Die Lefschetz - Zerlegung

analog: $sl_2(\mathbb{R})$

$sl_2(\mathbb{C})$ - Darstellungen

$sl_2(\mathbb{C}) = \{ A \in M(2,\mathbb{C}) \mid \operatorname{Tr} A = 0 \}$ ($Sl_2(\mathbb{R}) = Gl_2(\mathbb{R}) \cap \{\det = 1\}$)

Lie - Algebra: $[A,B] = AB - BA$

Standard - Erzeuger: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Relationen: $[X,Y] = H$, $[H,X] = 2X$, $[H,Y] = -2Y$

$sl_2(\mathbb{C})$ - Darstellung: $\rho : sl_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{End}(V)$ linear

mit $\rho([A,B]) = [\rho(A), \rho(B)]$
$= \rho(A) \circ \rho(B) - \rho(B) \circ \rho(A)$

Bezeichng.:
- V nennt man dann $sl_2(\mathbb{C})$ - Modul (V endlich-dim. komplexer VR)
- UR in V, invariant unter $\rho(sl_2(\mathbb{C}))$ nennt man Untermodule
- V heisst irreduzibel, wenn keine nicht-triviale Untermodule existieren (nur V, $\{0\}$)

Fakt: jeder Untermodul $W \subset V$ (eines $sl_2(\mathbb{C})$ - Moduls V) besitzt einen komplementären Submodul $W^\perp$, dh. man hat eine $sl_2(\mathbb{C})$ - invariante Aufspaltung

$$V = W \oplus W^\perp$$

Damit ist jeder $sl_2(\mathbb{C})$ - Modul die direkte Summe von irreduziblen Untermoduln

$sl_2(\mathbb{C})$! (halbeinfach)

→

Ziel: Es soll die Struktur irreduzible $sl_2(\mathbb{C})$ - Moduln beschrieben werden.

↗ Weils: • Es existiert eine bijektive Korrespondenz zwischen Darstellungen von:

$SL_2(\mathbb{C})$, $sl_2(\mathbb{C})$, SU_2 und $\mathfrak{su}_2$

• Darstellungen einer kompakten Gruppe sind vollständig reduzibel

"unitary trick" H. Weyl

da G kompakt → es ex. G-invariantes Skalarprodukt auf G

→ es ex. invariante Komplemente

Sei V ein irreduzibler $sl_2(\mathbb{C})$-Modul

man betrachtet $\rho(H)$ - Eigenräume : Gewichtsräume

ab jetzt ohne ρ: $\rho(A)v = A \cdot v$

Bemerkung: $Hv = \lambda v \Rightarrow H(Xv) = (\lambda+2)Xv$

$H(Yv) = (\lambda-2)Yv$

da: • $H(Xv) = XHv + [H,X]v$

$= X \cdot \lambda v + 2X \cdot v = (\lambda+2)Xv$

• analog für Yv

$\Rightarrow$ X und Y sind nilpotent da H nur endlich-viele Eigenwerte hat

Bezeichnung: Ein Vektor $v \in V$ heisst primitiv, falls v ein Eigenvektor von H ist und $Xv = 0$ gilt.

Primitive Elemente existieren.

Satz: Sei $v \in V$ primitiv, dann gilt: V irreduzibel!

$V = \text{span}\{v, Yv, Y^2v, \dots\}$

Beweis: $V' := \text{span}\{v, Yv, Y^2v, \dots\} \subset V$ UR

zz V' ist $sl_2(\mathbb{C})$-invariant (denn dann $V = V'$, da V irreduzibel ist)

da • $H(V') \subset V'$, $Y(V') \subset V'$ klar

• zz $X(V') \subset V'$ Beweis mit Induktion

$Xv = 0 \in V'$, I.A.: $XY^n v = YXY^{n-1}v + HY^{n-1}v$

$\Rightarrow$ mit $XY^{n-1}v \in V'$ gilt auch $XY^n \in V'$

Bemerkung: $v, Yv, Y^2v, \ldots$ sind von Null verschieden und linear unabhängig, da Eigenvektoren von H zu verschiedenen Eigenwerten

$$\Rightarrow \quad V = \bigoplus_{\lambda} V_\lambda$$

mit

- $\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda = 1$
- $H(V_\lambda) = V_\lambda$ Eigenraum zum EW λ
- $X(V_\lambda) = V_{\lambda+2}$, $Y(V_\lambda) = V_{\lambda-2}$

