17. Vorlesung
7. 1. 2020

2 Eigenschaften der 1. Chern-Klasse

Satz: Seien E, F komplexe Vektorbündel über einer Mfk. M. Dann gilt:

1. $c_1(E) = c_1(\Lambda^k E) \qquad k = rk(E)$
2. $c_1(E \otimes F) = rk(F) \cdot c_1(E) + rk(E) \cdot c_1(F)$
3. $c_1(E^*) = -c_1(E)$

Beweis: zu 1: ∇ Zus. auf $E \rightsquigarrow \tilde{\nabla}$ Zus. auf $\Lambda^k E$

$(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ lokale Basis $\rightarrow \sigma := \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k$ Basis von $\Lambda^k E$

Zus-Matrix: $\omega = (\omega_{ij})$ von ∇, $\quad \tilde{\omega}$ von $\tilde{\nabla}$

dh. $\nabla \sigma_i = \sum \omega_{ij} \otimes \sigma_j, \quad \tilde{\nabla} \sigma = \tilde{\omega} \otimes \sigma$

$$\Rightarrow \tilde{\nabla} \sigma = \tilde{\nabla}(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k)$$
$$= \sum_i \sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_{i-1} \wedge \Big(\sum_j \omega_{ij} \otimes \sigma_j\Big) \wedge \sigma_{i+1} \wedge \dots \wedge \sigma_k$$
$$= \sum \omega_{ii} \otimes \sigma$$

$$\Rightarrow \tilde{\omega} = Tr(\omega)$$

$$Tr(R^{\tilde{\nabla}}) = R^{\tilde{\nabla}} = d\tilde{\omega} - \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = d\tilde{\omega}$$
$$Tr(R^{\nabla}) = \sum_{i=j} d\omega_{ij} - \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} = \sum d\omega_{ii} = d\, Tr(\omega)$$
$$= d\tilde{\omega}$$

$$\rightarrow c_1(E) = c_1(\Lambda^k E)$$

zu 2: • E, F seien Geradenbündel, Zus. ∇^E, ∇^F

$$\rightarrow \nabla(\sigma^E \otimes \sigma^F) := (\nabla^E \sigma^E) \otimes \sigma^F + \sigma^E \otimes (\nabla^F \sigma^F)$$
$$\Rightarrow \omega = \omega^E + \omega^F$$
$$R^{\nabla} = d\omega = d(\omega^E + \omega^F) = R^{\nabla^E} + R^{\nabla^F} \longrightarrow \text{Formel für } c_1$$

• allgemeiner Fall: $rk\, E = e, \ rk\, F = f$

! $$\Lambda^{e \cdot f}(E \otimes F) \cong (\Lambda^e E)^{\otimes f} \otimes (\Lambda^f F)^{\otimes e}$$ $\overset{!}{\Rightarrow}$

$$\rightarrow c_1(E \otimes F) = c_1(\Lambda^{ef}(E \otimes F)) = f c_1(\Lambda^e E) + e c_1(\Lambda^f F) = f c_1(E) + e c_1(F)$$

zu ③: • $(\Lambda^k E)^* \cong \Lambda^k E^*$, $\quad k = \mathrm{rk}\, E$

$\Rightarrow$ oBdA: $\mathrm{rk}\, E = 1$

• sei E ein Geradenbündel

$\Rightarrow$ $E \otimes E^* \cong \mathbb{C}$ (= triviales Geradenbündel)

$\rightarrow$ $0 = c_1(\mathbb{C}) = c_1(E \otimes E^*)$

$= c_1(E) + c_1(E^*)$

? oder: $R^{\nabla^*} = -(R^\nabla)^T$ (als Matrix $R^\nabla = (R^\nabla_{ij})$)

Bemerkungen (weitere Eigenschaften der Chern-Klassen)

① $E \cong F \Rightarrow c_1(E) = c_1(F)$ — d.h. Gleichheit der Chern-Klassen notwendiges Krit. für Isom.

② $E \cong \Theta^k$, d.h. E isomorph zum trivialen VB

$\Rightarrow c_1(E) = 0$

aber: $c_1(E) = 0$, E nicht-trivial möglich

③ $c_1(TS^n \otimes \mathbb{C}) = 0$ — da $(TS^n \otimes \mathbb{C}) \oplus \Theta^1 = \Theta^{n+1}$

④ $c_1(\mathbb{C}P^n) = (n+1)g$ — $g \in H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$

da $c_1(TM) = c_1(\Lambda^{n,0}) = c_1(K) = c_1(L \otimes \ldots \otimes L) = (n+1)c_1(L)$

Insbesondere: $T\mathbb{C}P^n$ ist <u>nicht</u> trivial

Bemerkung:

- TS^n ist trivial für $n = 1, 3$ und 7
- $TS^n \otimes \mathbb{C}$ ist trivial für alle n

<u>da</u>:
- $E = TS^n \otimes \mathbb{C}$ ist stabil-trivial
- $c(E) = 1$, Spektralsequenz-Argument $c(E) = 1 \Leftrightarrow$ trivial

keine Torsion

([illegible])

