Satz. Das kanonische Bündel von $\mathbb{C}P^m$ ist isomorph zur $(m+1)$ten Potenz des tautologischen Bündels, d.h.

$$K_{\mathbb{C}P^m} \cong L^{m+1}$$

Beweis: • Trivialisierung für das kanonische Bündel

(U, φ_α) Karten auf $\mathbb{C}P^m$

$$p : \Lambda^{m,0} T^* \mathbb{C}P^m \longrightarrow \mathbb{C}P^m$$

$$(\varphi_\alpha^*)^{-1} : p^{-1}(U_\alpha) = K_{\mathbb{C}P^m}|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \Lambda^{m,0} \mathbb{C}^m$$

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{C}^m, \qquad \varphi_\alpha^* : \Lambda^{m,0} \mathbb{C}^m \longrightarrow \Lambda^{m,0} T^* U_\alpha$$

$\Rightarrow$ Übergangsfunktionen: $\quad h_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha^*)^{-1} \circ (\varphi_\beta^*)$

• $\Lambda^{m,0} \mathbb{C}^m = \mathbb{C} \cdot \sigma \quad$ mit $\quad \sigma = dw_1 \wedge \dots \wedge dw_m \quad , \sigma = vol_{\mathbb{C}}$

holomorphe Koordinaten $\quad a_i := \frac{z_i}{z_\alpha} \quad i \neq \alpha$

$\qquad b_i := \frac{z_i}{z_\beta} \quad i \neq \beta \qquad$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$

$U_\alpha = \{[z_0 : \dots : z_m] \mid z_\alpha \neq 0\}$

$\varphi_\alpha : (\frac{z_0}{z_i} ; \dots \frac{z_m}{z_i})$

$$\varphi_\alpha^* \sigma = da_0 \wedge \dots \wedge da_{\alpha-1} \wedge da_{\alpha+1} \wedge \dots \wedge da_m$$

$$\varphi_\beta^* \sigma = db_0 \wedge \dots \wedge db_{\beta-1} \wedge db_{\beta+1} \wedge \dots \wedge db_m$$

$\longrightarrow$ genauer

$$\Rightarrow db_0 \wedge \dots \widehat{db_\beta} \wedge \dots \wedge db_m = h_{\alpha\beta} \cdot da_0 \wedge \dots \wedge \widehat{da_\alpha} \wedge \dots \wedge da_m \longrightarrow$$

aber: $\quad a_\beta \cdot b_\alpha = 1 \quad$ und $\quad a_i = b_i a_\beta \quad \forall\, i \neq \alpha, \beta$

$$\to da_\beta = -\frac{1}{b_\alpha^2} db_\alpha = -a_\beta^2 db_\alpha \quad , \quad da_i = a_\beta db_i + b_i da_\beta$$

$$\to da_0 \wedge \dots \wedge \widehat{da_\alpha} \wedge \dots \wedge da_m \qquad \alpha \neq \beta$$

$$= (-1)^{\alpha-\beta} a_\beta^{m+1} db_0 \wedge \dots \wedge \widehat{db_\beta} \wedge \dots \wedge db_m$$

$$\to h_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha-\beta} a_\beta^{-m-1} = (-1)^{\alpha-\beta} \left(\frac{z_\alpha}{z_\beta}\right)^{m+1}$$

$$\to g_{\alpha\beta}^{m+1} = c_\alpha h_{\alpha\beta} c_\beta^{-1} \quad \text{mit} \quad c_\alpha := (-1)^\alpha$$

$$\to L^{m+1} = K_{\mathbb{C}P^m}$$

• $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$

$[z_0 : \dots : z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_\alpha}, \dots, \frac{z_n}{z_\alpha}\right) = (w_1, \dots, w_n)$ $\qquad a_j = \frac{z_j}{z_\alpha}$

$z_\alpha \neq 0$

$\sigma = dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n$

$\varphi_\alpha^* \sigma = (\varphi_\alpha^* dw_1) \wedge \dots \wedge (\varphi_\alpha^* dw_n)$

$\varphi_\alpha^* dw_j = d\, \varphi_\alpha^* w_j = d\, w_j \circ \varphi_\alpha = d\, a_j$

$\cancel{\varphi_\beta^* \sigma = d b_0} \wedge \dots$

$\cancel{= (\varphi_\beta^* \circ (\varphi_\alpha^*)^{-1}) d a_0} \wedge \dots$

$\cancel{= ((\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta)^*}$

• $(\varphi_\alpha^*)^{-1} \circ \varphi_\beta^* \sigma = h_{\alpha\beta} \cdot \sigma$