Satz: Alle Eigenwerte von H sind ganz-zahlig und es gilt: (für ein gewisses n)

$$V = V_n \oplus V_{n-2} \oplus \ldots \oplus V_{-n+2} \oplus V_{-n}, \quad \dim V = n+1 \;!$$

Beweis: Sei $v \in V$ primitiv und:

- $Y^n v \neq 0$, $Y^{n+1} v = 0$
- $Hv = \lambda v$

$$Xv = 0$$

$$XYv = YXv + Hv = \lambda v$$

$$XY^2v = YXYv + HYv = Y\lambda v + (\lambda-2)Yv = (2\lambda-2)Yv$$

I.A. $XY^m v = YXY^{m-1}v + HY^{m-1}v$

$$\Rightarrow \quad XY^m v = (\lambda + (\lambda-2) + (\lambda-4) + \ldots + (\lambda-2(m-1)))\,Y^{m-1}v$$

$$= (m\lambda - m^2 + m)\,Y^{m-1}v$$

$m = n+1$

$$\Rightarrow \quad (n+1)\lambda - (n+1)^2 + (n+1) = 0 \qquad \text{da } Y^{n+1}v = 0,\; Y^n v \neq 0$$

$\Rightarrow \lambda = n$, Basis: $v, Yv, \ldots, Y^n v \Rightarrow \dim V = n+1$

Beispiel: $V = \mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2$ $\longrightarrow$

Lemma: Sei $v_0 \in V_n$, $v_{-1} := 0$, $v_k := \frac{1}{k!} Y^k v_0$. Dann gilt:

$$Hv_k = (n-2k)v_k \;; \quad Yv_k = (k+1)v_{k+1} \;; \quad Xv_k = (n-k+1)v_{k-1}$$

($\rightarrow$ explizite Matrixdarstellung für H, X, Y, X, Y: nilpotent)

$\mathrm{Sym}^n\,\mathbb{C}^2$ = VR der homogenen Polynome auf $\mathbb{C}^2$ in den Variablen z_1, z_2

Basis: $\quad z_1^k \cdot z_2^{n-k} \qquad k = 0, \dots, n$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Sym}^n\,\mathbb{C}^2 = n+1$

$P \in \mathbb{C}[z_1, z_2]\,, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,, \quad z = (z_1, z_2)$

$\underline{\varphi}$: $\quad (gP)(z) = P(z \cdot g) \qquad$ für $g \in SL_2(\mathbb{C})$!

mit $\quad z \cdot g = (a z_1 + c z_2\,,\; b z_1 + d z_2)$

modifizierte Basis: $\quad x_j(z_1, z_2) := \binom{n}{j} z_1^{n-j} z_2^{j}$

<u>Lemma:</u>

$$H x_j = (n - 2j)\, x_j \qquad\qquad x_{-1} = x_{n+1} = 0$$
$$X x_j = (n - j + 1)\, x_{j-1}$$
$$Y x_j = (j+1)$$

<u>Beweis:</u> $\quad \varphi : SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, V\,, \qquad V = \mathrm{Sym}^n\,\mathbb{C}^2$

$\rho = d\varphi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{End}\, V$

$$\rho(A) = d\varphi(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\exp tA)$$

$$\Rightarrow \rho(A)\, v = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\exp tA \cdot v - v \right)$$

$H = \mathrm{diag}(1, -1) \Rightarrow \exp tH = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$

$\Rightarrow \exp tH \cdot x_j = e^{(n-2j)t}\, x_j$

$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \quad H x_j = (n - 2j)\, x_j$

~~[illegible]~~

Beispiel: $V = \mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2$

$= $ VR der homogenen Polynome auf $\mathbb{C}^2$

Basis: $z_1^{n-k} \cdot z_2^k$, $k = 0, \dots, n$

z_1, z_2 Variablen in $\mathbb{C}^2$

$\Longrightarrow \dim V = n+1$

Bemerkung: · $K = v_1 \cdot \ldots \cdot v_n \in \mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2$ multilinear und symmetrisch!

