② Dolbeault - Theorie

(M^{2m}, h, J) kompakt, hermitesche Mf. !

Definition: Die Dolbeault-Kohomologie-Gruppen sind definiert durch:

$$H^{p,q}(M) = \mathrm{Ker}(\bar\partial : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1}) / \mathrm{Im}(\bar\partial)$$

$H^q(M, \Omega^p) = H^{p,q}(M)$
Dolbeault-Theorem
↗ GH.

(keine topologische Invarianten!)
abhängig von J

Beziehung: $\bar\partial$-harmonische (p,q)-Formen

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) = \{ \alpha \in \Omega^{p,q}(M) \mid \Delta_{\bar\partial}\alpha = 0 \}$$

Lemma: α ist $\bar\partial$-harmonisch $\Leftrightarrow$ $\bar\partial\alpha = 0 = \bar\partial^*\alpha$

Beweis: $\Delta_{\bar\partial}\alpha = 0 \to 0 = (\Delta_{\bar\partial}\alpha, \alpha) = \|\bar\partial\alpha\|^2 + \|\bar\partial^*\alpha\|^2$

Theorem (Dolbeault-Zerlegung)
orthogonal + direkt

$$\Omega^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M) \oplus \bar\partial^*\Omega^{p,q+1}(M) \oplus \bar\partial\Omega^{p,q-1}(M)$$

Beweis: ↗ Griffiths-Harris

Anwendung: Jede Form $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ besitzt eine eindeutige Darstellung als:

$$\alpha = \bar\partial\alpha' + \bar\partial^*\alpha'' + \alpha^H$$

mit $\alpha' \in \Omega^{p,q-1}$, $\alpha'' \in \Omega^{p,q+1}$, $\alpha^H \in \mathcal{H}^{p,q}(M)$

Bemerkung:
- $\bar\partial\alpha = 0 \Leftrightarrow \bar\partial^*\alpha'' = 0$
- Man hat eine analoge Zerlegung für ∂

Satz: Sei (M^{2m}, h, J) eine kompakte hermitesche Mft. und sei $\alpha \in \Omega^{p,0}(M)$. Dann gilt.

$$\bar\partial \alpha = 0 \iff \Delta_{\bar\partial} \alpha = 0$$

d.h. α ist genau dann holomorph, wenn α $\bar\partial$-harmonisch ist.

Folgerung (Dolbeault-Isomorphismus)

Die Abbildung $\mathcal{H}^{p,q}(M) \longrightarrow H^{p,q}(M)$, $\alpha \mapsto [\alpha]$ ist ein Isomorphismus.

Beweis analog zum Hodge-Isomorphismus

Bezeichnung: $h^{p,q} := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(M)$

Hodge-Zahlen (bzgl. J)

Satz (Serre-Dualität) $H^{p,q}(M) \cong H^{m-p,m-q}(M)$

Beweis: $\bar{*} : \Omega^{p,q}(M) \longrightarrow \Omega^{m-p,m-q}(M)$, $\bar{*}\alpha := \overline{*\alpha}$

$$\begin{aligned}
\bar{*}\,\Delta_{\bar\partial}\,\alpha &= *\left(\overline{(\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\alpha}\right) \\
&= *\,(\partial\partial^* + \partial^*\partial)\,\bar\alpha \\
&= -*\,(\partial * \bar\partial * + *\bar\partial * \partial)\,\bar\alpha \\
&= \bar\partial^*\,\bar\partial\,(\bar{*}\alpha) - *^2\,\bar\partial * \partial\,\bar\alpha \\
&= \bar\partial^*\,\bar\partial\,(\bar{*}\alpha) - \bar\partial * \partial *^2\,\bar\alpha \\
&= \bar\partial^*\,\bar\partial\,(\bar{*}\alpha) + \bar\partial\,\bar\partial^*\,(\bar{*}\alpha) \\
&= \Delta_{\bar\partial}\,\bar{*}\,\alpha
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\bar{*}$ ist ein $\mathbb{C}$-anti-linearer Isomorphismus.

$$\mathcal{H}^{p,q}(M) \longrightarrow \mathcal{H}^{m-p,m-q}(M)$$

Sei (M^{2m}, h, J) eine kompakte Kähler Mfk.

- $\to \quad \Delta = 2\,\Delta_{\bar\partial}$

$\to \quad \mathcal{H}^{p,q}(M) \subset \mathcal{H}^{p+q}(M)$

$\Delta_{\bar\partial}$ erhält $\mathcal{H}^{p,q}(M) \quad \to \quad \Delta$ erhält $\mathcal{H}^{p,q}(M)$

$\to \quad \mathcal{H}^k(M) := \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(M)$

- $\Delta_{\bar\partial} = \frac{1}{2}\Delta$ ist ein reeller Operator, d.h. kommutiert mit der Konjugation

im Allgemeinen: $\overline{\Delta_{\bar\partial}\alpha} = \Delta_\partial \bar\alpha$ für Kähler: $= \Delta_{\bar\partial}\bar\alpha$

$\to \quad \mathcal{H}^{p,q}(M) \cong \mathcal{H}^{q,p}(M)$ (für reelle VR)

- $\omega \in \Omega^{1,1}(M)$ Kähler-Form $\to \quad \omega^m = c \cdot vol$, $c \neq 0$