$\Rightarrow \quad \varphi_\beta^* \sigma = h_{\alpha\beta}\, \varphi_\alpha^* \sigma$

$\Rightarrow \quad d b_0 \wedge \dots = h_{\alpha\beta} \cdot d a_0 \wedge \dots$

Einschub: Übergangsfunktionen

↗ Husemoller Fibre Bundles

Sei $E \xrightarrow{\pi} M$ ein Vektorbündel

lokale Trivialisierung: $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U) = E|_{U_\alpha} \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k$

Übergangsfunktionen: $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^k$

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot v)$$

$$g_{\alpha\beta} : U \cap V \longrightarrow GL_k(\mathbb{C})$$

Lemma:
(T1) $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\gamma}(x) \cdot g_{\gamma\beta}(x) \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

(T2) $g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{Id} \quad \forall x \in U$

(T3) $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1} \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$

Bemerkung:
- Man nennt $\{g_{\alpha\beta}\}$ auch eine Familie von Kozykeln bzgl. einer fixierten Überdeckung (Čech Kozykel)
- Umgekehrt definiert jeder Kozykel ein Vektorbündel:

$$E := \left(\dot{\bigcup_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{C}^k \right) \Big/ \sim \qquad (x, v) \sim (x, g_{\beta\alpha}(x) v) \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

Verklebungsvorschrift

Definition: Zwei Kozykeln $\{g_{uv}\}$ und $\{\tilde{g}_{uv}\}$ bzgl. einer fixierten Überdeckung heissen äquivalent, falls eine Abbildung $r_u : U \to GL_k(\mathbb{C})$ existiert mit

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = r_\alpha(x)^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}(x) \cdot r_\beta(x)$$

Satz: Seien E und $\tilde{E}$ zwei Vektorbündel vom Rang k über M und seien $\{g_{\alpha\beta}\}$ und $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ zwei Kozykeln definiert bzgl. zweier Trivialisierung von E bzw $\tilde{E}$ (bei einer fixierten Überdeckung). Dann ist E genau dann isomorph zu $\tilde{E}$, wenn $\{g_{\alpha\beta}\}$ äquivalent zu $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ ist.

Bemerkung: Ein Schnitt $\sigma \in \Gamma(E)$ ist gegeben durch $\{\sigma_\alpha\}$ mit $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^k$ mit $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\, \sigma_\beta$

$$\psi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{C}^k$$

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} (x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x) v)$$

$$(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\beta \circ \psi_\gamma^{-1}) = (\psi_\alpha \circ \psi_\gamma^{-1}) \quad \text{auf } (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times \mathbb{C}^k$$

$$(x, v) \mapsto (x, g_{\beta\gamma}(x) v) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) v)$$

$$\mapsto (x, g_{\alpha\gamma}(x) v)$$

$$\Rightarrow \quad g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x)\, g_{\beta\gamma}(x)$$

Beweis: $\{\psi_\alpha\}$, $\{\tilde\psi_\alpha\}$ seien die Trivialisierungen von E bzw $\tilde E$ mit den Übergangsfunktionen $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{\tilde g_{\alpha\beta}\}$

- Vor: $\{g_{\alpha\beta}\}$, $\{\tilde g_{\alpha\beta}\}$ sind äquivalent
  dh. $\tilde g_{\alpha\beta}(x) = r_\alpha(x)^{-1}\, g_{\alpha\beta}(x)\, r_\beta(x) \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$

man definiert:
- $f_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{C}^k \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^k$
  $f_\alpha(x,v) = (x, r_\alpha(x)^{-1} v)$
- $f : E \to \tilde E$
  $f\big|_{E|_{U_\alpha}} = \tilde\psi_\alpha^{-1} \circ f_\alpha \circ \psi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k \to \tilde E|_{U_\alpha}$

z.z. f ist wohl-definiert, dh. unabhängig von α

sei $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $s = \psi_\alpha^{-1}(x,v)$, $v \in \mathbb{C}^k$