· $K : \mathbb{C}^2 \times \ldots \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$, $K(w_1, \dots, w_n) = \langle w_1 \cdot \ldots \cdot w_n, K \rangle$

· $K : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ homogenes Polynom: $K(v) = K(v, \dots, v)$

$SL_2(\mathbb{C})$ – Darstellung: $P \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $z = (z_1, z_2)$

$$(g \cdot P)(z) := P(z \cdot g)$$

mit: $z \cdot g = (a z_1 + c z_2, b z_1 + d z_2)$

$\to$ $sl_2(\mathbb{C})$ – Darstellung durch Ableitung $\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp tA \ldots \right)$

$$H \, z_1^{n-k} \cdot z_2^k = (n-k)(H z_1) \cdot z_1^{n-k-1} z_2^k + k (H z_2) z_1^{n-k} z_2^{k-1}$$
$$= (n-2k) \, z_1^{n-k} z_2^k$$

$\left(z_1^{n-k} z_2^k \mathrel{\hat=} e_1^{n-k} \cdot e_2^k \in \mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2 \right.$ LA-Darstellung auf $\left. \mathrm{Sym}^n \mathbb{C}^2 \right)$

später

$n \equiv 0 \, (2) \to \dim V_0 = 1, \dim V_1 = 0$

$n \equiv 1 \, (2) \to \dim V_0 = 0, \dim V_1 = 1$

$\Longrightarrow V$ ist irreduzibel

$P_j(z_1, z_2) = \binom{m}{j} z_1^{m-j} z_2^j$ bilden genau die kanonische Basis ausgehend vom primitiven Element $P_0(z_1, z_2) = z_1^m$

Bemerkung: Mit den Formeln aus dem Lemma kann man auch direkt eine Darstellung von $sl_2(\mathbb{C})$ auf $V = \mathrm{span}\{v_0, \dots, v_m\}$ definieren

Behauptung: Die so konstruierte Darstellung ist irreduzibel.

Satz: Zu jeder ganzen Zahl n existiert ein eindeutig bestimmter irreduzibler $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul $V(n)$ der Dimension $n+1$.
Insbesondere gilt:

$$V(n) \cong \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^2) \qquad (\text{als } \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\text{-Modul})$$

Die Eigenwerte von H auf $V(n)$ sind:
$-n, -n+2, \ldots, n-2, n$. Jeder Eigenwert hat die Vielfachheit (Multiplizität) eins.

(n = höchstes Gewicht von $V(n)$)

$\rho : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(W)$

Satz: Sei W ein beliebiger endlich-dimensionaler $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Modul. Dann gilt:

1. $W = PW \oplus Y\,PW \oplus Y^2 PW \oplus \ldots$ — Lefschetz Zerlegung

   mit $PW := \mathrm{Ker}\, \rho(X)$ — PW: primitiver Teil

2. Sei W_m der H-Eigenraum zum Eigenwert m.
   Die Lefschetz-Zerlegung ist verträglich mit der Zerlegung von W in die H-Eigenräume W_m

3. Man hat Isomorphismen

$$W_m \underset{X^m}{\overset{Y^m}{\rightleftarrows}} W_{-m} \qquad \text{für } m \geq 0\,!$$

4. $PW_m = W_m \cap \mathrm{Ker}\, \rho(X) = \mathrm{Ker}\,(Y^{m+1} : W_m \to W_{-m-2})$

5. Die Anzahl der irreduziblen Summanden in W ist gleich $\dim W_0 + \dim W_1$

6. $PW_m = \{0\}$ für $m < 0$

! zu ②: $W_m = PW_m \oplus Y\,PW_{m+2} \oplus Y^2 PW_{m+4} \oplus \ldots = \bigoplus_{k\geq 0} Y^k PW_{m+2k}$

Beweis:

zu ①: zu jedem $v \in PW$ gehört der irreduzible $sl_2(\mathbb{C})$-Modul $\text{span}\{v, Yv, \dots, Y^n v\}$ für $Hv = n \cdot v$

$W = \bigoplus_i W_i$ $\quad W_i$: irreduzible Summanden

$= \bigoplus_i \text{span}\{v_i, Yv_i, \dots, Y^{n_i} v_i\}$

$= \text{span}\{v_i\} \oplus \text{span}\{Yv_i\} \oplus \dots$

zu ②: $v \in PW$

$\Rightarrow v = \sum_i v_i$ mit $Hv_i = n_i v_i$ $\quad n_i$ paarweise verschieden

