③ Ricci-flache Kähler-Mfk.

Theorem: Sei (M^{2m}, h, J) eine Kähler-Mfk. mit kanonischem Bündel K und Ricci-Form ρ. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

und $\pi_1(M) = 1$ oBdA

1. M ist Ricci-flach
2. Der Chern-Zus. des kanonischen Bündels ist flach.
3. Es existiert eine ∇-parallele komplexe Volumenform, d.h. ein paralleler Schnitt in $\Lambda^{m,0}TM$.
4. M hat eine geometrische $SU(m)$-Struktur.
5. Die Riemannsche Holonomie von (M, h) ist eine Untergruppe von $SU(m)$.

Bezeichnung: Calabi-Yau Mfk
falls $Hol \overset{!}{=} SU_m$

Beweis: ① $\Leftrightarrow$ ② da: $R^{\Lambda^{m,0}TM} = i\rho$

② $\Leftrightarrow$ ③: allgemeines Prinzip: Zus. auf einem Geradenbündel ist flach genau dann, wenn ein paralleler Schnitt existiert (i.A. lokal definiert, $\pi_1(M)=1 \to$ global)

③ $\Leftrightarrow$ ④ $SU(m)$ ist der Stabilisator eines Vektors in $\Lambda^{m,0}T$ unter der kanonischen Darstellung von $U(m)$ auf $\Lambda^{m,0}T$

komplexe Volumenform $dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m$

Holonomie Prinzip

$\Rightarrow \exists$ paralleler Schnitt in $\Lambda^{m,0}TM \Leftrightarrow$ die geometrische $U(m)$-Struktur reduziert sich weiter auf $SU(m)$

④ $\to$ ⑤ $P_{SU(m)} \subset P_{SO(2m)}$

∇ Zus auf $P_{SU(m)} \longrightarrow Hol(\nabla) \subset SU(m)$

$P_{SU(m)}$ geometrische $SU(m)$-Struktur definiert durch einen torsions-freien Zus. $\nabla \Rightarrow \nabla = \nabla^{LC}$

$\to Hol(\nabla^{LC}) \subset SU(m)$

⑤ $\to$ ④ $u \in P_{SO(2m)}$ fix., $P(u)$: Holonomiebündel durch u mit Holonomie $Hol(u)$
$Hol(u)$-HFB

$Hol(\nabla^{LC}) \subset SU(m) \Rightarrow i: Hol(u) \hookrightarrow SU(m)$

$\Rightarrow P_{SU(m)} := P_{Hol(u)} \times_i SU(m)$ geometrische $SU(m)$-Struktur

! Bemerkung: (M, h, J) Ricci-flach + Kähler $\to c_1(M) = 0$. M kompakt: Umkehrung gilt

18. Das Calabi-Yau-Theorem

(M, g, J) kompakte Kähler-Mft. $\Rightarrow c_1(M) = [\frac{1}{2\pi}\rho]$

Umkehrung: Q: Welche geschlossenen (1,1)-Formen sind möglich als Ricci-Formen?

Theorem: (Calabi, Yau)

Sei M^m eine kompakte Kähler-Mft. mit Kähler-Form ω und Ricci-Form ρ. Dann existiert zu jeder geschlossenen, reellen (1,1)-Form ρ_1 mit $c_1(M) = [\frac{1}{2\pi}\rho_1]$ eine eindeutig bestimmte Kähler-Metrik mit Kähler-Form ω_1, deren Ricci-Form genau ρ_1 ist und mit $[\omega] = [\omega_1]$.