$$\begin{aligned}
\tilde\psi_\beta^{-1} \circ f_\beta \circ \psi_\beta (s) &= \tilde\psi_\beta^{-1} \circ f_\beta\ \psi_\beta \psi_\alpha^{-1}(x,v) \\
&= \tilde\psi_\beta^{-1} \circ f_\beta\ (x, g_{\beta\alpha}(x) v) \\
&= \tilde\psi_\beta^{-1}\ (x, r_\beta(x)^{-1} g_{\beta\alpha}(x) v) \\
&= \tilde\psi_\alpha^{-1}\ (x, \tilde g_{\alpha\beta}(x)\, r_\beta(x)^{-1} g_{\beta\alpha}(x) v) \\
&= \tilde\psi_\alpha^{-1}\ (x, r_\alpha(x)^{-1} g_{\beta\alpha}(x) v)
\end{aligned}$$

nochmal:

zz $\tilde\psi_\alpha^{-1} \circ f_\alpha \circ \psi_\alpha = \tilde\psi_\beta^{-1} \circ f_\beta \circ \psi_\beta$ auf $E|_{U_\alpha \cap U_\beta}$

$\Leftrightarrow\ f_\alpha \circ \psi_\alpha = \tilde\psi_\alpha \tilde\psi_\beta^{-1}\ f_\beta \circ \psi_\beta, \qquad s = \psi_\alpha^{-1}(x,v)$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ (x, r_\alpha(x)^{-1} v) &= \tilde\psi_\alpha \tilde\psi_\beta^{-1}\ (x, r_\beta(x)^{-1} g_{\beta\alpha}(x) v) \qquad \left(\begin{aligned}\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,v) \\ = (x, g_{\beta\alpha}(x) v)\end{aligned}\right) \\
&= (x, \tilde g_{\alpha\beta}(x) \cdot r_\beta(x)^{-1}\ g_{\beta\alpha}(x)\, v) \\
&= (x, r_\alpha(x)^{-1} g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) v) \\
&= (x, r_\alpha(x)^{-1} v)
\end{aligned}$$

dh. f ist der gesuchte Isomorphismus von E und $\tilde E$

Lemma: Seien $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ $\{(U_\alpha, \tilde{\psi}_\alpha)\}$ zwei Trivialisierungen für ein Vektorbündel E mit den Übergangsfunktionen $\{g_{\alpha\beta}\}$ und $\{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$. Sei $r_\alpha : U_\alpha \to Gl_k(\mathbb{C})$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit

$$\tilde{\psi}_\alpha^{-1}(x, v) = \psi_\alpha^{-1}(x, r_\alpha(x)v)$$

Dann gilt:

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = r_\alpha(x)^{-1} \cdot g_{\alpha\beta}(x) \cdot r_\beta(x) \qquad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

Beweis:
- $\tilde{\psi}_\beta^{-1}(x, v) = \psi_\beta^{-1}(x, r_\beta(x)v) = \psi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x) r_\beta(x) v)$
- $\tilde{\psi}_\alpha^{-1}(x, \tilde{g}_{\alpha\beta}(x)v) = \psi_\alpha^{-1}(x, r_\alpha(x)\tilde{g}_{\alpha\beta}(x)v)$
- $\tilde{\psi}_\beta^{-1}(x, v) = \tilde{\psi}_\alpha^{-1}(x, \tilde{g}_{\alpha\beta}(x)v)$

$\Rightarrow r_\alpha(x)\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) r_\beta(x)$

(d.h. Kozykeln zu verschiedenen Trivialisierungen eines VB E sind äquivalent)

<u>Beweis des Satzes</u>

- Sei $f : E \to \tilde{E}$ ein VB-Isomorphismus

$$\psi_\beta^{-1}(x, v) = \psi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)v)$$

$\psi_\alpha \circ f^{-1}$

$\Rightarrow f\,\psi_\beta^{-1}(x, v) = f\,\psi_\alpha^{-1}(x, g_{\alpha\beta}(x)v)$

$\Rightarrow \{(U_\alpha, (f \circ \psi_\alpha^{-1})^{-1})\}$ ist neue Trivialisierung von $\tilde{E}$ mit Übergangsfunktion $g_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow \{g_{\alpha\beta}\}, \{\tilde{g}_{\alpha\beta}\}$ sind äquivalente Übergangsfunktionen

Übergangsfunktionen des dualen Bündels

$f_i = \sum a_{ij} e_j$

$f_i^* = \sum x_{ij} e_j^* \quad \rightarrow \quad x_{ij} = f_i^*(e_j)$

$\sum_k a^{-1}_{ki} f_i = \sum_{k,i} a^{-1}_{ki} a_{ij} e_j = e_k$

$\rightarrow e_k = \sum a^{-1}_{ki} f_i$

$\rightarrow x_{ij} = f_i^* \left(\sum a^{-1}_{jk} f_k \right) = a^{-1}_{jk}$

$\rightarrow f_i^* = \sum a^{-1}_{jk} e_j^*$

10. Hermitesche Bündel

1 Der Krümmungsoperator eines Zusammenhangs

Sei M eine diff.bare Mft., $E \to M$ ein Vektorbündel

Definition: Ein Zusammenhang (auch kovariante Ableitung) auf E ist ein $\mathbb{C}$-linearer Differential-Operator

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(E) \qquad (\Gamma(E) = \Omega^0(E))$$

der die Leibniz-Regel erfüllt.