$\to \quad \omega^p \neq 0 \quad \forall\, p \leq m$

$\Delta\omega^p = 0$ da $\Delta\omega = 0$

$\Rightarrow$ <u>Satz</u>: Sei (M^{2m}, h, J) eine kompakte Kähler-Mfk. Dann gelten (neben Poincaré und Serre Dualität) noch folgende Beziehungen zwischen Betti- und Hodge-Zahlen:

- $b_k = \sum_{k=p+q} h^{p,q}$

- $h^{p,q} = h^{q,p}$

- $h^{p,p} \geq 1 \quad \forall\, 0 \leq p \leq m$

Insbesondere gilt: $b_{2k+1} \equiv 0 \ (2)$

$b_{2k} \neq 0$

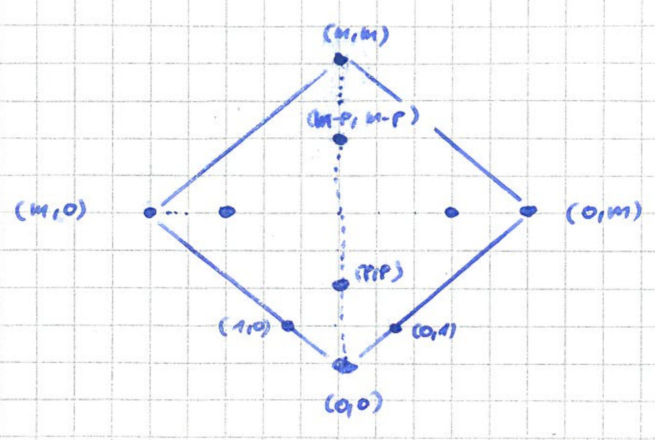
genauer: $b_{2k+1} = 2 \cdot \sum_{l=0}^{k} h^{l,2k+1-l}$

$b_1 = 2h^{01}$

$b_3 = 2(h^{0,3} + h^{1,2})$

Hodge - Diamant

(M, h, J) kompakte Kähler Mfk.



Anordnung der $h^{p,q}$'s

b_k = Summe der $h^{p,q}$'s in der k-ten Zeile

Serre: $\bar{*}$ $\hat{=}$ Symmetrie am Zentrum (Drehung um 180°)

Konjugation: ‾ $\hat{=}$ Symmetrie an der vertikalen Linie durch das Zentrum (Konjugation)

$*$-Stern $\hat{=}$ Symmetrie an der horizontalen Linie

<u>Folgerung</u>:

$$H^{p,q}(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{für } p \neq q \\ \mathbb{C} & \text{für } p = q \end{cases}$$

<u>Beweis</u>: bekannt ist: $H^r(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{für } r \equiv 1 (2) \\ \mathbb{Z} & \text{für } r \equiv 0 (2) \end{cases}$

- $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow H^{p,q}(\mathbb{C}P^n) = 0$ für $p+q \equiv 1 (2)$
- $H^{2k}(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \to 1 = b_{2k}(\mathbb{C}P^n)$

$$\geq h^{p,2k-p}(\mathbb{C}P^n) + \underset{\displaystyle 2\, h^{p,2k-p}(\mathbb{C}P^n)}{\underset{\parallel}{h^{2k-p,p}(\mathbb{C}P^n)}} \quad p \neq k$$

$$\to h^{p,2k-p}(\mathbb{C}P^n) = 0$$

$$\Rightarrow H^{p,p}(\mathbb{C}P^m) \cong \mathbb{C}$$

<u>Bemerkungen</u>:

- $H^{p,p}(\mathbb{C}P^m)$ wird erzeugt von ω^p
- Auf $\mathbb{C}P^m$ existieren keine nicht-trivialen globalen holomorphen Formen $\Omega^{p,0} \cap \operatorname{Ker}\bar{\partial}$

Anwendungen

- $M = S^1 \times S^{2k+1}$ trägt keine Kähler-Metrik, $k \geq 1$

da $b_1(M) = 1$ denn $b_k(M \times N) = \sum_{p+q=k} b_p(M) \cdot b_q(N)$

oder: $b_2(M) = 0$

(→ Ballmann)

Bemerkung: $M = S^1 \times S^{2k+1}$ trägt aber auch keine symplektische Struktur (da $b_2 = 0$)

- **Kodaira – Thurston – Mfk.**

$H(\mathbb{R}) = \left\{ A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$ Heisenberg-Gruppe

$H(\mathbb{Z}) \subset H(\mathbb{R})$ abgeschlossene UG mit $x,y,z \in \mathbb{Z}$

$\pi : H(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y,z) \mapsto (x,y)$

$\leadsto \pi : N := H(\mathbb{R}) / H(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}_2 = T^2$

Faserung über T^2 mit Faser $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

N ist eine kompakte Mfk.

$H(\mathbb{R})$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^3$ $\to \pi_1(H(\mathbb{R})) = 1$

$\to \pi_1(N) \cong H(\mathbb{Z})$

$\Rightarrow H_1(N, \mathbb{Z}) = H(\mathbb{Z}) / [H(\mathbb{Z}), H(\mathbb{Z})] \cong \mathbb{Z}_2$

$\Rightarrow b_1(N) = 2$

$M := N \times S^1_t$, $\omega := dx \wedge dt + dy \wedge dz$

ω ist eine symplektische Form

M besitzt keine Kähler Metrik da $b_3(M) = 3 \equiv 1 \, (2)$