Calabi-Vermutung

Calabi: '54
Yau: '76

Insbesondere: $c_1(M) = 0 \Rightarrow$ es ex. eine Ricci-flache Kähler-Metrik auf M

1. Schritt: Umformulierung

$c_1 > 0 \rightarrow \exists g \ \rho > 0$
$c_1 < 0 \rightarrow \exists g \ \rho < 0$

(M, g, J) Kähler $\rightsquigarrow \omega, \rho$

Normalisierung, dadurch u eindeutig

$$\mathcal{K} := \{ g \text{ Kähler} \mid [\omega_g] = [\omega] \}$$
$$= \{ u \in C^\infty(M) \mid \omega + i\partial\bar\partial u > 0, \ \int_M u\,\omega^m = 0 \}$$

globales $\partial\bar\partial$-Lemma

wobei für $\varphi \in \Omega^{1,1}_{\mathbb{R}}(M)$, $\varphi > 0$ falls $\varphi(\cdot, J\cdot)$ positiv-definit

- g, g_1 Kähler, $\omega := \omega_g$, $\omega_1 := \omega_{g_1}$, $[\omega] = [\omega_1]$
  $vol := \frac{1}{m!}\omega^m$, $vol_1 := \frac{1}{m!}\omega_1^m$ Ricci-Formen: ρ, ρ_1
  $f \in C^\infty(M)$: $e^f\, vol = vol_1$
  $\int e^f vol = \int vol$ da: $[\omega] = [\omega_1] \rightarrow [\omega^m] = [\omega_1^m]$ + Stokes

!

- Sei σ ein lokaler holomorpher Schnitt in $K_M = \Lambda^{m,0}M$

§ $\Rightarrow i\rho = \bar\partial\partial \log g(\sigma, \bar\sigma)$ $\quad i\rho_1 = \bar\partial\partial \log g_1(\sigma, \bar\sigma)$

! • $* = \varepsilon \cdot \mathrm{Id}$ auf $\Lambda^{m,0}$, $\varepsilon = i^m \cdot (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}$ (ÜA)

$\Rightarrow \varepsilon\, \sigma \wedge \bar\sigma = \sigma \wedge *\bar\sigma = g(\sigma, \bar\sigma)\, vol$

und analog:

$\varepsilon\, \sigma \wedge \bar\sigma = g_1(\sigma, \bar\sigma)\, vol_1 = e^f g_1(\sigma, \bar\sigma)\, vol$ $\rightarrow g(\sigma, \bar\sigma) = e^f g_1(\sigma, \bar\sigma)$

$\downarrow$

$\Rightarrow i\rho_1 - i\rho = \partial\bar\partial f$ $\qquad \log \frac{g_1(\sigma, \bar\sigma)}{g(\sigma, \bar\sigma)} = -f$

also: $\omega_1 = \omega + i\partial\bar\partial u$

$\Rightarrow \quad \rho_1 = \rho - i\partial\bar\partial f \qquad\qquad e^f\omega^m = \omega_1^m$ nach Definition

$\rightarrow f = \log \dfrac{(\omega + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega^m}$

gegeben ρ_1 mit:

- $[\rho_1] = 2\pi\, c_1(M)$, ρ_1 reelle und geschlossene $(1,1)$-Form (wie im Theorem)

$\rightarrow \exists f \in C^\infty(M): \quad \rho_1 = \rho - i\partial\bar\partial f$ da globales $\partial\bar\partial$-Lemma

f ist eindeutig bestimmt mit der Normalisierung $\int e^f \mathrm{vol} = \int \mathrm{vol}$

$K' := \{ f \in C^\infty(M) \mid \rho - i\partial\bar\partial f$ ist $\underset{(1,1)\text{-Form}}{\overset{\text{reelle}}{\text{geschlossene}}}$ die $\underset{\text{repräs}}{2\pi c_1(M)}$, $\int e^u \mathrm{vol} = \int \mathrm{vol} \}$

Theorem': Die Abbildung $\mathrm{Cal}: K \to K'$ definiert durch:

$$\mathrm{Cal}(u) = \log \frac{(\omega + i\partial\bar\partial u)^m}{\omega^m}$$

ist ein Diffeomorphismus

$\hat{=}$ oBdA $u = 0$! $\qquad (*)$

gezeigt von Calabi '55

zum Beweis:

- Cal ist injektiv, zz $\mathrm{Cal}(u) = 0,\ u \in K \Rightarrow u = 0$!