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f \nabla\sigma$$

Bemerkung:
- $\nabla_X \sigma$ ist $C^\infty(M)$-linear in X
- ∇ setzt sich fort zu einem Zusammenhang auf $\Omega^p(E)$
  man definiert:

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) := d\omega \otimes \sigma + (-1)^p \omega \wedge \nabla\sigma$$

wobei:

$$\omega \wedge \nabla\sigma := \sum_i (\omega \wedge e_i^\vee) \otimes \nabla_{e_i}\sigma \qquad \{e_i\} \text{ lokale ONB}$$

Definition Der Krümmungsoperator von ∇ ist definiert als

$$R^\nabla \sigma = \nabla(\nabla\sigma) \qquad \forall \sigma \in \Gamma(E)$$

Lemma: $R^\nabla \in \Omega^2(\operatorname{End} E)$

Beweis: z.z. R^∇ ist tensoriell

$$\begin{aligned}
\nabla^2(f\sigma) &= \nabla(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) \\
&= d^2 f \otimes \sigma - df \wedge \nabla\sigma + df \wedge \nabla\sigma + f\nabla^2\sigma \\
&= f\nabla^2\sigma
\end{aligned}$$

Lemma: $R^\nabla_{XY}\sigma = \nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma$

Beweis: $\nabla\sigma = \sum_i e_i^* \otimes \nabla_{e_i}\sigma$ $\qquad \{e_i\}$ lokale Basis

$$\Rightarrow \nabla^2\sigma = \sum_i de_i^* \otimes \nabla_{e_i}\sigma - e_i^* \wedge \nabla\nabla_{e_i}\sigma$$
$$= \sum_i de_i^* \otimes \nabla_{e_i}\sigma - \sum_{i,j}(e_i^*\wedge e_j^*)\otimes\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\sigma$$

$X,Y \in T_pM$ fortgesetzt zu lokalen VF: $X = \sum_i e_i^*(X)e_i$

$$\Rightarrow R^\nabla_{XY}\sigma = (\nabla^2\sigma)(X,Y)$$
$$= -\nabla_{[X,Y]}\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma + \nabla_X\nabla_Y\sigma$$

da $de_i^*(X,Y) = X(e_i^*(Y)) - Y(e_i^*(X)) - e_i^*([X,Y]) = -e_i^*([X,Y])$

Lokale Beschreibung

Sei $\{\sigma_1,\dots,\sigma_k\}$ eine lokale Basis von E über U

man definiert $\omega_{ij}\in\Omega^1(U)$ durch.

$$\nabla\sigma_i = \sum_j \omega_{ij}\otimes\sigma_j \qquad \omega = (\omega_{ij})$$
$$R^\nabla\sigma_i = \sum_j \Omega_{ij}\otimes\sigma_j \qquad \Omega = (\Omega_{ij})$$

Lemma: $\Omega = d\omega - \omega\wedge\omega$

d.h. $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_\ell \omega_{i\ell}\wedge\omega_{\ell j}$

Beweis: $\sum_j \Omega_{ij}\otimes\sigma_j = R^\nabla\sigma_i = \nabla(\sum_j\omega_{ij}\otimes\sigma_j)$

$$= \sum_j d\omega_{ij}\otimes\sigma_j - \omega_{ij}\wedge\nabla\sigma_j$$
$$= \sum_k (d\omega_{ik} - \sum_j \omega_{ij}\wedge\omega_{jk})\otimes\sigma_k$$

$$\Rightarrow \Omega_{ik} = d\omega_{ik} - \sum_j \omega_{ij}\wedge\omega_{jk}$$

$$e = \sum_i a_i \sigma_i$$

$$\rightarrow \nabla e = \sum_i da_i \otimes \sigma_i + a_i \nabla \sigma_i$$

$$= \sum_j \left(da_j + \sum_i a_i \omega_{ij} \right) \otimes \sigma_j$$

$$\Rightarrow \nabla \triangleq d + \omega$$