17. Die Ricci-Form von Kähler-Mfk

① Kähler-Metriken als geometrische $U(m)$-Strukturen

M^n n-dim. Mfk., $G \subset GL(n,\mathbb{R})$ abgeschlossene UG

Definition: Eine topologische G-Struktur auf M ist eine Reduktion des Rahmenbündels $P_{GL(n,\mathbb{R})}$ nach G, d.h. ein G-Hauptfaserbündel:

$$\begin{tikzcd} P_G \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\pi"'] & P_{GL(n,\mathbb{R})} \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

mit: • $\pi \circ i = \pi$
• verträgliche Gruppenwirkung

Eine geometrische G-Struktur ist eine topologische G-Struktur zusammen mit einem torsions-freien Zusammenhang auf P_G

Beispiele: • Orientierung auf M: $GL^+(n,\mathbb{R})$-Struktur
• fast-komplexe Struktur: $GL(m,\mathbb{C})$-Struktur, $n=2m$

Bemerkung: Die meisten G-Strukturen sind durch folgende Konstruktion gegeben:

$\rho : GL(n,\mathbb{R}) \to \operatorname{End} V$ Darstellung

$\xi \in V$, $G := \{ g \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \rho(g)\xi = \xi \}$

$\mathcal{O} = \{ \rho(g)\xi \mid g \in GL(n,\mathbb{R}) \} \subset V$, $\mathcal{O} = GL_n/G$

! G-Struktur: $P_G = P_{GL(n,\mathbb{R})} \times_\rho \mathcal{O} = P_{GL(n,\mathbb{R})}/G$
$\hat{=}$ Schnitt σ in P_G

P_G ist geometrische G-Struktur $\Leftrightarrow \exists \nabla : \nabla\sigma = 0$

∇ torsionsfrei + linearer Zus. auf M

Satz: Eine $U(m)$-Struktur definiert durch eine fast komplexe Struktur J und eine hermitesche Metrik h ist genau dann eine geometrische $U(m)$-Struktur, wenn h eine Kähler-Metrik ist.

Beweis: • $G \subset O(n)$ abg. UG $\to \exists!$ torsions-freier Zus. auf P_G

• $U(m) = O(2m) \cap GL(m,\mathbb{C})$ d.h. $P_{U(m)}$ ist geom. $\Leftrightarrow \nabla J = 0$

(2) Ricci-Form als Krümmung des kanonischen Bündels

(M^{2m}, h, J) sei eine Kähler-Mfk.

Ricci-Form : ρ

kanonisches Bündel: $K := \Lambda^{m,0} TM$

TM : holomorphes VB, Mult. mit $i \hat{=} J$, hermit. Struktur: $h - i\omega$

$\nabla^{LC} = \nabla^{Chern}$

! **Lemma:** Sei $R^\nabla \in \Omega^2(M, \operatorname{End} TM)$ die Krümmung des Chern-Zus. ∇ und sei R die Riemannsche Krümmung. Dann gilt:

$$R^\nabla_{X,Y}\, \xi = R(X,Y)\, \xi$$

X, Y VF auf M, ξ ein Schnitt von TM.

zum Beweis: schon gezeigt $R^\nabla = \nabla^2$

zz $R^\nabla_{X,Y}\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$

Satz: Die Krümmung des Chern-Zusammenhangs des kanonischen Geradenbündels K ist gleich $i\rho$ (Wirkung durch skalare Multiplikation). Insbesondere: $c_1(M) = [\frac{1}{2\pi}\rho]$?

Beweis: r = Krümmung von K, r^* = Krümmung von $K^* = \Lambda^{0,m} TM$

(ÜA): $r = -r^*$ — Krümmung der Chern-Zus.

H = hermitesche Struktur auf TM $\rightsquigarrow$ hermitesche Struktur auf $\Lambda^m TM$; H

Zus. auf $\Lambda^m TM$ induziert vom Chern-Zus von (TM, H)

= Chern-Zus. von $(\Lambda^m TM, H)$

∇^g : LC-Zus.
∇ : Chern-Zus

- $r^*(X,Y) = \operatorname{Tr}(R^\nabla(X,Y)) = \operatorname{Tr}(R^g(X,Y))$
- $i\rho(X,Y) = i \operatorname{Ric}(JX, Y) = \frac{i}{2} \operatorname{Tr}^{\mathbb{R}}(R^g(X,Y) \circ J)$

! $= \frac{i}{2}(2i \operatorname{Tr}^{\mathbb{C}}(R^g(X,Y)) = -\operatorname{Tr}^{\mathbb{C}}(R^g(X,Y))$

$= -r^*(X,Y) = r(X,Y)$

wobei: $\operatorname{Tr}^{\mathbb{R}}(A^{\mathbb{R}} \circ J) = 2i \operatorname{Tr}^{\mathbb{C}}(A)$ $\quad \forall A$ schief-hermit. ÜA