$\Rightarrow 0 = Xv = \sum_i Xv_i$

$H(Xv_i) = (n_i + 2) Xv_i$

$\Rightarrow Xv_i$ sind in verschiedenen H-Eigenräumen

$\Rightarrow Xv_i$ sind linear unabhängig, also $Xv_i = 0$

$\Rightarrow \text{Ker}(\rho(X)) = \bigoplus_k W_k \cap \text{Ker}\, \rho(X)$

zu ③: schon gezeigt: • $v \in PW_m$, $v \neq 0 \Rightarrow Y^m v \neq 0$

d.h. Y^m ist injektiv auf PW_m

• $XY^k v = (n \cdot k - k^2 + k) Y^{k-1} v$, $\quad v \in PW_n$
$= k(n+1-k) Y^{k-1} v$

$\left(\begin{array}{l} v \in Y^m PW_m \\ \Rightarrow X^m v \in PW_m \end{array} \right)$

$\Rightarrow XY^n v = n \cdot Y^{n-1} v$
$X^2 Y^n v = n \cdot (n-1) 2\, Y^{n-2} v \quad \dots \quad X^n Y^n v = c \cdot v,\ c \neq 0$

nach ①: $W_m = \bigoplus_{k \geq 0} Y^k PW_{m+2k} = PW_m \oplus Y PW_{m+2} \oplus \dots$

$W_{-m} = \bigoplus_{\ell \geq m} Y^\ell PW_{-m+2\ell}$ $\quad$ • $-m + 2\ell \geq 0$ nach ⑥

$= Y^m PW_m \oplus Y^{m+1} PW_{m+2} \oplus \dots$ $\quad$ • $\ell \leq -m + 2\ell$ nach ④
$\Updownarrow$
$\ell \geq m$ $\quad$ Teil 1!

$= \bigoplus_{k \geq 0} Y^{m+k} PW_{m+2k}$

$Y^m : Y^k PW_{m+2k} \longrightarrow Y^{m+k} PW_{m+2k}$ Isomorphismen ?

zu ④: • schon gezeigt. $Xv = 0, \quad Hv = m \cdot v \quad \rightarrow \quad Y^{m+1} v = 0$

d.h. $PW_m \subset \operatorname{Ker} Y^{m+1}$

• $v \in W_m, \quad Y^{m+1} v = 0$

$\rightarrow Xv \in W_{m+2}$

$$Y^{m+2} X v = Y^{m+2} X v - X Y^{m+2} v$$

$$= c \, Y^{m+1} v \qquad \text{da } [X,Y] = H$$

$$= 0$$

$\rightarrow Xv = 0$ da Y^{m+2} ein Isomorphismus auf W_{m+2}

zu ⑥: schon gezeigt $v \in W = \oplus W_i$ mit W_i irreduzibel, $v = \sum v_i$

$Xv = 0 \rightarrow X v_i = 0$

$Hv = m \cdot v \rightarrow H v_i = m \cdot v_i \rightarrow m \geq 0$ nach Strukturs. für irred. $SL_2\mathbb{C}$-Darstellung

d.h. H-Eigenwerte primitiver Vektoren sind nicht-negativ

zu ⑤: In jedem irreduziblen $SL_2\mathbb{C}$-Modul gibt es entweder das Nullgewicht, d.h. einen Eigenvektor in W_0, oder das Gewicht 1 und einen Eigenvektor in W_1. Beide gleichzeitig sind nicht möglich

! Bemerkung: • $\dim PW_m = \dim W_m - \dim W_{m+2}$

da: • $W_m = PW_m \oplus Y PW_{m+2} \oplus \ldots$

$W_{m+2} = PW_{m+2} \oplus Y PW_{m+4} \oplus \ldots$

• $Y : PW_{m+2} \longrightarrow W_m$ ist injektiv

$Y^{m+2} = Y^{m+1} \circ Y$ ist ein Iso. auf PW_{m+2}

• $Y^s : W_m \rightarrow W_{m-2s}$ ist injektiv für $0 \leq s \leq m$

und surjektiv $s \geq m$

$\rightarrow$

$Y^s : W_m \to W_{m-2s}$

$W_{m-2s} = W_{-(2s-m)} = Y^{2s-m} PW_{2s-m} \oplus \dots$

$2s-m \geq s \iff s \geq m \quad \to$ Surjektivität