von Null verschieden

für den Chern-Zus. !

<u>da</u>
$$(R^\nabla)^{2,0}\sigma = \nabla^{10}(\nabla^{10}\sigma) \overset{(*)}{=} \nabla^{10}(H^{-1}\bar\partial H\sigma) = H^{-1}(\bar\partial^2 H\sigma) = 0$$

$$H \circ \nabla_z = \nabla_{\bar z} H$$ <u>da</u> H parallel und $\mathbb{C}$-anti-linear

$$\to \nabla_z \circ H^{-1} = H^{-1} \circ \nabla_{\bar z}$$

$$\to \nabla^{10} \circ H^{-1} = H^{-1} \circ \nabla^{01}$$

11. Hermitesche und Kähler-Metriken

1 Hermitesche Metriken

Definition. Sei (M, J) eine fast-komplexe Mfk. Eine Hermitesche Metrik ist eine Riemannsche Metrik h mit:

$$h(X,Y) = h(JX, JY) \qquad \forall X,Y$$

Die fundamentale 2-Form einer Hermiteschen Metrik h ist definiert durch

$$\omega(X,Y) := h(JX, Y)$$

(M, h, J) + komplex = Hermitesche Mfk.

Bemerkung:
- Für die $\mathbb{C}$-bilineare Fortsetzung von h gilt:

$$h(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{h(Z,W)} \qquad \forall Z,W \in TM^{\mathbb{C}}$$

$$h(Z, \bar{Z}) > 0 \qquad \forall Z,\ Z \neq 0$$

$$h(Z, W) = 0 \qquad \forall Z,W \in T^{10} \text{ und } \forall Z,W \in T^{01}$$

Umgekehrt bestimmt jeder symmetrische Tensor $h \in \mathrm{Sym}^2 TM^{\mathbb{C}}$ mit diesen Eigenschaften definiert durch Einschränkung eine Hermitesche Metrik.

- (M, J) fast-komplex, h Hermitesche Metrik

$$\Rightarrow H(X,Y) := h(X,Y) - i\,\omega(X,Y)$$

ist eine Hermitesche Struktur auf dem komplexen VB (TM, J)

- H Hermitesche Struktur auf $TM \Rightarrow h = \mathrm{Re}\, H$ Hermitesche Metrik
- Jede fast-komplexe Mfk. besitzt Hermitesche Metriken.

$$h(X,Y) := g(X,Y) + g(JX, JY)$$

In lokalen Koordinaten: (U, z)

$$h_{\alpha\bar{\beta}} := h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right)$$

Lemma: Für die fundamentale 2-Form gilt:

$$\omega = i \sum h_{\alpha\bar{\beta}}\, dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$