$\omega_1 = \omega + i\partial\bar\partial u$

$\mathrm{Cal}(u) = 0 \Rightarrow \omega_1^m = \omega^m$

! $\qquad \Rightarrow 0 = \omega_1^m - \omega^m = i\partial\bar\partial u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1}$ (3. binomische Formel ?)

$\rightarrow 0 = 2iu\, \partial\bar\partial u \wedge \sum_k \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1} \qquad 2i\partial\bar\partial = dd^c$

$= u\, dd^c u \wedge \sum_k \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1}$

$= d\left(u\, d^c u \wedge \sum_k \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1}\right) - du \wedge d^c u \wedge \sum_k \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1}$

Stokes

$\Rightarrow 0 = \sum_k \int du \wedge d^c u \wedge \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1} \qquad d^c = [J, d]$

! $\qquad = \sum_k \int du \wedge J\, du \wedge \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1} \qquad = Jd$ auf Funktionen!

zu (*): $\mathrm{Cal}(u_1) = \mathrm{Cal}(u_2) \Leftrightarrow (\omega + i\partial\bar\partial u_1)^m = (\omega + i\partial\bar\partial u_2)^m$

man nimmt dann $\omega + i\partial\bar\partial u_2$ als neue Basis-Kähler-Form ω_0

$\rightarrow \omega = \omega_0 - i\partial\bar\partial u_2 \qquad \Leftrightarrow \omega_0^m = (\omega_0 + i\partial\bar\partial(u_1 - u_2))^m \quad \hat{=} \quad \underset{=0}{\mathrm{Cal}(u_1 - u_2)}$

$\exists$ lokale ONB $(e_1, Je_1, \ldots, e_m, Je_m)$ mit

$\longrightarrow$

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} e_j \wedge J e_j \quad , \quad \omega_1 = \sum a_j e_j \wedge J e_j$$

mit $a_j > 0$, lokal - definiert

da $a_j = \omega_1 (e_j, Je_j) = g_1(Je_j, Je_j) > 0$

$$\Rightarrow \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1} = * \left(\sum b_j^k \, e_j \wedge J e_j \right) , \; b_j^k > 0 \; ! \quad \forall k$$

$$\text{mit} \quad b_j^k = k! \, (m-k-1)! \sum_{\substack{j_1 \neq j \\ \vdots \\ j_k \neq j \\ j_1 < \ldots < j_k}} a_{j_1} \cdots a_{j_k} \quad > 0$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_k \int du \wedge J du \wedge \omega_1^k \wedge \omega^{m-k-1}$$

$$= \sum_k \int du \wedge J du \wedge * (b_j^k e_j \wedge J e_j)$$

$$= \sum (du \wedge J du, e_j \wedge J e_j) \, b_j^k$$

$$= \sum b_j^k \left((du, e_j)(du, e_j) - (du, Je_j)(J du, e_j) \right)$$

$$= 2 \sum b_j^k \, \| du \|^2$$

$\Rightarrow$ $du = 0$, d.h. u ist konstant

$\Rightarrow$ $u = 0$ da $\int_M u \, vol = 0$

d.h. Cal ist injektiv

Bemerkung: In lokalen Koordinaten:

$$Cal(u) = \log \det \left(g_{\alpha\bar\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar z_\beta} \right) - \log \det (g_{\alpha\bar\beta})$$

($\nearrow$ Lemma S.48)

$$g_1(X,Y) = g(AX,Y)$$

$\rightarrow$ A ist symmetrisch und kommutiert mit J — da $\omega_1 = g_1(J\cdot,\cdot)$ eine (1,1)-Form

$\rightarrow$ es ex. gemeinsame Basis von Eigenvektoren !

Monge - Ampère Gleichung

$u : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\det(\mathrm{Hess}(u)) = f$ $\qquad f = f(x_1, \dots x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$

zB $n=2$: $\quad u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = f$